HAL open science

# Etude des progressions harmoniques dans les espaces de hauteurs : perspectives théoriques, analytiques et compositionnelles

Moreno Andreatta, Louis Bigo

▶ **To cite this version:**

Moreno Andreatta, Louis Bigo. Etude des progressions harmoniques dans les espaces de hauteurs : perspectives théoriques, analytiques et compositionnelles. Trois siècles du Traité de Jean-Philippe Rameau. La musique-science devant la question de l'harmonie, A paraître. hal-04306910

**HAL Id: hal-04306910**

**https://hal.science/hal-04306910v1**

Submitted on 25 Nov 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Etude des progressions harmoniques dans les espaces de hauteurs : perspectives théoriques, analytiques et compositionnelles

Moreno Andreatta, CNRS IRMA / ITI CREAA Université de Strasbourg & Ircam
Louis Bigo, Univ. Lille, CNRS, Centrale Lille, UMR 9189 CRIStAL

## 1. Introduction

Dans cet article nous nous intéressons au *Tonnetz* et à ses généralisations et extensions théoriques en tant qu'espace de hauteurs privilégié pour l'étude des progressions harmoniques dans une perspective à la fois analytique et compositionnelle. Nous proposons dans un premier temps un aperçu historique du *Tonnetz*, dont nous discutons la généalogie remontant aux écrits théoriques de Jean-Philippe Rameau, en parallèle des sources traditionnelles dans le discours musicologique, à savoir les écrits théoriques de Léonard Euler. Nous rappelons ensuite la formalisation topologique du Tonnetz en tant que complexe simplicial permettant une première généralisation des espaces de hauteurs en les associant à des classes d'équivalence d'accords, ce qui correspond - *de facto* - à un changement d'axes générateurs du plan bidimensionnel. Une courte digression sur le catalogue des « identités » de Julio Estrada nous offrira une deuxième possibilité d'aborder les différents « Tonnetze » à partir d'une approche plus combinatoire. Après avoir montré plusieurs applications du Tonnetz en musicologie computationnelle, notamment dans le domaine de l'analyse automatique du style, nous discuterons l'intérêt du Tonnetz dans une démarche compositionnelle s'appuyant sur les implémentations de ce modèle dans différents environnements informatiques. Une section finale permettra d'ouvrir la discussion sur quelques perspectives analytiques et compositionnelles autour du Tonnetz généralisé et ses extensions basées sur la théorie des graphes.

## 2. Les origines ramistes du *Tonnetz*

Parmi les représentations géométriques de l'espace de hauteurs, le Tonnetz est sans doute l'une des plus étudiées par les musicologues. Traditionnellement, on attribue à Léonard Euler l'invention de ce modèle selon lequel les hauteurs se disposent dans un repère cartésien où les axes générateurs sont engendrés respectivement par l'intervalle de quinte (juste) et de tierce majeure, ces intervalles étant identifiés par Euler comme les plus consonants d'un point de vue physique. Cette représentation prend le nom initialement de *Speculum Musicum*, à savoir « miroir de la musique », une appellation qui renvoie implicitement à la notion de symétrie majeur/mineur à la base de cette construction. La figure suivante (Fig. 1) montre le *Speculum Musicum* dans lequel nous avons mis en

évidence les axes générateurs ainsi que la triangulation sous-jacente du plan, réalisant un pavage où chaque triangle correspond soit à un accord majeur soit à un accord mineur.

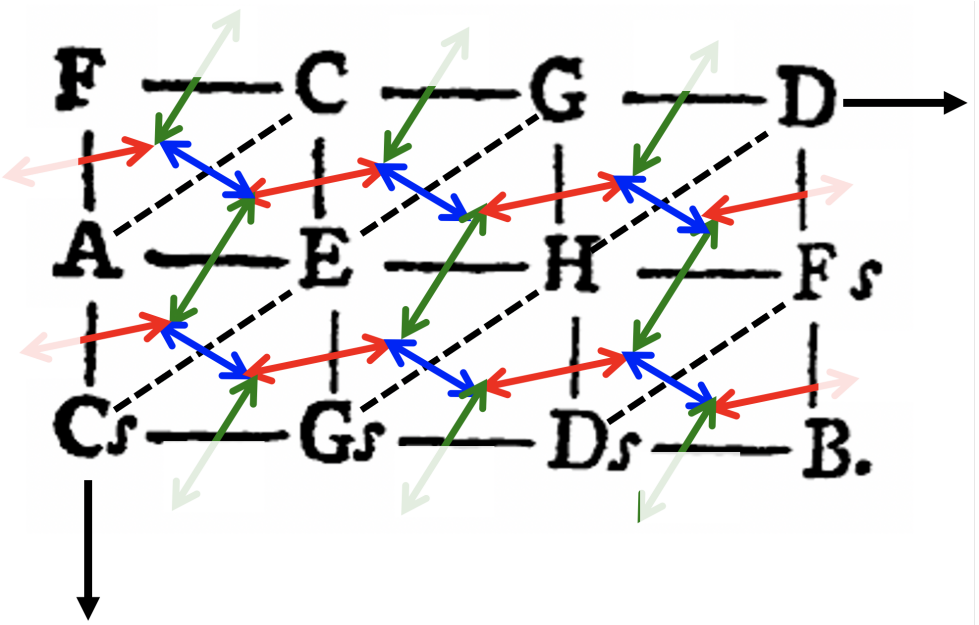


Figure 1 : Le *Speculum Musicum* d'Euler tel qu'on le retrouve dans *De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis* (1774) et mise en évidence du pavage hexagonal sous-jacent obtenu en connectant les barycentres de chaque triangle du plan. Les hauteurs sont organisées par quintes justes sur les axes horizontaux et par tierces majeures sur les axes verticaux.

Comme on peut le voir aisément, en connectant les barycentres de chaque triangle du plan on obtient un pavage hexagonal dans lequel chaque sommet de chaque hexagone correspond à un accord majeur ou bien à un accord mineur, les deux accords étant reliés par l'un des trois opérateurs (le « **P**arallèle », le « **R**elatif » et le « ***L**eittonwechsel* » ou « *leading-tone exchange* »). Le terme Tonnetz s'est imposé ensuite au sein de l'analyse musicale fonctionnelle inspirée des travaux du musicologue Hugo Riemann. Les théories transformationnelles, en particulier celles issues de la tradition ensembliste américaine (à partir, en particulier, des travaux de David Lewin) ont favorisé une réactualisation des approches riemanniennes à l'intérieur d'une démarche analytique que l'on caractérise à partir de la fin des années 1990 comme « néo-riemannienne ». Les origines ramistes du Tonnetz ainsi que la dette de l'analyse néo-riemannienne envers Rameau ne semblent cependant pas avoir fait l'objet d'une attention particulière de la part de la communauté musicologique. Pourtant, l'organisation des hauteurs par quintes et par tierces dans le plan suivant deux axes perpendiculaires apparaît déjà dans le *Nouveau système de musique théorique* publié par Rameau en 1726, soit 13 ans avant le *Tentamen* d'Euler. Euler et Rameau entretenaient une correspondance dans laquelle il était notamment question des rapports de fréquence entre hauteurs[1], et bien que l'invention du Tonnetz soit généralement attribuée à Euler, il semble aujourd'hui difficile d'identifier chez lequel de ces deux théoriciens ce modèle a réellement émergé en premier. Plus de deux siècles plus tard, le compositeur bege Henri Pousseur montre clairement dans sa « théorie des réseaux »

[1] Pelseneer, J. (1951). Une lettre inédite d'Euler à Rameau. Bulletins de l'Académie Royale de Belgique, 37(1), 480-482.

comment Rameau a pu avoir joué un rôle important dans une démarche néo-riemannienne postulant une relation étroite entre analyse et composition. Comme l'affirme Pousseur :

> « Un réseau, au sens entendu ici, est une distribution de note [...] selon plusieurs (pour commencer deux) axes qui se caractérisent chacun comme une chaîne d'un seul et même intervalle[2]. »

La construction du réseau est illustré en Figure 2, avec une référence au modèle que l'on trouve chez Rameau (à gauche) ainsi qu'au maillage hexagonal (à droite) qui caractérise la structure du *Tonnetz,* comme nous avons déjà pu le voir dans le *Speculum Musicum* d'Euler.

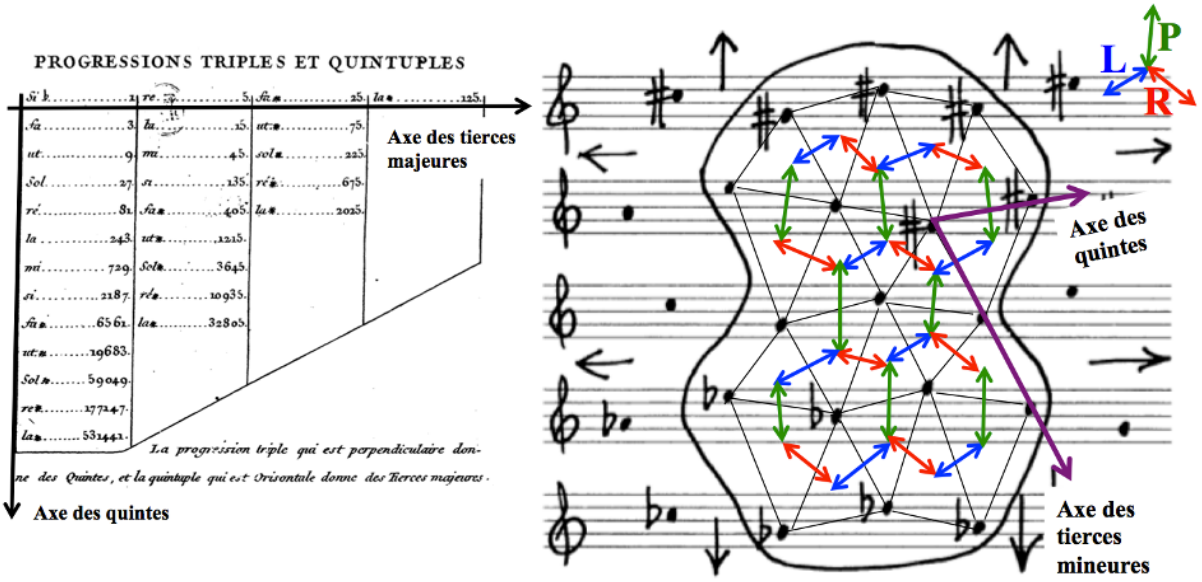


Figure 2. Les origines ramistes de la théorie des réseaux du compositeur Henri Pousseur. À gauche, une organisation des hauteurs pas tierces majeures et quintes justes apparaissant dans le *Nouveau système de musique théorique* de Rameau (1726). L'illustration de droite, complétée afin de mettre en évidence les axes générateurs ainsi que les trois opérateurs néo-riemanniens, est adaptée d'une figure publiée dans l'article « Applications Analytiques de la 'technique des réseaux' », *op. cit.*

L'intérêt de la démarche proposée par Pousseur réside dans la possibilité de faire varier les axes générateurs, ce qui équivaut à considérer des *Tonnetze généralisés*, pouvant varier selon le type de grammaire musicale dont l'analyste souhaite étudier la représentation. En effet :

> « Il ne faut toutefois pas oublier que le principe même de la méthode réside dans la volonté de construire le lacis de telle sorte que les relations musicales élémentaires effectives, donc 'en-temps', (analysées ou composées, mélodiques ou accordiques) soient les plus serrées possibles, s'expriment principalement entre notes voisines du réseau, dans un sens ou dans l'autre[3]. »

---

[2] Voir Pousseur, Henri, « Applications Analytiques de la 'technique des réseaux' », *Revue belge de Musicologie*, Vol. 52, (1998), p. 247-298. La référence à Rameau est présente chez le compositeur et théoricien sériel depuis la fin des années soixante. Voir Pousseur, Henri, « L'apothéose de Rameau. (Essai sur la question harmonique), *Musiques Nouvelles. Revue d'esthétique*, 21, (1968), p. 105-172.

[3] Voir Pousseur, Henri, « Applications Analytiques de la 'technique des réseaux' », *op. cit.*

La théorie des réseaux permet également d'adresser explicitement la question des relations entre les différentes représentations géométriques. Comme l'affirme Pousseur :

> « Ajoutons encore que l'on peut passer de certains réseaux à certains autres en faisant simplement 'basculer' les axes [...] ce qui modifie les rapports de proximité structurelle entre les notes et donc la hiérarchie de leurs intervalles[4]. »

Cette remarque de Pousseur est essentielle pour comprendre le principe de généralisation du Tonnetz en tant qu'espace de représentation pour les structures harmoniques. Les travaux de l'école américaine autour de la démarche néo-riemannienne, à partir de l'article fondateur de Richard Cohn[5] et jusqu'aux généralisations proposées par Dmitri Tymoczko basées sur la théorie des graphes et des orbifolds[6], ont exploré l'intérêt de cette généralisation, en particulier en ce qui concerne la représentation de progressions harmoniques ne se réduisant pas à des accords majeurs et mineurs. Il est cependant possible d'aller au-delà d'une démarche combinatoire et géométrique et suivre l'intuition originaire de Pousseur, en particulier autour de la notion de « voisinage » dans un réseau donné, en formalisant le *Tonnetz* avec les outils de la topologie. Cela permet à la fois de donner une classification exhaustive de tous les différents *Tonnetze* à l'aide des invariants algébriques et topologiques et d'envisager des applications analytiques et compositionnelles tout à fait nouvelles explorant en profondeur, et de façon computationnelle, la notion de « style » musical.

# 3. Une formulation topologique des *Tonnetze* généralisés

## 2.1 Le Tonnetz généralisé

La définition du Tonnetz comme un espace de hauteurs généré par un ensemble arbitraire d'intervalles musicaux suggère naturellement l'énumération combinatoire de ses variantes. Ce principe de généricité est souligné par R. Cohn et E. Gollin qui étudient respectivement les variantes bidimensionnelles et tridimensionnelles du Tonnetz comme l'illustre la Figure 3.

