



HAL
open science

**Approximations de Tchebyshev d'un système
incompatible d'équations relationnelles floues de type
 $\max -T$
Ismaïl Baaj**

► **To cite this version:**

Ismaïl Baaj. Approximations de Tchebyshev d'un système incompatible d'équations relationnelles floues de type $\max -T$. Rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications 2023, Nov 2023, Bourges, France. pp.101-108. hal-04306807

HAL Id: hal-04306807

<https://hal.science/hal-04306807v1>

Submitted on 25 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Approximations de Tchebyshev d'un système incompatible d'équations relationnelles floues de type $\max - T$

Ismaïl Baaj

Univ. Artois, CNRS, CRIL, F-62300 Lens, France

baaj@cril.fr

Résumé :

Dans cet article, nous étudions l'incompatibilité d'un système d'équations relationnelles floues de type $\max - T$ noté $(S) : A \square_T^{\max} x = b$ où T est une t-norme parmi le minimum, le produit ou celle de Lukasiewicz, A est une matrice et b est le vecteur-colonne utilisé comme second membre du système (S) . Pour chaque t-norme, nous donnons une formule analytique qui permet de calculer la distance de Tchebyshev $\Delta = \inf_{c \in \mathcal{C}} \|b - c\|$ associé au second membre b d'un système incompatible (S) , où \mathcal{C} est l'ensemble des seconds membres des systèmes consistents définis avec la même matrice A . Ces formules sont calculées à partir des composantes de A et b . À partir de Δ , nous calculons explicitement la plus grande approximation de Tchebyshev de b notée c , i.e $\|b - c\| = \Delta$ et le système $A \square_T^{\max} x = c$ est compatible. Nous concluons en proposant quelques applications de nos résultats.

Mots-clés :

Systèmes d'équations relationnelles floues ; Distance de Tchebyshev.

Abstract:

In this article, we study the inconsistency of a system of $\max - T$ fuzzy relational equations denoted $(S) : A \square_T^{\max} x = b$ where T is a t-norm among the minimum, the product or the one of Lukasiewicz, A is a matrix and b is the column vector used as the second member of the system (S) . For each t-norm, we give an analytical formula that allows us to compute the Chebyshev distance $\Delta = \inf_{c \in \mathcal{C}} \|b - c\|$ associated to the second member b of an inconsistent system (S) , where \mathcal{C} is the set of second members of consistent systems defined with the same matrix A . These formulas are computed from the components of A and b . From Δ , we explicitly compute the greatest Chebyshev approximation of b denoted c , i.e $\|b - c\| = \Delta$ and the system $A \square_T^{\max} x = c$ is consistent. We conclude by proposing some applications of our results.

Keywords:

Systems of fuzzy relational equations ; Chebyshev distance

1 Introduction

De nombreux auteurs ont souligné la pertinence des équations relationnelles floues pour certaines applications d'Intelligence Artificielle (IA) [4, 7, 8, 9]. L'émergence de ces applications a été rendue possible par les travaux pion-

niers de Sanchez sur la résolution d'un système d'équations relationnelles floues de type $\max - \min$ [16]. Sanchez a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système d'équations relationnelles floues de type $\max - \min$ soit compatible, c'est-à-dire qu'il ait des solutions. Dans [17], il a également montré que, si le système est compatible, il existe une plus grande solution et un nombre fini de solutions minimales, ce qui lui a permis de décrire complètement l'ensemble des solutions du système.

Cependant, l'incompatibilité de ces systèmes reste un problème difficile à résoudre [4, 8, 11, 15]. De nombreux auteurs ont abordé la question de la recherche de solutions approximatives [5, 8, 11, 15, 19]. Parmi ces travaux, une idée pionnière a été introduite par Pedrycz dans [15]. Étant donné un système incompatible, Pedrycz propose de modifier de façon minimale son second membre pour le rendre compatible. Cuninghame-Green et Cechlárová [5] et Li et Fang [11] ont chacun proposé un algorithme pour calculer la distance minimale $\Delta = \inf_{c \in \mathcal{C}} \|b - c\|$, exprimée avec la norme L_∞ , où b est le second membre d'un système d'équations relationnelles floues de type $\max - \min$ et \mathcal{C} est l'ensemble des seconds membres des systèmes compatibles définis avec la même matrice : celle du système incompatible. Cette distance minimale est appelée distance de Tchebyshev associée au second membre d'un système incompatible. Tous les travaux mentionnés ci-dessus (et d'autres) ne permettent d'obtenir qu'une valeur approchée de la distance de Tchebyshev.

Dans cet article, pour un système d'équations

relationnelles floues de type $\max -T$ où T est une t-norme parmi le minimum, le produit et celle de Lukasiewicz et dont la matrice et le second membre sont respectivement notés A et b , nous donnons pour chacun des trois cas, une formule analytique explicite pour calculer la distance de Tchebyshev associée à son second membre b . La distance de Tchebyshev est notée $\Delta = \Delta(A, b)$ et est obtenue par *des calculs élémentaires* qui ne font intervenir que les coefficients de la matrice A et ceux du second membre b .

Les preuves des résultats présentés sont disponibles dans [2, 3] et reposent sur la résolution d'inéquations associées à chacun des trois systèmes. L'introduction de ces inéquations est justifiée par la généralisation d'un résultat fondamental de Cuninghame-Green et Ceclárová pour la norme *min* [5] au cas des deux normes *produit* et celle de Lukasiewicz. Ces deux généralisations que nous établissons s'expriment à l'aide d'une application F que nous introduisons. Elles permettent d'obtenir une formule analytique explicite pour calculer la distance de Tchebyshev Δ .

L'article est structuré comme suit. La Section 2 est consacrée à quelques rappels sur les systèmes d'équations relationnelles floues de type $\max -T$. Dans la Section 3, nous introduisons notre application F qui permet de tester si un système défini par une matrice fixée et un vecteur donné qui est utilisé comme second membre, est un système compatible. Dans la Section 4, nous développons des calculs préliminaires. Ces calculs seront utilisés dans la Section 5 pour donner les formules analytiques explicites pour calculer les distances de Tchebyshev associées aux systèmes de type $\max -T$, dans le cas où T est la t-norme minimum, la t-norme produit ou la t-norme de Lukasiewicz. Enfin, nous illustrons nos résultats par un exemple et nous concluons avec quelques perspectives.

2 Rappels

Dans ce qui suit, nous commençons par introduire quelques notations et rappelons la définition et les propriétés d'une t-norme continue T et de son implicateur résiduel associé \mathcal{I}_T . Nous rappelons ensuite les résultats classiques portant sur la résolution des systèmes d'équations relationnelles floues de type $\max -T$.

2.1 Notations

L'ensemble $[0, 1]^{n \times m}$ est l'ensemble des matrices de taille (n, m) i.e., n lignes et m colonnes, à coefficients dans $[0, 1]$. L'ensemble $[0, 1]^{n \times 1}$ est l'ensemble des vecteur-colonnes de n composantes et l'ensemble $[0, 1]^{1 \times m}$ est l'ensemble des matrices lignes de m composantes.

La relation d'ordre \leq sur l'ensemble $[0, 1]^{n \times m}$ est définie par :

$$A \leq B \quad \text{ssi on a } a_{ij} \leq b_{ij},$$

$$\text{pour tout } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m,$$

$$\text{où } A = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \quad \text{et } B = [b_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}.$$

Pour $x, y, z, u, \delta \in [0, 1]$, on pose :

$$- x^+ = \max(x, 0),$$

$$- \bar{z}(\delta) = \min(z + \delta, 1),$$

$$- \underline{z}(\delta) = \max(z - \delta, 0) = (z - \delta)^+$$

et on a l'équivalence suivante dans $[0, 1]$:

$$|x - y| \leq \delta \iff \underline{x}(\delta) \leq y \leq \bar{x}(\delta). \quad (1)$$

À un vecteur-colonne $b = [b_i]_{1 \leq i \leq n}$ et un nombre $\delta \in [0, 1]$, on associe deux vecteur-colonnes :

$$\underline{b}(\delta) = [(b_i - \delta)^+]_{1 \leq i \leq n}, \quad (2a)$$

$$\bar{b}(\delta) = [\min(b_i + \delta, 1)]_{1 \leq i \leq n}. \quad (2b)$$

L'équivalence (1) dans $[0, 1]$ entraîne l'équivalence dans $[0, 1]^{n \times 1}$ suivante. Pour tout $c = [c_i]_{1 \leq i \leq n} \in [0, 1]^{n \times 1}$:

$$\|b - c\| \leq \delta \iff \underline{b}(\delta) \leq c \leq \bar{b}(\delta) \quad (3)$$

$$\text{où } \|b - c\| = \max_{1 \leq i \leq n} |b_i - c_i|.$$

2.2 T-normes et leurs implicateurs résiduels associés

Une norme triangulaire (t-norme, voir [10]) est une application $T : [0, 1] \times [0, 1] \mapsto [0, 1]$, qui satisfait :