---

[4] Voir Pousseur, Henri, « Applications Analytiques de la 'technique des réseaux' », *op. cit.*
[5] Voir COHN, Richard, "Neo-Riemannian Operations, Parsimonious Trichords, and their *Tonnetz* Representations", *Journal of Music Theory*, 41(1), 1997, p. 1-66.
[6] Voir TYMOCZKO Dmitri, "The Generalized Tonnetz", *Journal of Music Theory*, 56(1), 2012, p. 1-52.

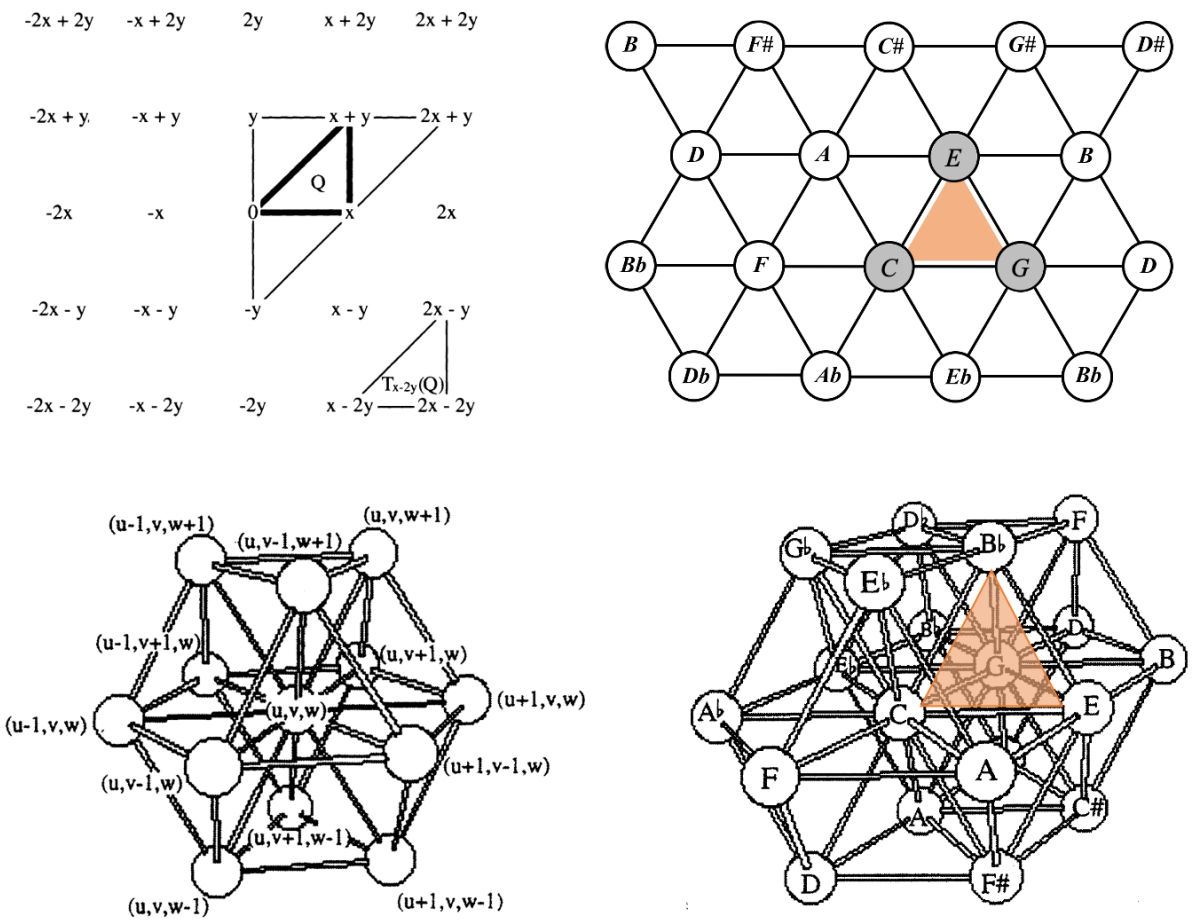


Figure 3 : En haut à gauche, le *Tonnetz abstrait* de R. Cohn (1997), illustrant la génération d'un espace à partir d'une paire arbitraire d'intervalles (x,y), menant entre autres au *Tonnetz* néoriemmanien (en haut à droite) faisant apparaître sous la forme de triangles les triades majeures (pointe vers le haut) et mineures (pointe vers le bas). En bas à gauche, une généralisation tridimensionnelle de ce principe pour un triplet d'intervalles (u,v,w) proposé par E. Gollin (1998) menant entre autres à une représentation sous la forme de tétraèdres (en bas à droite) des accords septième (pointe vers le haut) et demi-diminués (pointe vers le bas).

La définition du Tonnetz par un strict ensemble d'intervalles ne limite pas sa généralisation au cadre du système chromatique. L'élargissement du Tonnetz a notamment fait l'objet d'expérimentations dans des espaces micro-intervalliques (Chouvel, 2013). Au contraire, le cadre de la tonalité suggère la construction d'espaces à partir d'ensemble d'intervalles diatoniques. C'est par exemple le cas du *ruban de la tonalité* étudié par Mazzola (2012) ou du *Tonnetz générique* utilisé par J. Hook (2020) utilisés pour l'analyse de progressions harmoniques dans une tonalité donnée.

La construction d'un Tonnetz généralisé à l'aide d'axes associés à des intervalles générateurs entraîne nécessairement la représentation répétée d'une même classe de hauteurs. L'identification des classes de hauteurs identiques dans un Tonnetz généralisé aboutit à des structures topologiques variables qui ont fait l'objet de nombreuses études à

l'aide d'approches mathématiques issues de la topologie et de la géométrie. Au delà de la nature toroïdale du Tonnetz néo-riemannien déjà soulignée par Cohn (1997), les études de Mazzola (2002), Catanzaro (2011) ou encore Tymoczko (2012) soulignent la variété des topologies auxquelles peuvent aboutir la construction de ces espaces, incluant notamment des tores, des rubans de Möbius, ou encore des bouteilles de Klein. La complexité de ces structures repliées peut cependant être limitante dans un cadre d'analyse musicale. Bien que limité à 12 sommets organisés de manière toroïdale, le Tonnetz est en effet plus souvent exploité dans sa version *dépliée* (Figure 3, en haut à droite) plus apte à faire apparaître les propriétés de voisinages entre les hauteurs et accords qui le composent que sa représentation toroïdale.

## 2.2 Représentations duales

Les espaces de hauteurs mentionnés précédemment mettent en jeu des relations de voisinage binaires, reliant des paires de hauteurs en fonction de l'intervalle qui les sépare. La qualité du Tonnetz néoriemmanien à faire apparaître les triades mineures et majeures sous la forme de triangles suggère une définition duale de ces espaces, se basant sur les accords qu'ils font émerger plutôt que sur les intervalles de voisinages. Dans le cadre de cette définition duale, le Tonnetz néoriemmanien (Figure 3 en haut à droite) résulte de la représentation sous la forme de triangles des 24 triades mineures et majeures dont les sommets et faces communes sont fusionnés.

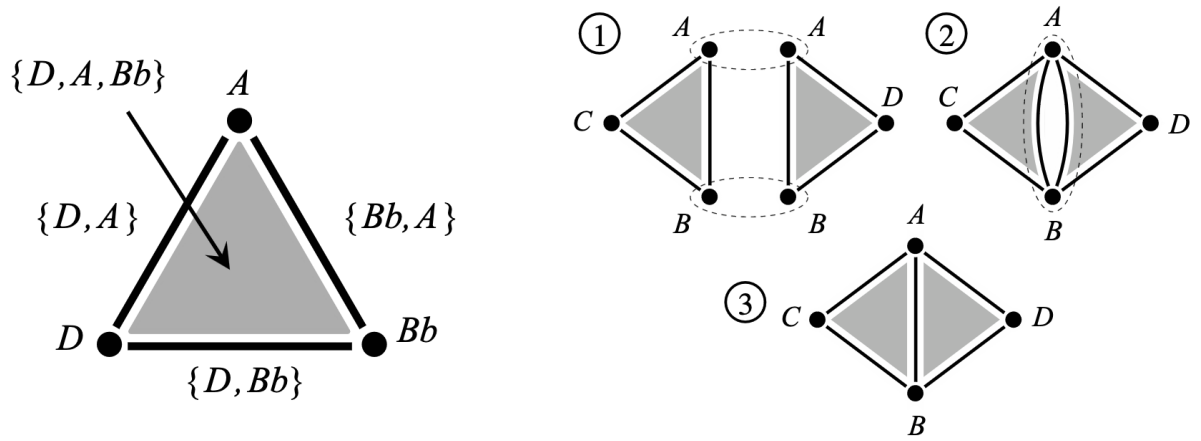


Figure 4 : À gauche, représentation d'un accord à 3 sons et de ses sous-ensembles par un complexe simplicial. À droite, construction d'un complexe simplicial à partir d'un ensemble de deux accords.

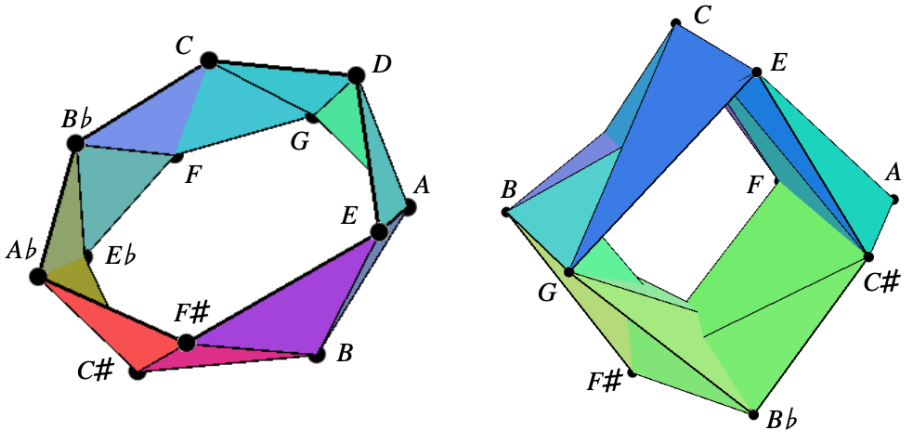


Figure 5 : À gauche, le complexe simplicial $K_{[2,5,5]}$ comprenant les 12 *accords suspendus*. À droite, le complexe simplicial $K_{[3,4,5]}$ comprenant les 24 triades mineures et majeures, et correspondant à une représentation *repliée* du Tonnetz.

Le formalisme des complexes simpliciaux issus de la topologie algébrique constitue un outil naturel pour la construction d'espaces de hauteurs suivant cette définition duale. La figure 4 illustre la représentation générique d'un accord à *n* notes et la construction d'un complexe à partir d'un ensemble d'accords de départ (Bigo, 2015).

Bien que cette approche s'applique potentiellement à partir de n'importe quel ensemble d'accords, la construction d'un *Tonnetz généralisé*, dont les axes sont associés à un ensemble limité d'intervalles, nécessite cependant de partir d'un ensemble d'accords équivalents à transposition et inversion près, i.e. des classes d'équivalences T/I au sens de la Set Theory (Forte, 1973). Dans un tel catalogue, les accords partagent nécessairement la même structure intervallique modulo inversion et permutation circulaire. Nous notons dans la suite K[*a*,*b*,*c*] le complexe simplicial résultant de l'ensemble des accords partageant la structure intervallique (*a b c*). La figure 5 illustre les complexes K[2,5,5] et K[3,4,5] respectivement issus de l'assemblage des accords suspendus, et des triades mineures et majeures. Cette construction formelle d'espaces d'accords mène à un catalogue associant un *Tonnetz généralisé* à chacune des 224 classes d' A. Forte, et s'étend naturellement à toute classe d'équivalences entre accords, définit notamment par les opérateurs de transposition seule, de multiplication et de permutation sur la structure intervallique (Bigo, 2013). Notons, en particulier, que dans l'espace des « identités » d'Estrada (correspondant au catalogue des 77 partitions de l'entier 12 organisées dans une structure de treillis appelé « permutoèdre ») on retrouve les 12 Tonnetze comme des sous-graphes de l'ensemble partiellement ordonné. Par exemple, pour retrouver le Tonnetz traditionnel des accords majeurs et mineurs il suffit de considérer la structure intervallique (3 4 5) et les 6 permutations de ses intervalles (Fig. 6).

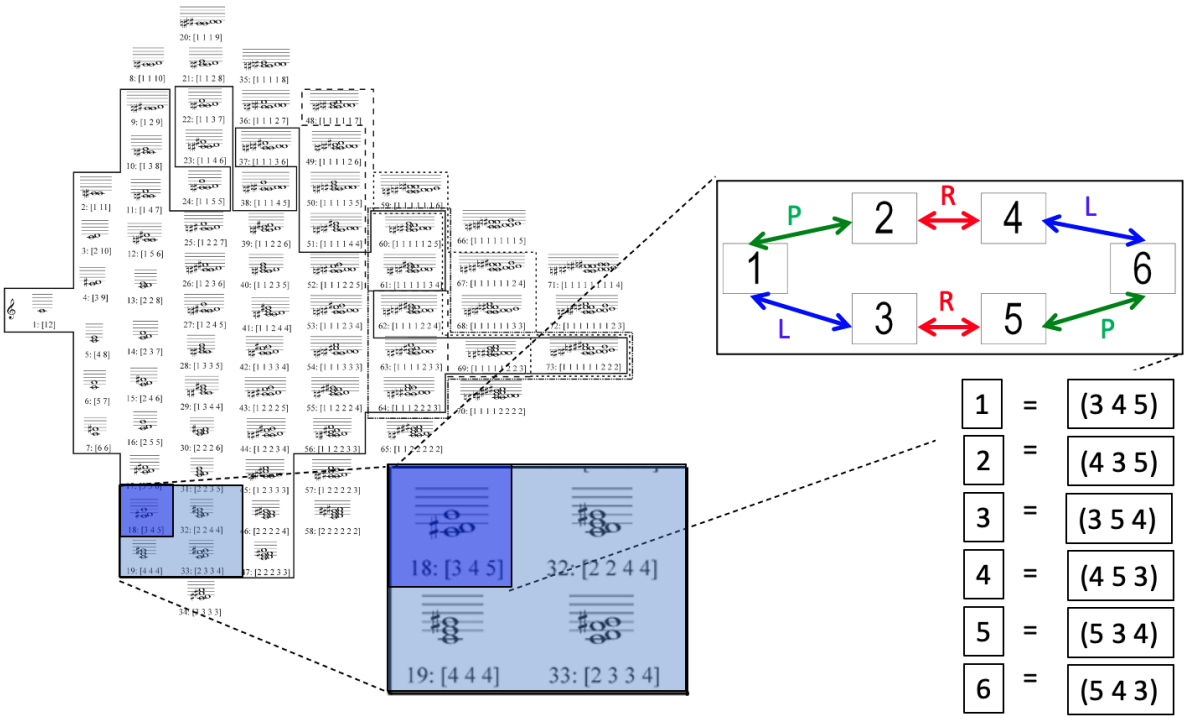


Figure 6 : la cellule génératrice du Tonnetz obtenue à partir de la structure (3 4 5) du permutoèdre de Julio Estrada.

# 3. Applications en analyse musicale computationnelle

Offrant un point de vue spatial sur l'analyse musicale, les espaces de hauteurs dérivés du Tonnetz font l'objet d'un intérêt particulier de la part des musicologues (Chouvel 2011, Cohn 2012). L'utilisation d'un espace de hauteurs en analyse musicale implique généralement la projection du contenu musical étudié sous la forme d'une trajectoire dans cet espace. La Figure 7 illustre la représentation d'un extrait d'un chorale de J.-S. Bach dans les représentations dépliées des complexes K[2,5,5] (haut) et K[3,4,5] (bas). Bien que progressant dans le temps par nature, la trajectoire représentant l'évolution d'une pièce musicale dans un espace peut se visualiser de manière statique en conservant l'affichage des régions parcourues dans le passé. Dans la figure 7, l'accord courant est affiché en jaune claire et les accords passés en jaune foncé. La caractérisation géométrique de la trajectoire produite se situe au centre de la démarche d'analyse musicale à l'aide d'espaces de hauteurs. Nous évoquons dans un premier temps la description qualitative de la singularité géométrique d'une trajectoire à l'aide d'une sélection d'exemples musicaux. Nous présentons dans un seconde temps une démarche quantitative visant à calculer systématiquement la compacité globale d'une trajectoire. Nous proposons finalement d'associer cette compacité à la propension de l'espace sous-jacent à révéler le contenu harmonique de la séquence musicale représentée.

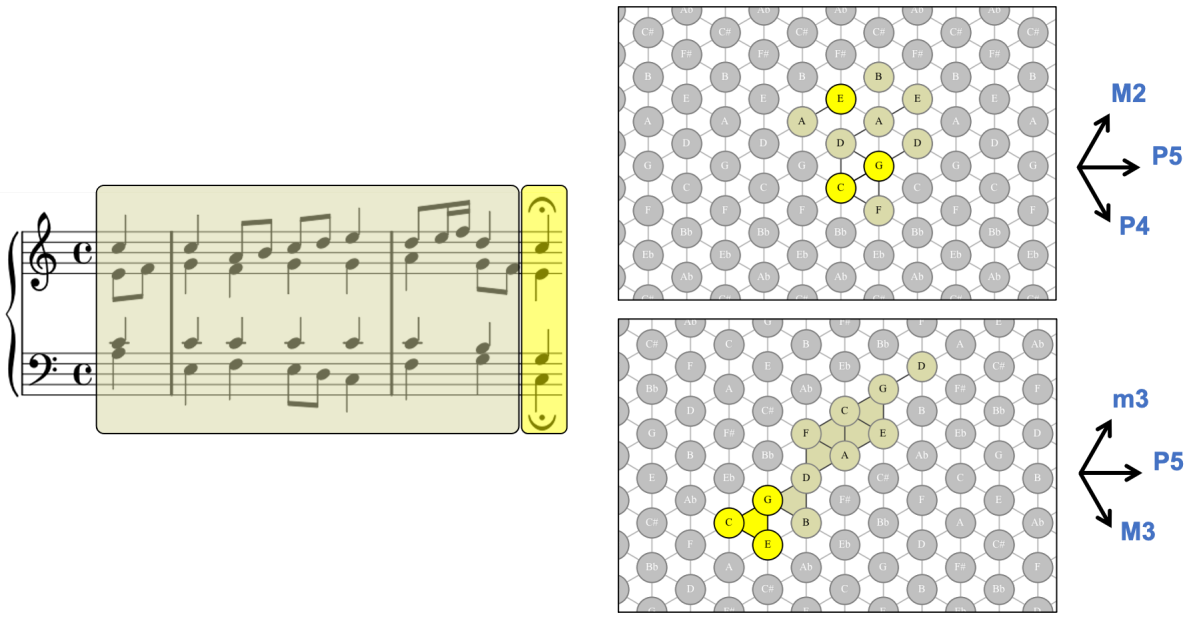


Figure 7 : Première mesures du choral BWV 256 de J.-S. Bach représentées par une trajectoire dans K[2,5,5] (haut) et K[3,4,5] (bas).

## 3.1 Quelques exemples de trajectoires singulières

En analyse musicale, le Tonnetz représente l'un des outils géométriques les plus utilisés pour décrire la spécificité d'un morceau à travers la mise en évidence des trajectoires harmoniques singulières. L'un des exemples les plus célèbres en littérature néo-riemannienne est sans doute le passage du deuxième mouvement (« Scherzo ») de la Neuvième Symphonie de Beethoven dont la trajectoire dans le Tonnetz correspond à un « zig-zag » (Cohn, 1998). L'alternance, dans le passage en question, d'accords majeurs et mineurs (et des transformations néo-riemanniennes R et L associées) rend particulièrement pertinente l'utilisation du Tonnetz dual, la trajectoire correspondant ainsi à un parcours en « zig-zag » dans le maillage hexagonal. La figure 8 montre la représentation de la trajectoire dans la visualisation proposée par Gilles Baroin[7].

[7] Pour le lecteur qui souhaite explorer les espaces de dimension supérieure, nous conseillons de visionner la vidéo réalisée par Gilles Baroin et dans laquelle le Tonnetz (dual) est mis en correspondance avec l'« hypersphère des accords », un modèle géométrique conçu par l'auteur qui permet de visualiser les trajectoire comme des chemins sur la surface de la sphère de dimension 4 (projetée dans l'espace 3D pour pouvoir la rendre accessible à notre système visuel). Un « zig-zag » en deux dimensions devient ainsi une « droite » (ou, plus précisement, une géodésique) sur la sphère. La vidéo est disponible à l'adresse : https://www.youtube.com/user/mathemusic4d

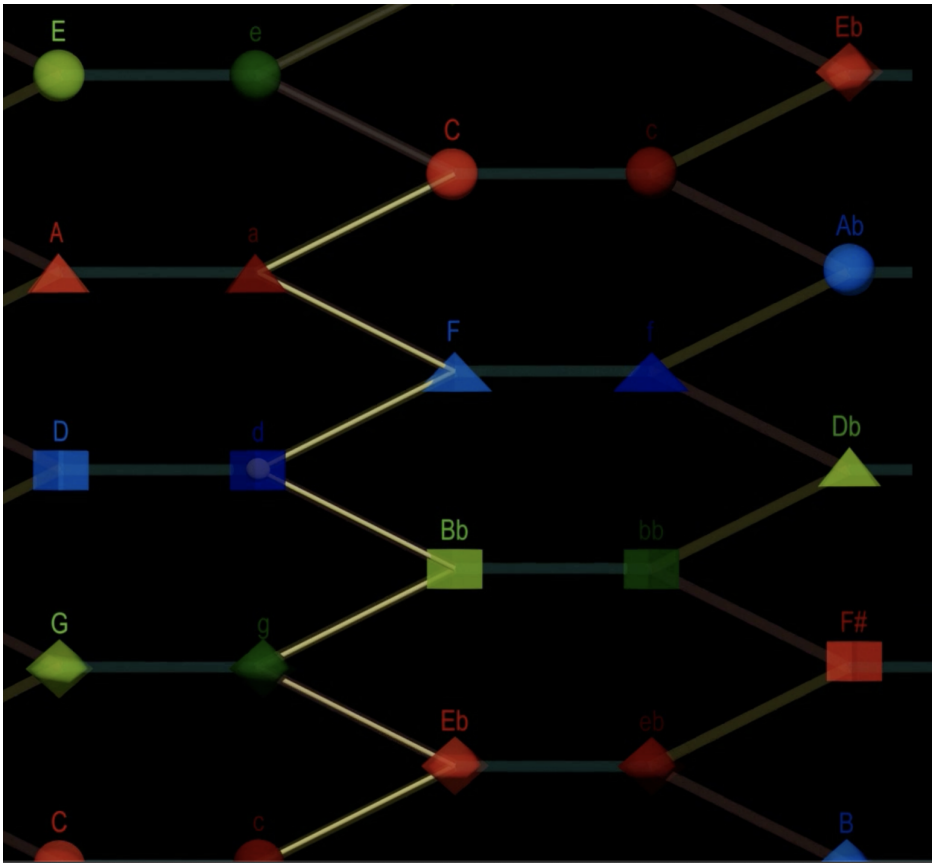

Figure 8 : le « zig-zag » beethovenien dans la visualisation de Gilles Baroin

Au-delà du répertoire « savant », la *popular music* (jazz, rock, pop, chanson, …) offre de multiples exemples de morceaux dont les progressions harmoniques peuvent être analysées de façon pertinente à l'aide du Tonnetz. Les chansons de Paolo Conte, par exemple, sont souvent basées sur des progressions harmoniques qui peuvent être associées à une trajectoire singulière. C'est le cas de *Madeleine*, chanson que le musicien considère comme un véritable exercice de modulations, dont le but est de s'éloigner de la tonalité de base (Lab majeur) à travers une répétition de l'opérateur de transposition d'une tierce mineure appliqué à la même cellule génératrice de la progression harmonique formée par quatre accords (Figure 9)

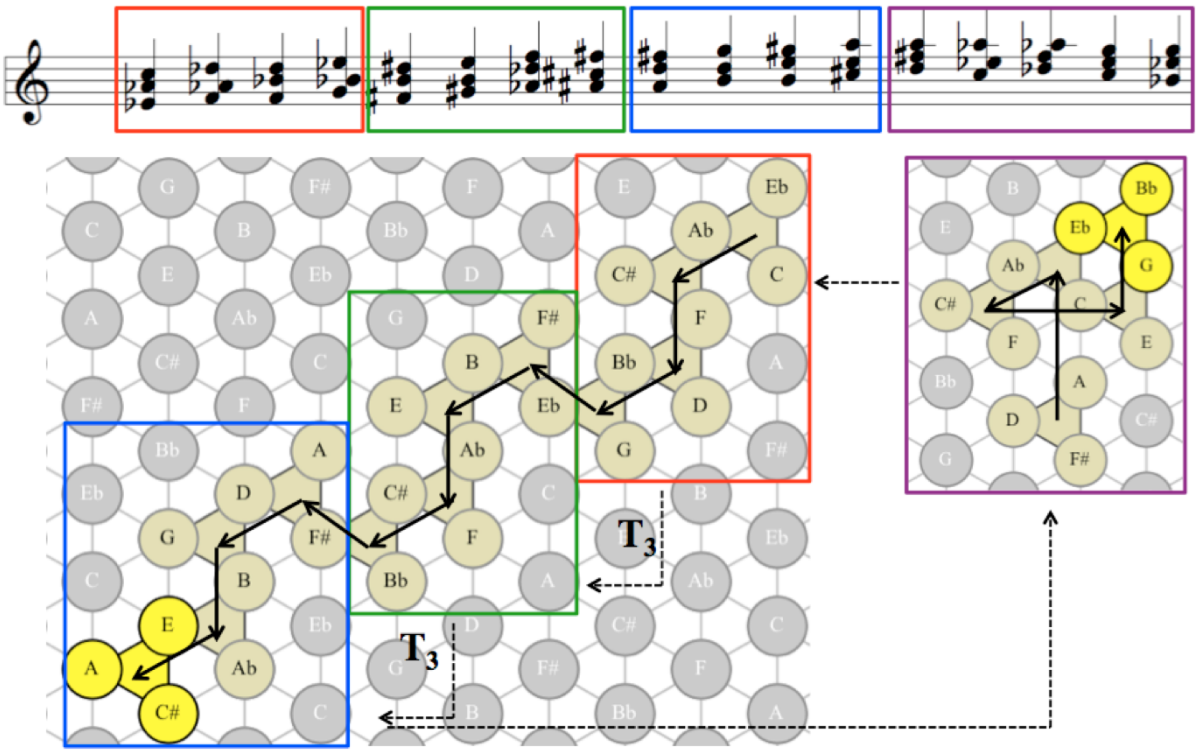


Figure 9 : progression harmonique à la base de *Madeleine* de Paolo Conte

Le résultat est une trajectoire en « zig-zag » mais avec un mouvement plus étendu par rapport à celui du Scherzo de la neuvième symphonie de Beethoven. Le quatrième bloc a une trajectoire tout à fait autonome par rapport aux trois premiers blocs, l'objectif de la progression harmonique étant d'arriver à la cadence parfaite permettant de revenir à la tonalité de départ.