- T est commutative :

$$T(x, y) = T(y, x),$$

- T est associative :

$$T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z),$$

- T est croissante :

$$x \leq x' \text{ et } y \leq y' \implies T(x, y) \leq T(x', y')$$

- T admet 1 comme élément neutre :

$$T(x, 1) = x.$$

À la t-norme T est associée l'implicateur résiduel $\mathcal{I}_T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] : (x, y) \mapsto \mathcal{I}_T(x, y) = \sup\{z \in [0, 1] \mid T(x, z) \leq y\}$.

Les principales propriétés de l'implicateur résiduel \mathcal{I}_T associée à une t-norme continue T sont les suivantes. Pour tout $a, b \in [0, 1]$, on a :

- $\mathcal{I}_T(a, b) = \max\{z \in [0, 1] \mid T(a, z) \leq b\}$. Donc, $T(a, \mathcal{I}_T(a, b)) \leq b$.
- \mathcal{I}_T est continue à gauche et décroissante en son premier argument ainsi que continue à droite et croissante en son second argument.
- Pour tout $z \in [0, 1]$, on a :

$$T(a, z) \leq b \iff z \leq \mathcal{I}_T(a, b).$$

- On a $b \leq \mathcal{I}_T(a, T(a, b))$.

La t-norme min notée $T_M(x, y) = \min(x, y)$, a comme implicateur résiduel l'implication de Gödel \mathcal{I}_{T_M} :

$$\mathcal{I}_{T_M}(x, y) = x \xrightarrow{G} y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x > y \end{cases}. \quad (4)$$

La t-norme définie par le produit est notée $T_P(x, y) = x \cdot y$. L'implicateur résiduel qui lui est associée est l'implication de Goguen :

$$\mathcal{I}_{T_P}(x, y) = x \xrightarrow{GG} y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ \frac{y}{x} & \text{si } x > y \end{cases}. \quad (5)$$

À la t-norme de Łukasiewicz $T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0) = (x + y - 1)^+$ est associée l'implication de Łukasiewicz, qui est son implicateur résiduel :

$$\mathcal{I}_{T_L}(x, y) = x \rightarrow_L y = \min(1 - x + y, 1). \quad (6)$$

2.3 Résoudre les systèmes d'équations relationnelles floues de type $\max - T$

Un système d'équations relationnelles floues de type $\max - T$ basé sur une matrice $A = [a_{ij}] \in [0, 1]^{n \times m}$ de taille (n, m) et un vecteur $b = [b_i] \in [0, 1]^{n \times 1}$ de n composantes, est de la forme suivante :

$$(S) : A \square_T^{\max} x = b, \quad (7)$$

où $x = [x_j]_{1 \leq j \leq m} \in [0, 1]^{m \times 1}$ est un vecteur inconnu de m composantes et l'opérateur \square_T^{\max} est le produit matriciel qui utilise la t-norme T pour le produit et \max pour l'addition.

À partir du vecteur

$$e = A^t \square_{\mathcal{I}_T}^{\min} b, \quad (8)$$

où A^t est la transposée de A et le produit matriciel $\square_{\mathcal{I}_T}^{\min}$ utilise l'implicateur résiduel \mathcal{I}_T (associé à T) pour le produit et \min pour l'addition, nous avons l'équivalence suivante :

Le système (S) est compatible $\iff A \square_T^{\max} e = b$.

Si le système (S) est compatible, le vecteur e est sa plus grande solution. L'équivalence a été prouvée par Sanchez pour la composition $\max - \min$ [16], et étendue à la composition $\max - T$ par Pedrycz [13, 14] et Miyakoshi et Shimbo [12].