On retrouve un autre type de « zig-zag » dans la chanson *Il regno del tango*, toujours de Paolo Conte, et dans laquelle la trajectoire harmonique peut bien s'exprimer à l'aide d'un opérateur non-élémentaire, à savoir le *Nebenverwandt* (Cohn, 2012), correspondant à une coupe en diagonale dans le maillage hexagonal. Musicalement, le *Nebenverwandt*, indiqué avec la lettre N, est la transformation composée RLP (ou, de façon équivalente, PLR) qui transforme chaque accord mineur dans l'accord majeur en relation de dominante avec celui-ci et chaque accord majeur dans l'accord mineur construit sur le quatrième degrée (ou relation de sous-dominante). L'opérateur N est suivi systématiquement par un segment du zig-zag beethovenien, plus exactement la transformation RLR qui opère comme une une véritable cadence rompue (V-VI), comme la figure suivante le montre clairement (Figure 10).

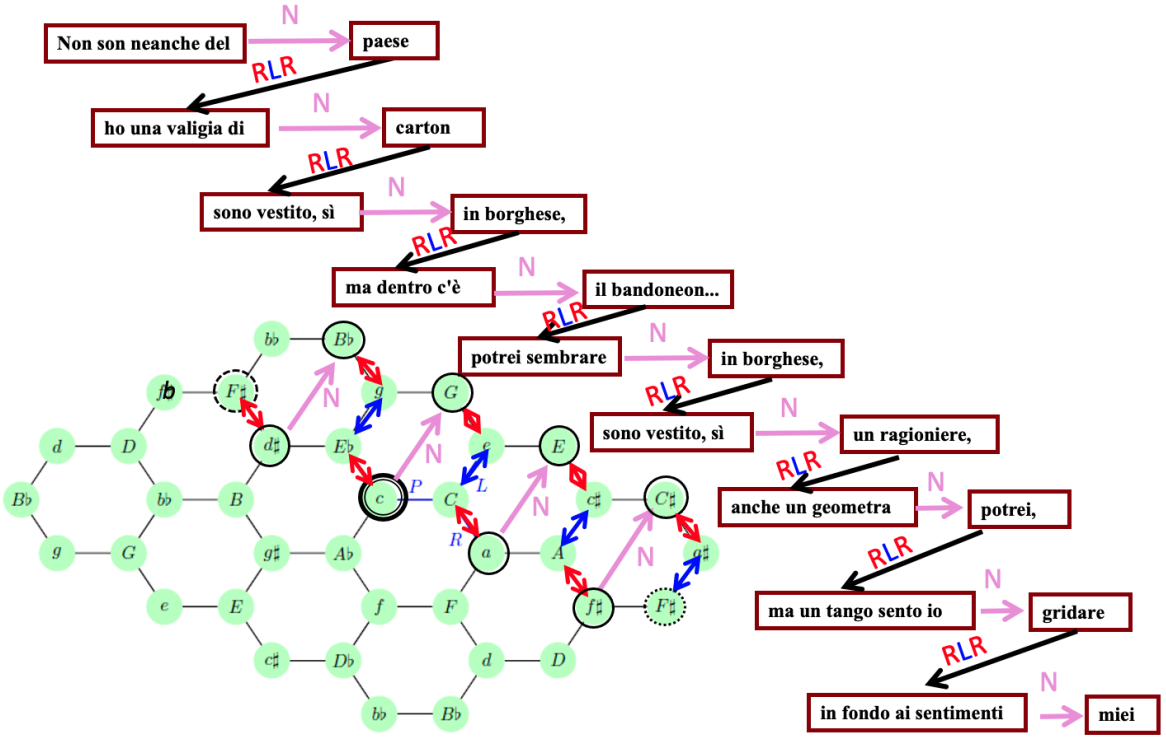


Figure 10 : trajectoire correspondante à la boucle harmonique utilisée dans le couplet de la chanson *Il regno del tango* de Paolo Conte.

On peut multiplier les exemples, avec des auteurs-compositeurs-interprètes de la chanson française (Arthur H, William Sheller, Romain Didier, …) dont l'écriture harmonique - souvent au piano - semble bien adaptée à une analyse musicale de type « spatiale » en terme de trajectoire singulière[8].
Terminons cette section consacrée aux trajectoires singulières avec un exemple d'analyse harmonique d'un morceau pop pour laquelle on peut se poser la question de l'intérêt d'appliquer des outils issus de la théorie des graphes et permettant de décrire des transformations parcimonieuses entre des accords n'étant pas nécessairement du type majeur ou mineur. Le morceau *Take a bow* du groupe Muse est emblématique en ce qui concerne sa structure harmonique comprenant à la fois des accords majeurs, mineurs et augmentés. L'accord augmenté étant représenté par un segment dans le Tonnetz traditionnel dont le milieu correspond à la note en commun entre un accord majeur et l'accord mineur en relation de Nebenverwandt avec celui-ci, le Tonnetz n'est sans doute pas adapté pour rendre compte des composantes de la trajectoire singulière de la pièce. Il offre néanmoins un représentation assez pertinente des propriété de symétrie de la trajectoire globale dont l'accord finale de septième (en réalité difficilement percevable comme telle à cause d'une distorsion très prononcée de la guitare électrique), représente une véritable rupture de symétrie par rapport à la forme globale de la trajectoire (Figure 11).

[8] Le lecteur intéressé à d'autres exemples d'analyse via l'étude des trajectoires spatiales peut consulter le matériel à disposition dans la page web du cours de L3 de l'un des auteurs consacré aux modèles mathématiques et computationnels dans la chanson. Voir à l'adresse : http://repmus.ircam.fr/moreno/chanson

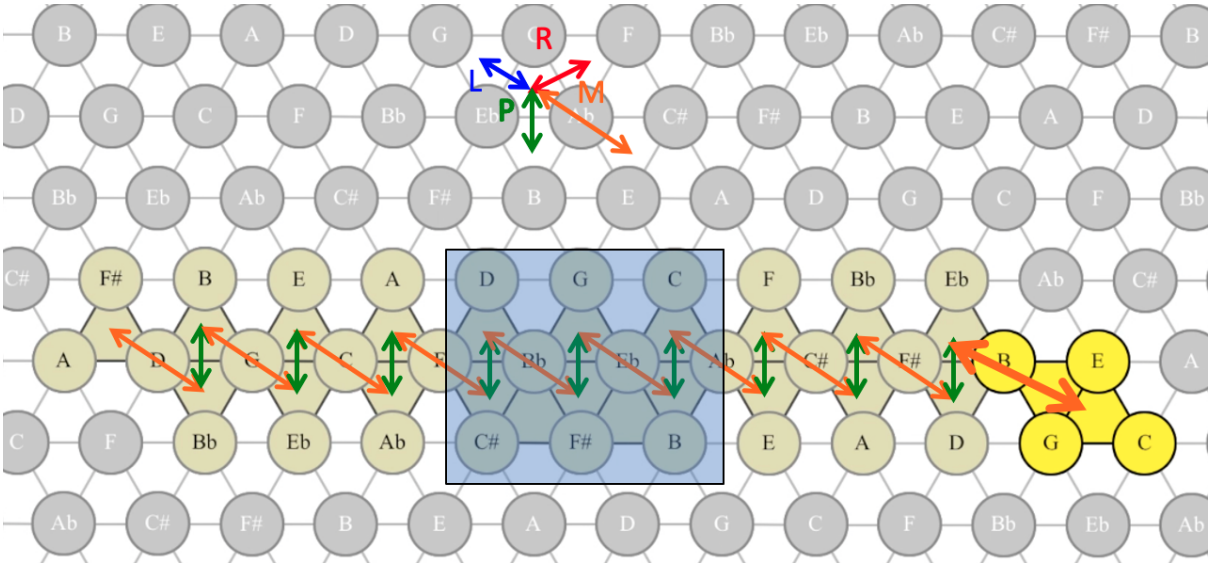


Figure 11 : la trajectoire spatiale associée au contenu harmonique du morceau *Take a bow* de Muse. Nous avons ajouté aux trois axes principaux du Tonnetz, correspondant aux transformations néo-riemanniennes R, P et L, l'axe indiqué avec la lettre N et correspondant à la transformation de *Nebenverwandt*.

Nous reviendrons sur cet exemple dans la section conclusive concernant d'autres espaces pouvant généraliser le Tonnetz à travers la théorie des graphes. On pourra ainsi offrir une nouvelle interprétation de la progression harmonique à la base de ce morceau vue cette fois comme une trajectoire spatiale dans le graphe des accords majeurs, mineurs et augmentés (le *Cube Dance*).

## 3.2 Compacité de trajectoires

La projection d'une progression harmonique dans différents espaces de hauteurs produit des trajectoires d'aspect variable, comme l'illustre la Figure 7. La *compacité* de la trajectoire constitue un descripteur rendant compte de la tendance de ses éléments à être voisins. Nous associons ici la notion de compacité à celle de *grégarité*, qui rend compte de la tendance d'un ensemble d'éléments à être voisins. Le caractère multidimensionnel des complexes simpliciaux nécessite cependant de préciser la dimension à laquelle est quantifiée cette caractéristique. Dans le Tonnetz par exemple, la notion de voisinage entre hauteurs est distincte de la notion de voisinage entre triades. Nous définissons la *compacité* à la dimension *d*, ou *d-compacité*, de la représentation d'un accord dans un espace comme le ratio entre le nombre d'éléments de dimension *d* compris dans cette représentation, et le nombre de sous-ensemble de *d*+1 hauteurs que comprend l'accord. Par exemple, l'accord {C,E,G,B} représenté dans le Tonnetz en bout de trajectoire sur la Figure 11 a une 1-compacité de ⅚ = 0,83 car 5 de ses 6 paires de hauteurs sont reliées par un arc. Sa 2-compacité est de 0,5 car 2 des 4 triplets de hauteurs forment un triangle. Bien que notre objectif soit ici de fournir une présentation intuitive du calcul de la compacité, le lecteur intéressé est invité à se référer à une description plus formelle et détaillée de ce calcul (Bigo et Andreatta, 2015). Le calcul de la compacité d'une séquence musicale dans sa globalité peut se faire en moyennant la compacité de chaque accord successif pondéré par sa durée. Afin d'automatiser cette procédure sur tout fichier MIDI, l'extrait musical est au préalable

réduit sous la forme d'une séquence de tranches de hauteurs rendant compte à chaque instant de la pièce de l'ensemble des hauteurs actuellement jouées.

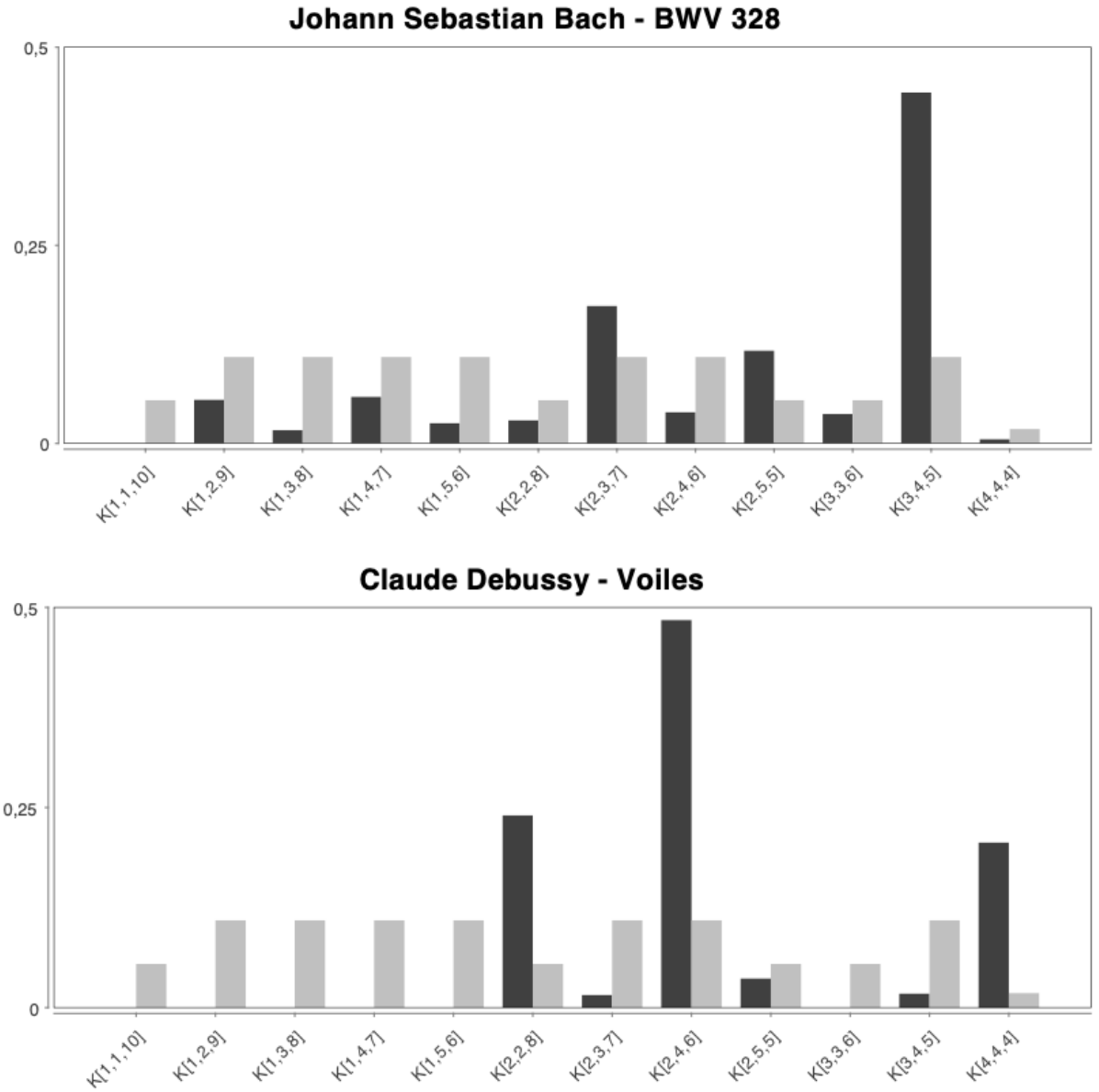


Figure 13 : Comparaison de la *2-compacité* des trajectoires représentant le choral BWV 328 de J.-S. Bach (haut) et la pièce *Voiles* de C. Debussy (bas) dans les 12 complexes bidimensionnels.

La Figure 13 (haut) illustre la 2-compacité de la trajectoire représentant le choral BWV 328 de J.-S. Bach dans les 12 complexes bidimensionnels. La forte compacité produite par le Tonnetz néo-riemannien K[3,4,5] résulte du recours prédominant aux triades mineures et majeures dans cette séquence. La forte compacité produite par le complexe K[2,4,6] dans la pièce *Voiles* de C. Debussy (Figure 13, bas) traduit une utilisation répétée de la gamme par tons.

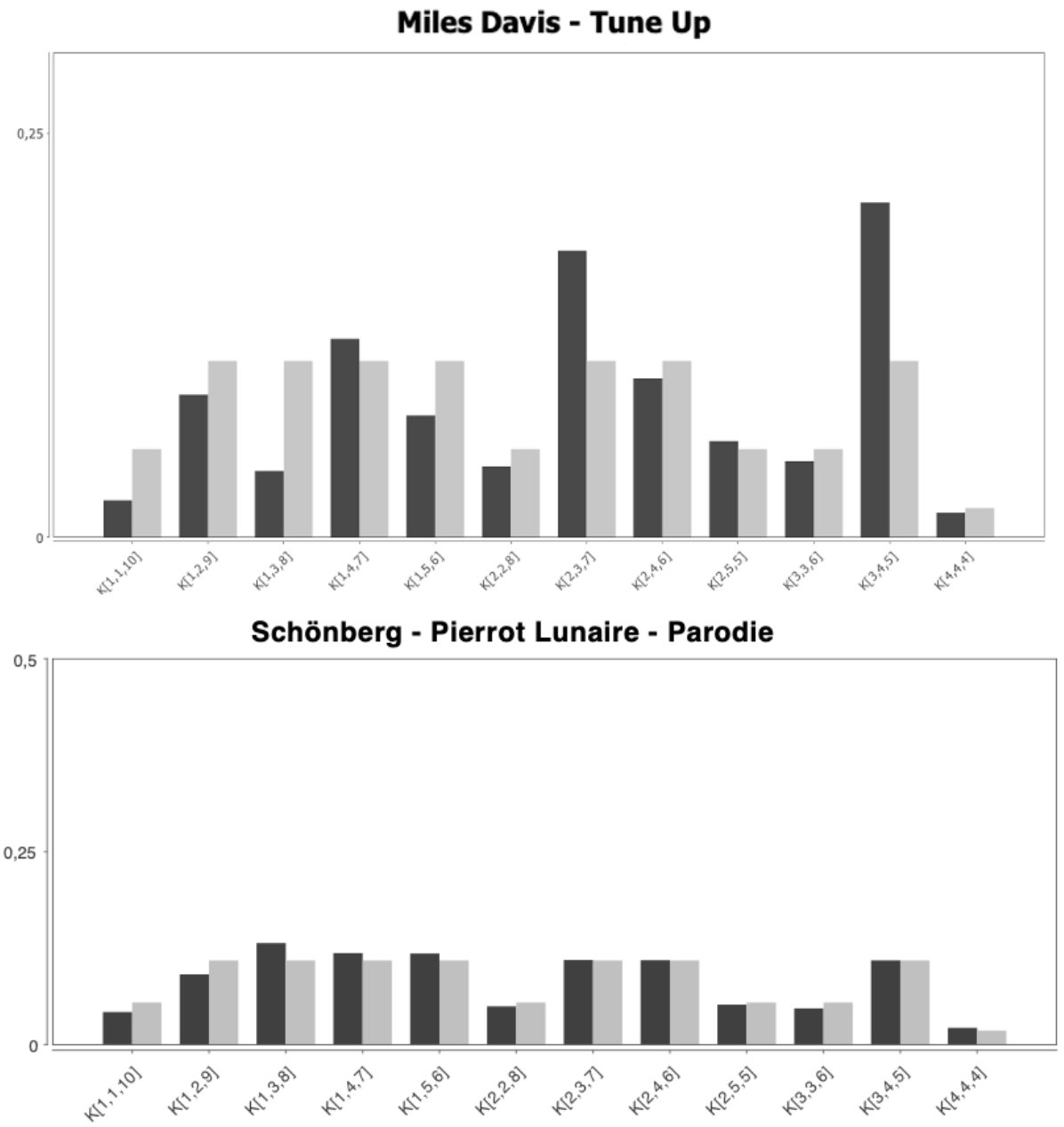


Figure 14 : Comparaison de la *2-compacité* des trajectoires représentant une interprétation du standard *Tune Up* de Miles Davis et du *Pierrot Lunaire* de Schönberg (bas) dans les 12 complexes bidimensionnels.

La Figure 14 illustre les compacités de deux autres pièces dans ces mêmes espaces. Ces deux exemples font apparaître des compacités davantage comparables les unes aux autres, indiquant une diversité harmonique plus large. En haut, la pièce *Tune Up* de Miles Davis induit tout de même une compacité prédominante dans les complexes K[2,3,7] et K[3,4,5] dont les accords constituants correspondent à des sous-ensembles des accords de septième largement utilisés en jazz. L'analyse du *Pierrot Lunaire* de Schönberg ne fait en revanche ressortir aucun complexe, et démontre un recours relativement uniforme au matériau harmonique offert par l'espace chromatique, qui concorde avec la pensée dodécaphonique.

Le calcul de la compacité illustré ci-dessus rend compte des voisinages entre hauteurs jouées simultanément. Les perspectives de ces travaux comprennent l'expérimentation du calcul d'une compacité *temporelle*, rendant compte de la proximité des accords successifs, qui semble incontournable pour caractériser la singularité de trajectoires commes celles illustrées dans la section 3.1. Généralisant encore davantage le concept de compacité d'une trajectoire, nous espérons orienter ces travaux dans le futur vers un questionnement plus large autour de l'évaluation de la qualité d'un espace de représentation à faire émerger la singularité d'un processus musical au-delà de ses aspects harmoniques.

# 4. Applications en composition assistée par ordinateur

## 4.1 Transformations de trajectoires

La représentation d'une séquence musicale comme une trajectoire dans un espace permet de lui appliquer une variété de transformations plus ou moins intuitives et dont certaines sont tout à fait originales et n'ont pas encore fait l'objet d'une étude approfondie. Ces transformations comprennent les translations, les rotations, dont la symétrie centrale, ou encore les plongements entre espaces isomorphes. Dans cette section nous allons nous concentrer sur deux transformations, en particulier, qui ouvrent des perspectives intéressantes d'un point de vue théorique et épistémologique : la rotation de 180° de la trajectoire autour d'un point et le plongement (ou *embedding*) de la trajectoire dans un espace autre que celui dont elle est issue. Le premier cas fait apparaître le concept d'harmonie négative, que l'on essaiera de discuter plus en détail en retraçant brièvement son histoire à partir des théories harmoniques du compositeur français Ernst Lévy. Le second cas ne fait à notre connaissance l'objet d'aucune étude musicologique permettant d'en éclaircir les aspects analytiques[9].

La figure 15 illustre l'application d'une rotation à 180°, équivalent à une symétrie centrale, sur une trajectoire représentant le début du choral BWV 322 de J.-S. Bach dans le complexe K[3,4,5]. Cette transformation équivalente à une inversion a pour conséquence de transformer tout accord mineur en un accord majeur et vice versa. La séquence musicale résultante conserve d'importantes propriétés tonales dû aux propriétés constituantes de l'espace sous-jacent.

[9] On pourrait néanmoins ouvrir une discussion sur sa portée épistémologique en discutant les liens avec la morphogénèse et la croissance des formes au sens d'Arcy Thomson, en reprenant pour cela quelques idées développées par l'un des auteurs (Andreatta, 2021a). Cette réflexion permet en effet d'inscrire la démarche que nous proposons dans cet article une perspective philosophique dépassant largement la démarche structuraliste issue de la sémiologie et la sémiotique, un aspect épistémologique que nous ne pouvons malheureusement pas reprendre ici.

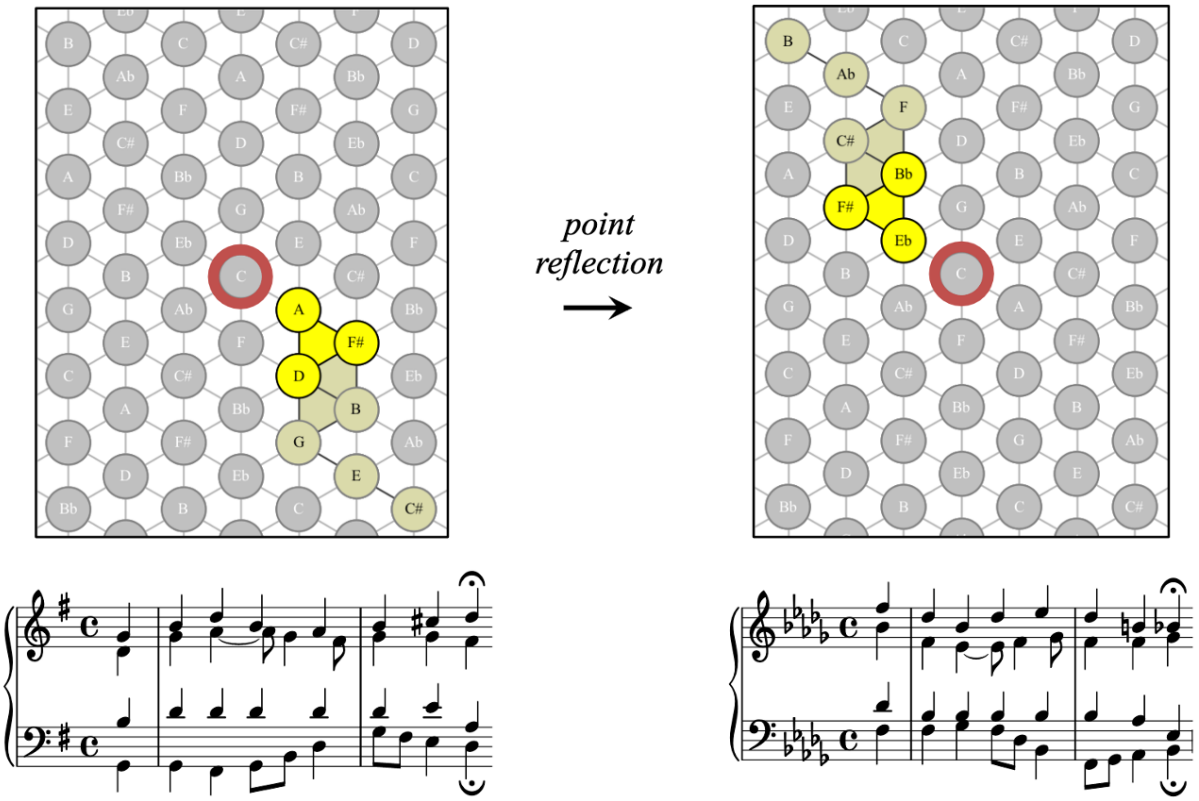


Figure 15 : À gauche, une trajectoire représentant les premières mesures du choral BWV 332 de J. S. Bach dans le complexe KTI [3, 4, 5]. À droite, une symétrie centrale appliquée sur cette trajectoire, modifiant la hauteur des notes d'origine.

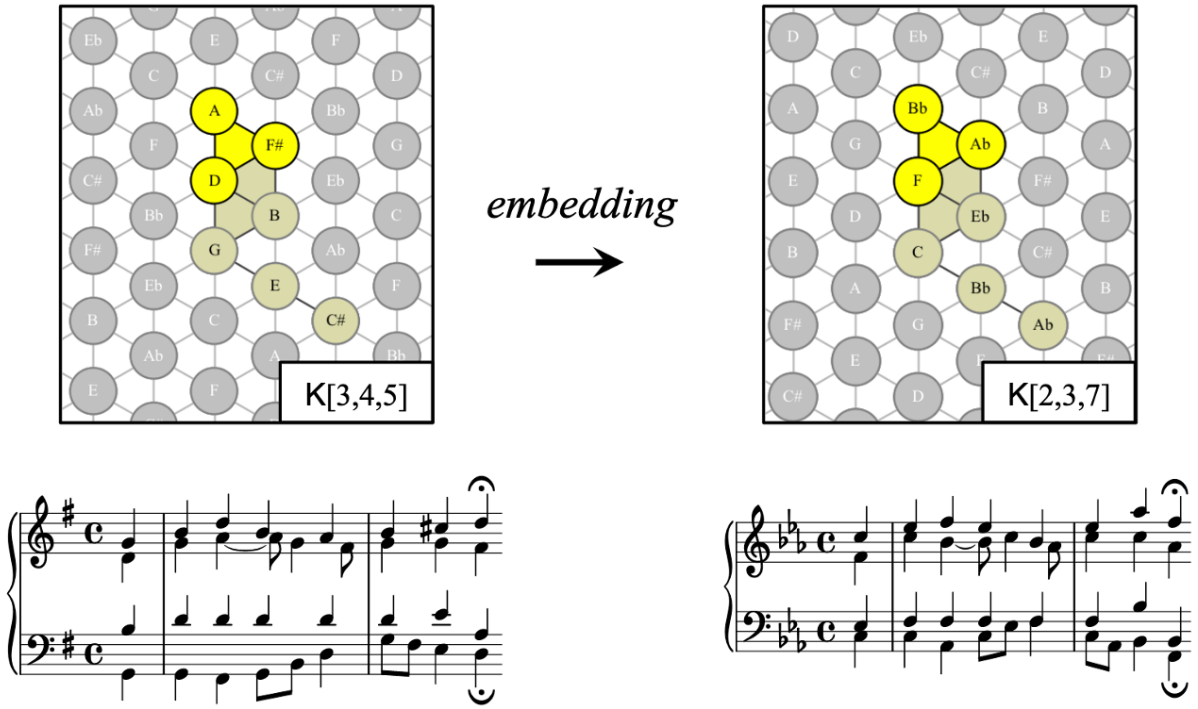


Figure 16 : À gauche, les premières mesures du choral BWV 332 de J.-S. Bach représentées par une trajectoire dans le complexe K [3, 4, 5]. À droite, la transformation de la séquence d'origine résultant du plongement de la trajectoire dans le complexe K [2, 3, 7].

La Figure 16 montre un plongement de trajectoire depuis le complexe K[3,4,5] vers le complexe K[2,3,7]. Chaque triade mineure/majeure de la séquence d'origine, un extrait du chorale BWV 332 de J.-S. Bach, est alors transformée en un accord de structure intervallique [2,3,7], donnant une couleur résolument pentatonique à la séquence résultante.

En conclusion de cette section, notons que si le plongement de la trajectoire reste une opération inédite et donc largement à étudier, la rotation, quant à elle, a déjà fait l'objet de nombreuses réflexions par des compositeurs, analystes et théoriciens de la musique. Comme nous l'avons mentionné, elle correspond à l'idée d'« harmonie négative », une construction popularisée par le musicien Jacob Collier[10] mais dont l'origine remonte aux écrits du théoricien de la musique Ernst Lévy[11]. Dans le tout premier chapitre de son ouvrage consacré à la théorie de l'harmonie, Ernst Lévy pose clairement les bases théoriques de sa conception de l'espace de hauteurs et, plus en générale, de la musique dans sa double articulation avec la théorie et l'acoustique :

> « The raw material of theories are facts. The raw material of musical theory is music. Music is not, as some contemporary acousticians would like us to believe, "something that happens in the air." It is something that, first and last, happens in the soul[12]. »

Dans cette approche la série (imaginaire) des harmoniques inférieurs d'un son acquiert donc le même statut « théorique » de la série usuelle de ses harmoniques, ce qui représente le postulat permettant de donner un statut opératoire à la transformation symétrique qui relie, en particulier, un accord majeur d'une tonalité donnée à l'accord mineur obtenu en prenant comme axe de symétrie celui qui passe entre la tonique et la dominante. Autrement dit, dans la théorie de l'harmonie négative telle que Jacob Collier l'a développée à partir des idées d'Ernst Lévy, l'axe de symétrie correspond *de facto* à l'opérateur P qui préserve l'intervalle de quinte de l'accord de départ et qui peut donc être vu comme une rotation de 180° autour d'un point de l'espace suivi, toujours dans l'interprétation de Jacob Collier, par une transposition. Cette transformation symétrique sera ensuite appliquée à tous les accords d'une progression harmonique, ce qui correspond à opérer une rotation de 180° de l'entière trajectoire spatiale associée à la progression harmonique en question.

## 4.2 Chemins hamiltoniens en chanson

Les outils que nous avons présentés dans les sections précédentes peuvent être appliqués dans une démarche de composition assistée par les mathématiques et l'ordinateur, dans le

---

[10] en particulier dans une série de vidéos sur youtube qui sont devenues virales. Voir en particulier l'entretien en deux parties entre Jacob Collier et June Lee disponible sur la chaîne youtube de ce dernier (https://www.youtube.com/watch?v=DnBr070vcNE&ab_channel=JuneLee).

[11] L'approche décrite par Collier à partir de Lévy (1985) est également compatible avec la théorie du « mouvement symétrique » (*symmetrical movement theory*) de Steve Coleman. Voir à l'adresse : https://m-base.com/essays/symmetrical-movement-concept/

[12] Voir Lévy, Ernst, *A Theory of Harmony, op. cit.*, p. 3.

sillage des travaux de l'OuLiPo (Ouvroir de Littérature Potentielle)[13]. La chanson représente un cas d'étude particulièrement intéressant pour l'exploration des trajectoires singulières dans le Tonnetz et ses généralisations. En dépit de l'apparente simplicité de la forme chanson, dont le contenu harmonique se limite très souvent à des boucles de quelques accords, il est tout à fait possible d'explorer des trajectoires singulières correspondant à des cycles hamiltoniens dans le Tonnetz et ses extensions, tels le Cube Dance. En théorie des graphes, de tels cycles ont la propriété de connecter les sommets d'un réseau dans un chemin fermé (ou boucle) dans lequel chaque sommet n'est visité qu'une et une seule fois. Une étude computationnel du problème montre que dans le Tonnetz K[3,4,5] il y a 124 cycles hamiltoniens que l'on peut représenter à l'aide des mots correspondant aux transformations néo-riemanniennes P, L et R. Nous renvoyons le lecteur intéressé au catalogue complet disponible en ligne[14]. Le « zig-zag » beethovenien, par exemple, correspond au dernier cycle de la liste, le n° 124, représenté par le mot formel « RL », l'expression la plus courte (avec son rétrograde « LR ») capable d'engendrer par douze répétition successives une suite de 24 accords différents[15]. De tels cycles hamiltoniens sont également appelés « redondants » car ils possèdent des périodicités internes à la différences des cycles hamiltoniens « maximaux » pour lesquels un mot de longueur 24 est nécessaire afin d'engendrer la suite des 24 accords différents dans le Tonnetz. Des cycles hamiltoniens maximaux ont été utilisés par l'un des auteurs dans la mise en chanson du poème « Aprile » du poète italien de la décadence Gabriele D'Annunzio (1863-1938). Il s'agit de la toute première expérience d'utilisation des cycles hamiltoniens pour l'écriture des chansons[16]. La Figure 17 montre les trois cycles hamiltoniens maximaux déployés dans les parties instrumentales de la chanson[17].

---

[13] La notion de contrainte mathématique à la base de l'OuLiPo s'applique tout à fait naturellement en musique, comme le lecteur pourra le constater en se référant à l'article programmatique du collectif OuMuPo (Ouvroir de Musique Potentielle). Voir Andreatta et al. (2018).

[14] Voir à l'adresse :
http://repmus.ircam.fr/_media/moreno/list_hamiltonian_cycles_bigo_andreatta_2016.pdf

[15] Le même « zig-zag » est à la base de la structure harmonique de la chanson *A part*, composée par l'un des auteurs d'après un poème d'Andrée Chedid (1920-2011) à l'occasion de la dixième édition du Prix Andrée Chedid du poème chanté. Le lecteur intéressé aux aspects musicologiques de la mise en chanson de textes poétiques, pourra se référer à l'article programmatique de l'un des auteurs intitulé « Chanter les poètes avec (ou sans) les maths » (Andreatta, 2021b).

[16] D'autres applications de la théorie des cycles hamiltoniens en composition ont été proposées par Giovanni Albini qui a également donné, en collaboration avec Samuele Antonini, une classification algébrique des 124 cycles hamiltoniens sur le Tonnetz. Voir Albini et Antonini (2009).

[17] Pour une analyse mathématique de l'utilisation des cycles hamiltoniens en chanson, voir Andreatta (2014). Une visualisation des divers parcours harmoniques au sein du Tonnetz a été réalisé par Gilles Baroin dans une vidéo disponible en ligne à l'adresse :
https://www.youtube.com/watch?v=AB8By7ghTkU&ab_channel=MatheMusic4D

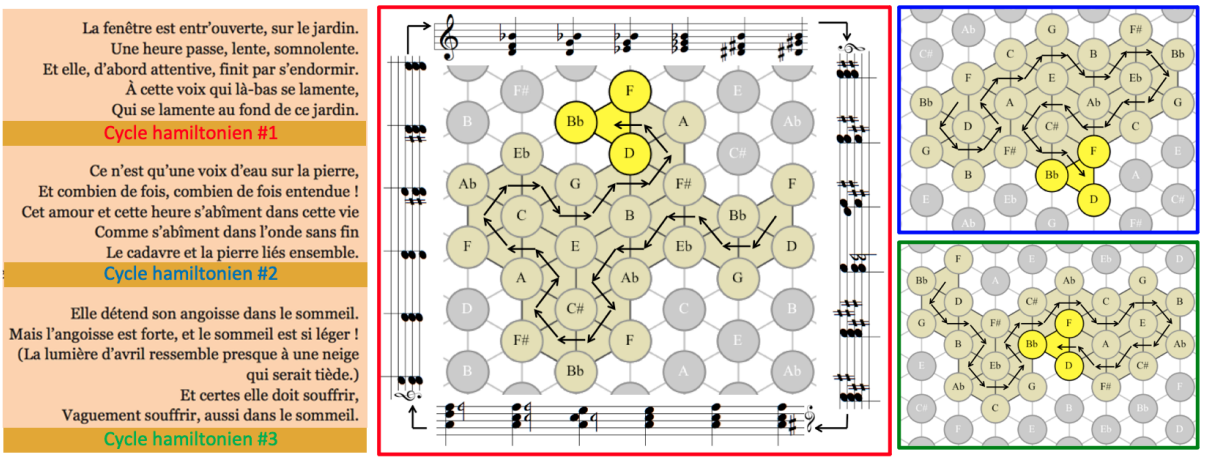


Figure 17. Les trois cycles hamiltoniens maximaux à la base de la chanson *Aprile* (d'après un poème de Gabriele D'Annunzio).

Une expérience intéressante en ce qui concerne toujours la mise en chanson d'un texte poétique à l'aide de la théorie des cycles hamiltoniens concerne la chanson *La sera non è più la tua canzone*, d'après un poème de Mario Luzi. La chanson utilise le cycle hamiltonien n° 42 décrit par le mot formel LPLPLR. Le procédé adopté dans l'écriture de la chanson montre la flexibilité du catalogue des cycles hamiltoniens dans lequel il y a en réalité beaucoup plus que les 124 solutions répertoriées. En effet, comme dans le cas de la solution retenue pour organiser la structure harmonique de la mise en chanson du poème de Mario Luzi, il est tout à fait possible de considérer des permutations circulaires, ce qui permet au compositeur de trouver la progression harmonique qui mieux s'adapte au texte poétique. La figure 18 décrit le processus qui a permis de retenir le mot formel LRLPLP après cinq permutations circulaires et de l'appliquer à l'accord de Ab majeur pour engendrer la progression harmonique sur laquelle est construite la chanson[18].

[18] Comme dans le cas de la chanson hamiltonienne *Aprile*, une visualisation des diverses boucles harmoniques utilisées dans *La sera non è più la tua canzone*, y compris le cycle hamiltonien obtenu à partir de la solution n°42 du catalogue, est disponible sur la chaîne youtube de Gilles Baroin. Voir à l'adresse : https://www.youtube.com/watch?v=1TlwFLYCYhY&ab_channel=MatheMusic4D

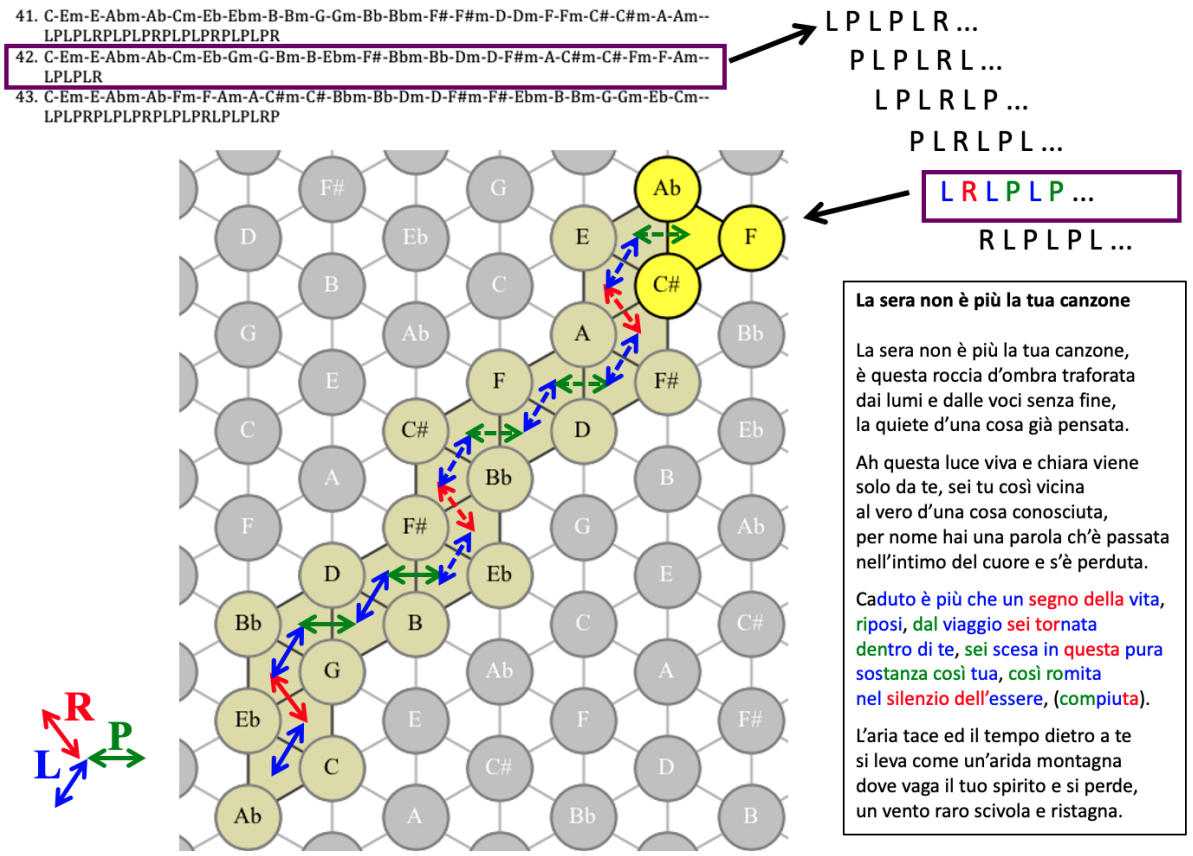


Figure 18 : processus à la base de la mise en chanson du poème *La sera non è più la tua canzone* de Mario Luzi.

# 5. Logiciels

Les espaces de hauteur inspirés du Tonnetz ont motivé une variété de développements logiciels ayant pour objectifs de faciliter la visualisation, l'analyse et la composition musicale à l'aide de cet outil. La majorité des figures de ce chapitre ont été réalisées avec le logiciel HexaChord[19]. La figure 19 illustre l'interface graphique utilisateur du logiciel, permettant d'interagir avec ses trois fonctionnalités principales :

1. la visualisation interactive dans chacun des 12 complexes bidimensionnels d'un flux MIDI lu à partir d'un fichier ou d'un instrument MIDI connecté
2. le calcul de la compacité des trajectoires dans ces complexes comme décrite dans la Section 3.2
3. l'application des transformations spatiales décrites dans la Section 4.1 avec possibilité d'exporter sous la forme d'un nouveau fichier MIDI le résultat de la transformation.

On peut également mentionner le logiciel TONNETZ inspiré de HexaChord et ayant l'avantage d'être accessible dans le navigateur à partir d'un simple url, sans aucune installation logiciel préalable[20].

[19] https://louisbigo.com/hexachord
[20] https://guichaoua.gitlab.io/web-hexachord/

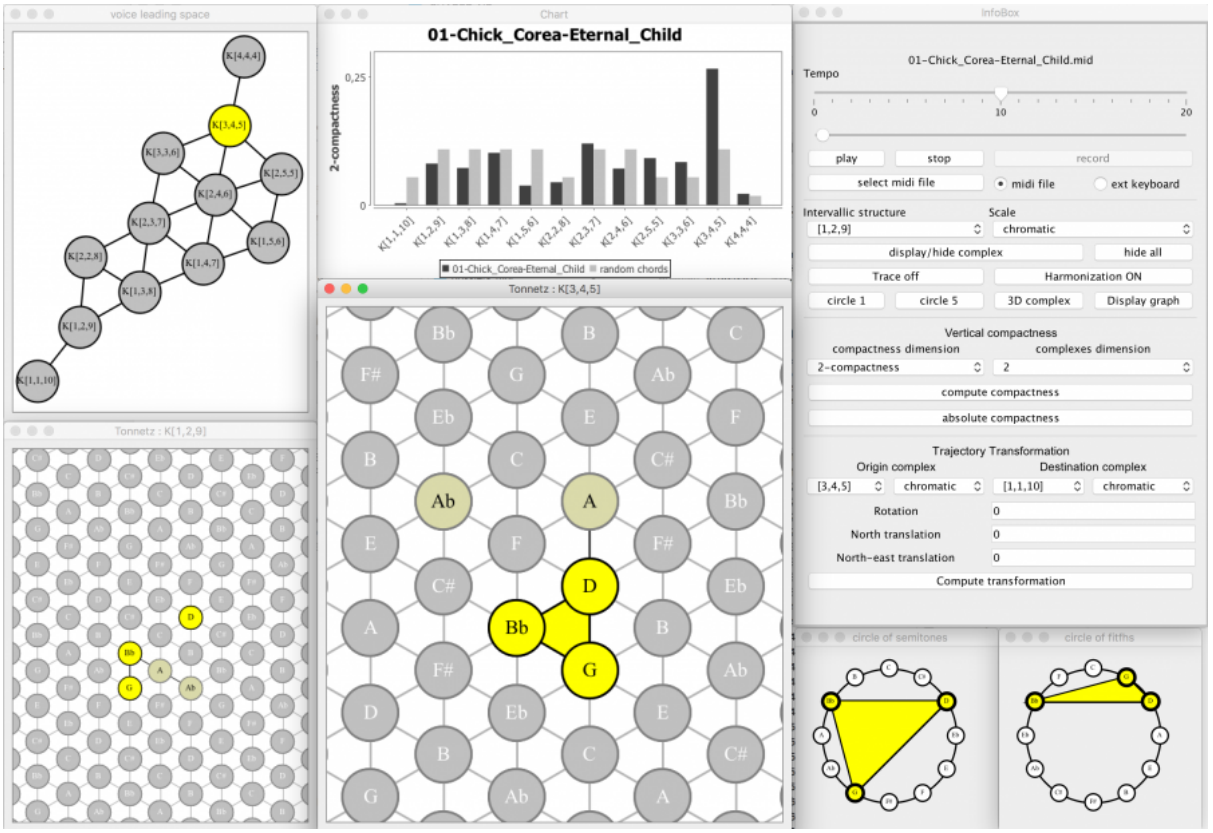


Figure 19 : l’interface graphique utilisateur du logiciel HexaChord.

L’environnement web, conçu et développé par Corentin Guichaoua et l’un des auteurs dans le cadre du projet SMIR (Structural Music Information Research), permet à l’utilisateur de jongler entre la représentation traditionnelle sous la forme de la triangulation du plan à la représentation duale correspondante à un maillage hexagonal du plan en nid d’abeilles. Chaque accord visualisé à l’aide des deux représentations circulaires (cercle chromatique et cycle des quintes) est également accompagné par un chiffrage permettant de l’identifier plus facilement par les utilisateurs ayant l’habitude d’utiliser cette notation. Dans l’environnement web, il est également possible de généraliser le principe de l’harmonie négative en appliquant à la trajectoire spatiale des rotations de 180° autour de n’importe quel axe de symétrie, à l’aide d’un simple menu déroulant. L’environnement est illustré en figure 20.

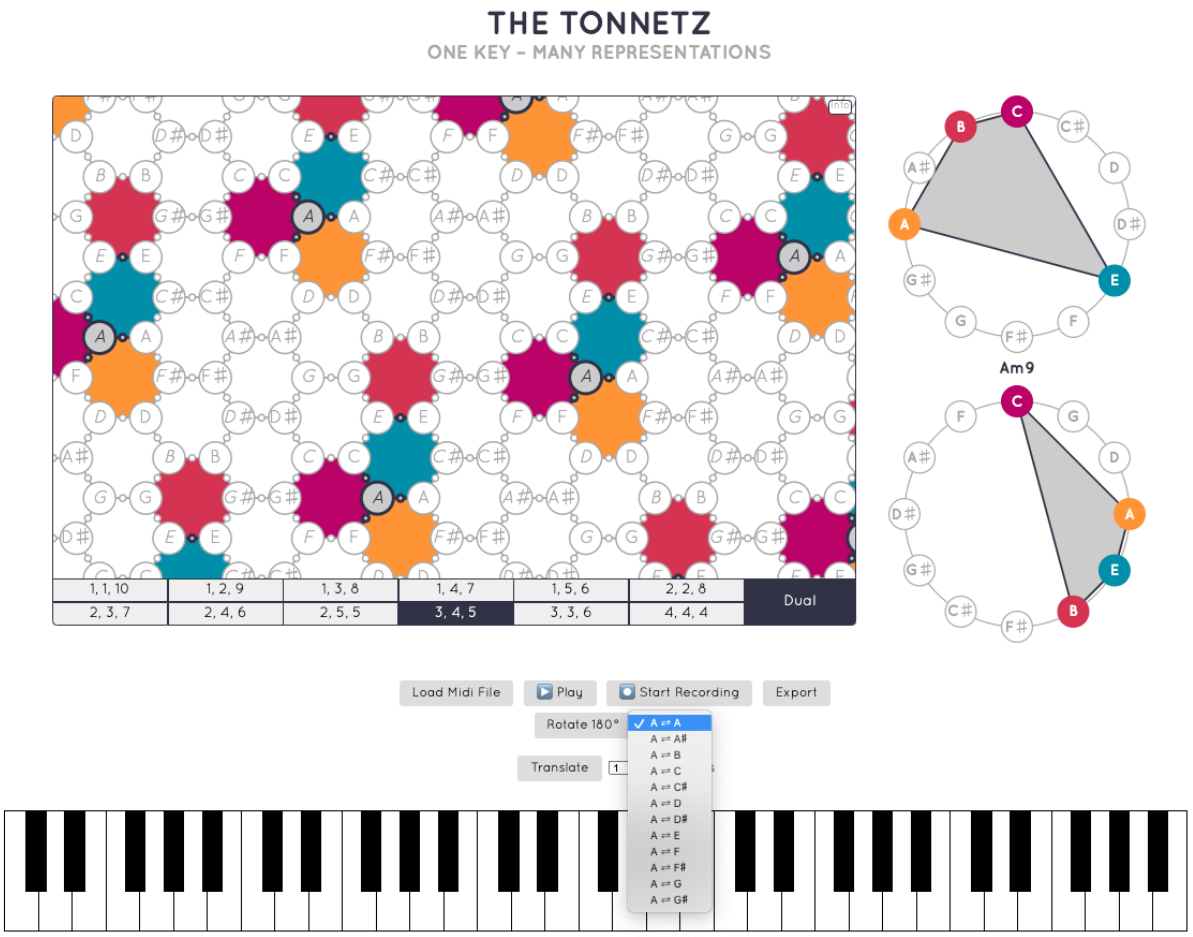


Figure 20 : un aperçu de l'environnement web TONNETZ dans la représentation « duale » en nid d'abeilles avec intégration explicite des opérations symétriques à la base de l'harmonie négative et ses possibles généralisations ainsi que reconnaissance automatique du type d'accord visualisé à l'aide des deux représentations circulaires (cercle chromatique et cycle des quintes).

On mentionnera également, en conclusion de cette section, la bibliothèque bach.tonnetz, développée par Andrea Agostini et Daniele Ghisi, qui propose des fonctionnalités équivalentes au sein de l'environnement temps-réel Max, permettant à l'utilisateur d'expérimenter des processus génératifs musicaux originaux se basant sur des formalismes spatiaux comme celui des automates cellulaires et du *jeu de la vie* (Bigo et al., 2015).

# 6. Au-delà du Tonnetz

Le Tonnetz et ses multiples variantes ne constituent pas, comme le lecteur peut bien l'imaginer, la réponse définitive au problème d'analyser les progressions harmoniques à travers l'utilisation d'espaces géométriques abstraits. Nous avons déjà évoqué le cas d'une progression harmonique, celle utilisée par le groupe Muse dans leur morceau *Take a bow*, qui utilise des accords, comme les accords augmentés, pour lesquels le Tonnetz ne constitue pas l'espace le plus adapté. Les stratégies de représentation envisagées par la communauté des théoriciens de la musique, en particulier ceux issus de la tradition

néo-riemannienne, consistent à substituer au Tonnetz un graphe « relationnel » dans lequel les points représentent des accords et arrêts du graphe représentent aussi bien les *transformations* néo-riemanniennes traditionnelles (R, P et L) mais aussi des *relations* permettant, à priori, la mise en correspondance d'ensemble de classes de hauteurs de cardinalité différente[21]. Une première extension du Tonnetz incluant, outre les accords majeurs et mineurs, également les accords augmentés, avait été proposée Jack Douthett et Peter Steinbach à travers le structure du « Cube Dance » (Douthett et Steinbach, 1998). Deux accords sont connectés s'ils sont en relation $P_{1,0}$, à savoir il y a une seule classe de hauteurs qui a un mouvement d'un demi-ton et aucune classe de hauteurs bouge d'un ton. Pour récupérer les transformations néo-riemanniennes traditionnelles - en particulier la transformation R, pour laquelle une note bouge d'un ton - il est nécessaire d'ajouter la relation $P_{0,1}$, cette fois aucune note n'étant modifiée par un intervalle de demi-ton. Le Cube Dance et ses graphes associés (incluant également des accords de type sus4) sont désormais disponibles dans une application web interactive conçue et développée par Alexandre Popoff[22]. Les cas particuliers $P_{1,0}$ et $P_{0,1}$ sont remplacés par le cas général Pm,n qui indique une relation entre deux triades dans lesquelles m et n classes de hauteurs bougent respectivement d'un demi-ton et d'un ton. La figure 21 montre l'environnement web avec le graphe associé à l'espace des accords majeurs, mineurs et augmentés en relation $P_{1,0}$, $P_{0,1}$ et $P_{1,1}$.

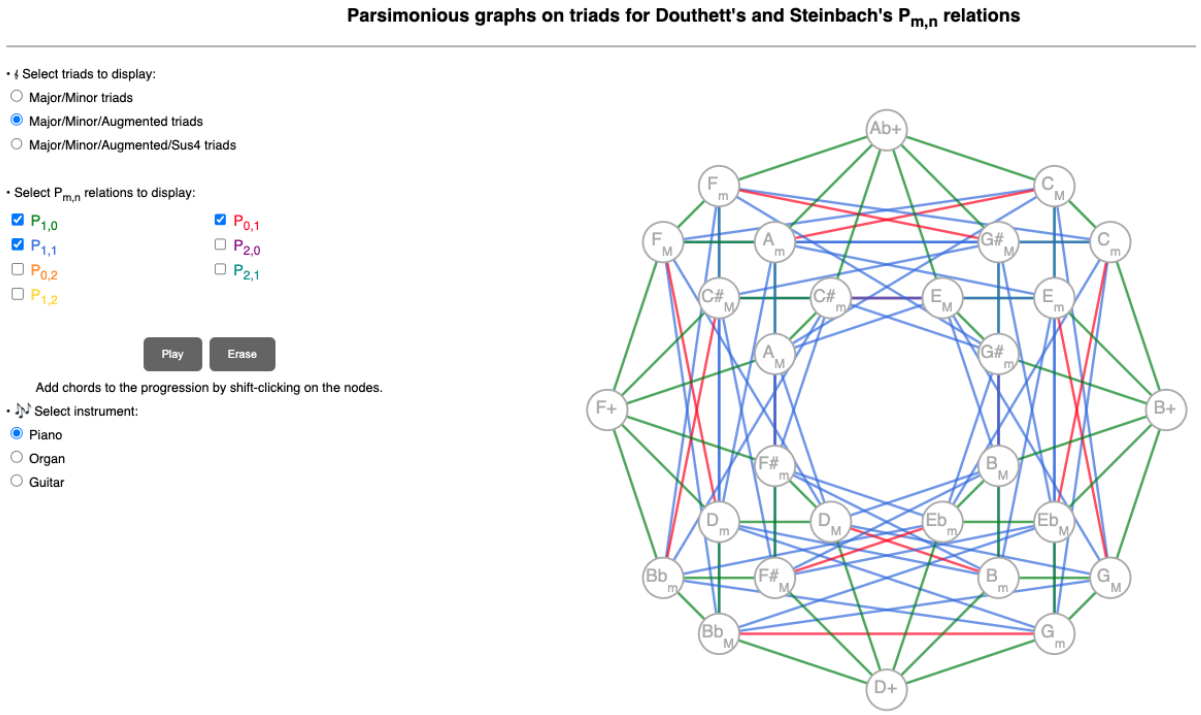


Figure 21 : un aperçu de l'environnement web permettant de représenter le graphe des accords majeurs, mineurs et augmentés avec les trois relations P1,0, P0,1 et P1,1.

Une telle approche ouvre des perspectives très intéressantes pour l'analyse musicale et la composition. Dans le cas du morceau *Take a bow* des Muse, par exemple, la progression

[21] Cette approche a permis, par exemple, de généraliser le Tonnetz et les transformations R, P et L à des accords de septième et d'étudier les propriétés algébriques du nouveau Tonnetz en tant que graphe abstrait. Voir, en particulier, la thèse de doctorat de Sonia Cannas (2018).
[22] https://alexpof.github.io/interactive_mathmusic/Pmn_graphs/pmn_graphs.html

harmonique alternant accords majeurs, augmentés et mineurs peut être représentée comme un parcours à l'intérieur du Cube Dance (Figure 22).

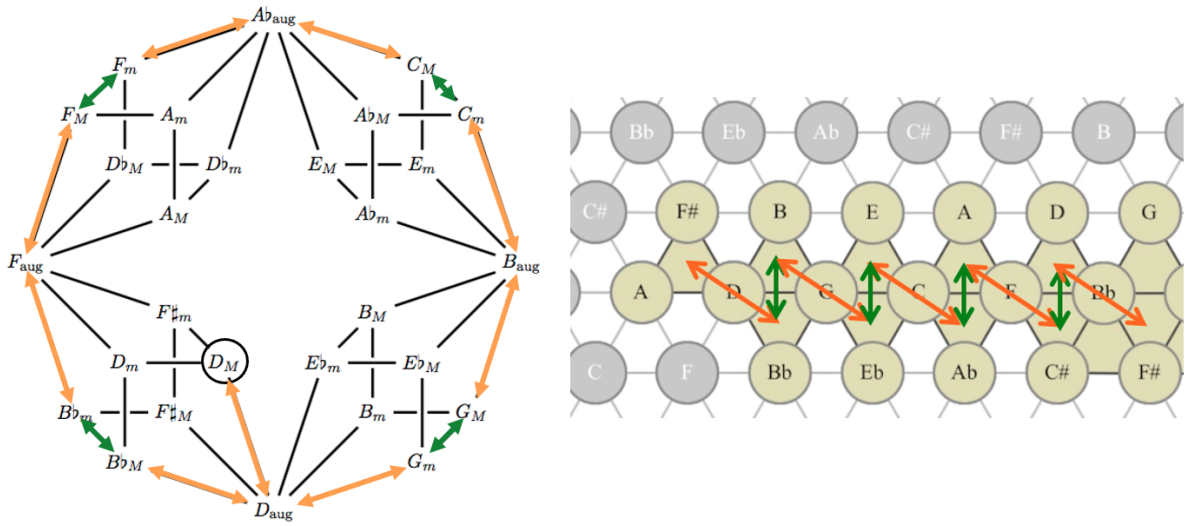


Figure 22 : une portion de la progression harmonique à la base de *Take a bow* du groupe Muse vue à la fois comme un chemin fermé dans le Cube Dance (à gauche) et comme une trajectoire spatiale dans le Tonnetz (à droite).

L'exemple précédent est également intéressant en ce qui concerne le caractère semi-hamiltonien de la suite d'accords utilisée par Muse. Bien que la progression harmonique ne soit pas formellement de type hamiltonien, plusieurs accords - comme l'accord de D augmenté dans l'extrait analysé - étant répétés, il y a indéniablement chez les auteurs de *Take a bow* l'intention d'instaurer un principe de modulation tout au long de la pièce permettant de toucher un nombre considérables d'accords différents dans l'espace de quelques minutes. On peut s'inspirer de ce procédé, ainsi que d'autres progressions harmoniques ayant un parfum de 'hamiltonicité' pour explorer et appliquer au Cube Dance les techniques compositionnelles basées sur les cycles hamiltoniens que nous avons évoquées précédemment. A titre d'exemple de cette démarche, on peut citer le cas de la chanson *The Gunner's Dream* de Roger Waters (dans l'album *The Final Cut*), dont les quatre premiers accords constituent le début d'un parcours harmonique qui peut servir comme base pour une harmonisation « hamiltonienne » du morceau originel. De plus, on peut trouver deux autres cycles hamiltoniens permettant de recouvrir entièrement tous les accords de la pièces en les modifiant en accord avec le caractère « hamiltonien » des trois cycles (Figure 23)[23].

[23] Le lecteur intéressé à écouter le résultat de cet exercice d'harmonisation pourra visionner l'animation réalisée par Gilles Baroin à partir du Cube Dance et de l'hypersphère des accords et disponible à l'adresse :
https://www.youtube.com/watch?v=nz5TYob02B4&ab_channel=MatheMusic4D

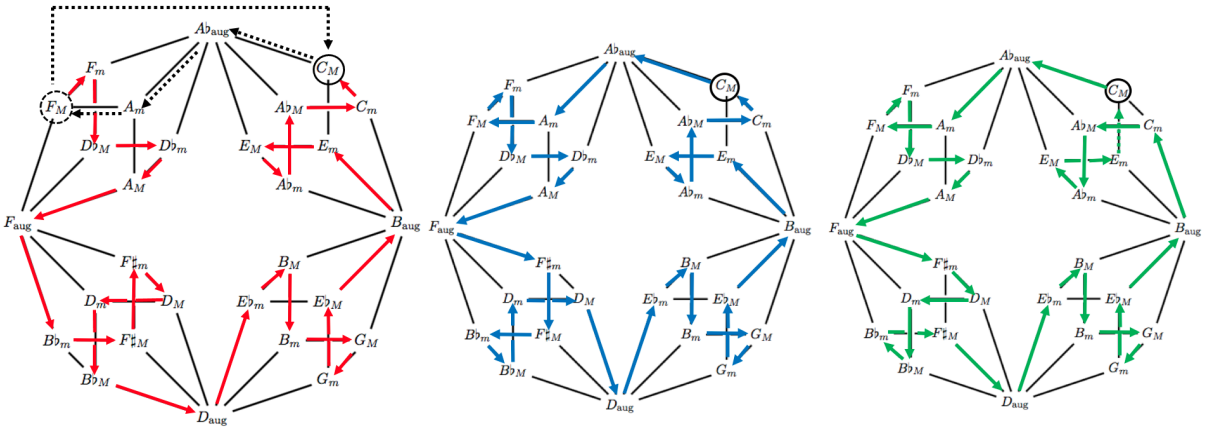

Figure 23 : exercice d'harmonisation de la chanson *The Gunner's Dream* de Roger Waters utilisant trois cycles hamiltoniens dans le Cube Dance.

# 7. Conclusions

En guise de conclusion de ce travail consacré aux aspects analytiques et compositionnels de l'étude des progressions harmoniques dans des espaces de hauteurs, nous aimerions mentionner quelques axes de recherche particulièrement prometteurs et qui prolongent tout naturellement les problématiques abordées dans cet article. L'une des extensions actuellement parmi les plus intéressantes concerne le travail d'analyse automatique du style à travers des approches topologiques. Comme nous avons pu le montrer, l'analyse automatique du style basée sur les propriétés de compacité de trajectoires dans les différents Tonnetze offre un premier critère de classification qui peut être amélioré grâce à des outils plus fins issus du domaine de la *Topological Data Analysis* (TDA). Parmi ces outils, l'*homologie persistante* (PH) et la *morphologie mathématique* (MM) constituent deux approches complémentaires extrêmement prometteuses. Issues toutes les deux du domaine de l'analyse d'images, la PH et la MM ont montré l'intérêt de coupler l'approche topologique avec des formalisations algébriques basées sur la théorie des treillis. Cela a notamment permis de proposer une approche structurelle dans la recherche d'information musicale (*structural music information retrieval*), tout en utilisant des approches *symboliques* qui sont couramment employés au sein de la communauté du traitement du signal, en particulier la Transformée de Fourier discrète (DFT). A partir des travaux précurseurs d'Emmanuel Amiot sur l'utilisation de la DFT pour la représentation algébrique des structures musicales, en particulier à travers le concept d'espace des phases[24], un nouveau territoire semble se dessiner dans lequel des approches topologiques, algébriques ou basées sur des structures partiellement ordonnées peuvent permettre une meilleure compréhension des espaces géométriques et de leur pertinence en analyse et composition musicales[25].

---

[24] Voir l'ouvrage monographique Amiot E. (2016), *Music Through Fourier Space: Discrete Fourier Transform in Music Theory*, Springer.

[25] Trois thèses de doctorat sont actuellement en cours sur ces approches. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux présentations que les trois doctorants ont faites de leur démarche respective lors de l'édition 2022 de la conférence *Mathematics and Computation in Music* (Callet, 2022 ; Lascabettes et al. 2022 ; Romero et al., 2022).

# 8. Bibliographie


Albini, G., Antonini, S. (2009), « Hamiltonian Cycles in the Topological Dual of the Tonnetz ». In: Chew, E., Childs, A., Chuan, CH. (eds) Mathematics and Computation in Music. MCM 2009. Communications in Computer and Information Science, vol 38. Springer, Berlin, Heidelberg

Andreatta M. (2014), « Math'n pop : symétries et cycles hamiltoniens en chanson », Tangente (numéro spécial consacré à la création en mathématique), n° 51, p. 92-97.

Andreatta M., M. Granger, T. Johnson et V. Villenave (2018), « Music, mathematics and language: chronicles from the Oumupo sandbox », in Kapoula Z., E. Volle, J. Renoult, M. Andreatta (eds), Exploring Trandisciplinarity in Art and Science, Springer, p. 255-274.

Andreatta M. (2021a), « Approches diagrammatiques en musicologie computationnelle », in F. Jedrzejewski, C. Lobo et A. Soulez (dir.), *Ecrire comme composer : le rôle des diagrammes,* Delatour France, 2021, p. 15-30.

Andreatta M. (2021b), « Chanter les poètes avec (ou sans) les maths », *ATEM* (numéro spécial « Chanter les poètes » sous la direction d'Anne Cayuela et Caroline Bertoneche), 6(2), p. 1-14.

Bigo L., M. Andreatta (2015), « Topological Structures in Computer-Aided Music Analysis », in D. Meredith (ed.), *Computational Music Analysis*, Springer, p. 57-80.

Bigo L., D. Ghisi, A. Spicher, M. Andreatta (2015), « Representation of Musical Structures and Processes in Simplicial Chord Spaces », *Computer Music Journal*, vol. 39, n° 3, p. 9-24.

Callet, V. (2022), « Persistent Homology on Musical Bars », In: Montiel, M., Agustín-Aquino, O.A., Gómez, F., Kastine, J., Lluis-Puebla, E., Milam, B. (eds) Mathematics and Computation in Music. MCM 2022. Lecture Notes in Computer Science, vol 13267, p. 349-355.

Cannas S. (2018), *Geometric representation and algebraic formalization of musical structures*, thèse de doctorat, Université Pavie / Université de Strasbourg.

Catanzaro, M. J. (2011). Generalized tonnetze. Journal of Mathematics and Music, 5(2), 117-139.

Chouvel, J. M. (2011). Analyser l'harmonie–aux frontières de la tonalité. *Musurgia*, *18*(1), 65-81.

Chouvel, J-M. (2013) "Au-delà du système tonal.". Regards sur la tonalité. Gonnard, H. (Ed.), Éd. Delatour France, 2013.

Cohn, R. (1997). Neo-riemannian operations, parsimonious trichords, and their" tonnetz" representations. *Journal of Music Theory*, *41*(1), 1-66.

Cohn, R. (2012). *Audacious Euphony: Chromatic Harmony and the Triad's Second Nature*. OUP USA.

Forte, Allen (1973), *The Structure of Atonal Music*, Yale University Press.

Gollin, E. (1998). Some aspects of three-dimensional" tonnetze". *Journal of Music Theory*, 195-206.

Hook, J. (2020). Generic sequences and the generic Tonnetz. *Journal of Music Theory*, *64*(1), 63-103.

Douthett, J., Steinbach, P. (1998), « Parsimonious Graphs: A Study in Parsimony, Contextual Transformations, and Modes of Limited Transposition », *Journal of Music Theory*, Vol. 42, No. 2, Neo-Riemannian Theory, pp. 241-263

Lascabettes P., C. Agon, M. Andreatta, I. Bloch (2022), « Computational Analysis of Musical Structures Based on Morphological Filters », In: Montiel, M., Agustín-Aquino, O.A., Gómez, F., Kastine, J., Lluis-Puebla, E., Milam, B. (eds) Mathematics and Computation in Music. MCM 2022. Lecture Notes in Computer Science, vol 13267, p. 267-278.

Lévy, E. (1985), *A Theory of Harmony,* Albany, New York.

Mazzola, G. (2012). *The topos of music: geometric logic of concepts, theory, and performance*. Birkhäuser.

Gonzalo Romero-García, Isabelle Bloch, Carlos Agon. Mathematical Morphology Operators for Harmonic Analysis. MCM 2022 - 8th International Conference Mathematics and Computation in Music, Jun 2022, Atlanta, United States. pp.255-266,

Tymoczko, D. (2012). The generalized tonnetz. *Journal of Music Theory*, 1-52.