3 Distance de Tchebyshev associée au second membre d'un système d'équations relationnelles floues de type $\max - T$

À toute matrice $A = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in [0, 1]^{n \times m}$, nous associons une application notée

F qui permet de vérifier si un système d'équations relationnelles floues de type $\max - T$ défini par A et un vecteur donné $c \in [0, 1]^{n \times 1}$ utilisé comme second membre, est un système compatible :

$$\begin{aligned} F : [0, 1]^{n \times 1} &\longrightarrow [0, 1]^{n \times 1} \\ : c &\mapsto A \square_T^{\max} (A^t \square_{\mathcal{I}_T}^{\min} c) \\ : c = [c_i] &\mapsto F(c) = [F(c)_i] \end{aligned} \quad (9)$$

où $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$F(c)_i = \max_{1 \leq j \leq m} T(a_{ij}, \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{I}_T(a_{kj}, c_k)).$$

Les propriétés suivantes de F sont utilisées dans les preuves de nos résultats (voir [2, 3] pour plus de détails) :

Proposition 1

1. $\forall c \in [0, 1]^{n \times 1}$, $F(c) \leq c$.
2. Pour tout vecteur $c \in [0, 1]^{n \times 1}$, on a :

$$F(c) = c \iff \text{Le système } A \square_T^{\max} x = c \text{ est compatible.}$$

3. F est idempotente i.e.,

$$\forall c \in [0, 1]^{n \times 1}, F(F(c)) = F(c).$$

4. F est croissante et continue à droite.

L'application F est continue à droite en un point $c \in [0, 1]^{n \times 1}$ signifie : pour toute suite $(c^{(k)})$ dans $[0, 1]^{n \times 1}$ tel que $(c^{(k)})$ converge vers c quand $k \rightarrow \infty$ et vérifiant $\forall k, c^{(k)} \geq c$, on a : $F(c^{(k)}) \rightarrow F(c)$ quand $k \rightarrow \infty$.

À la matrice A du système (S) , voir (7), on associe l'ensemble des vecteurs $c = [c_i] \in [0, 1]^{n \times 1}$ tel que le système $A \square_T^{\max} x = c$ est compatible :

$$\mathcal{C} = \{c = [c_i] \in [0, 1]^{n \times 1} \mid A \square_T^{\max} x = c \text{ est compatible}\}. \quad (10)$$

L'ensemble \mathcal{C} est non-vide, car le vecteur nul appartient à \mathcal{C} . Cet ensemble nous permet de définir la distance de Tchebyshev associée au second membre b du système (S) .

Definition 1 La distance de Tchebyshev associée au second membre b du système (S) : $A \square_T^{\max} x = b$ est :

$$\Delta = \Delta(A, b) = \inf_{c \in \mathcal{C}} \|b - c\| \quad (11)$$

où $\|b - c\| = \max_{1 \leq i \leq n} |b_i - c_i|$.

Nous établissons pour la composition $\max - T$ le résultat fondamental suivant, prouvé pour la composition $\max - \min$ dans [5] :

Théorème 1

$$\Delta = \min\{\delta \in [0, 1] \mid \underline{b}(\delta) \leq F(\bar{b}(\delta))\}. \quad (12)$$

Nous définissons l'ensemble des approximations de Tchebyshev de b :

Definition 2 L'ensemble des approximations de Tchebyshev de b est défini en utilisant l'ensemble \mathcal{C} , voir (10), et la distance de Tchebyshev associée à b (Definition 1) :

$$\mathcal{C}_b = \{c \in \mathcal{C} \mid \|b - c\| = \Delta(A, b)\}. \quad (13)$$

On a :

Corollaire 1 $F(\bar{b}(\Delta)) \in \mathcal{C}_b$ est la plus grande approximation de Tchebyshev de b du système (S) .

Corollaire 2 $e = A^t \square_{\mathcal{I}_T}^{\min} \bar{b}(\Delta)$ est la plus grande solution du système $A \square_T^{\max} x = F(\bar{b}(\Delta))$. Le vecteur e est la plus grande solution approchée du système incompatible (S) .

En conséquence, nous avons :

Corollaire 3

$$\Delta = \min_{c \in \mathcal{C}} \|b - c\|.$$

$$\Delta = 0 \iff \text{le système } (S) \text{ est compatible.}$$

Par conséquent, $\Delta = 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour que le système (S) soit compatible.

4 Calculs préliminaires

Dans cette section, nous résolvons quatre équations. Les deux premières seront utilisées pour établir la formule analytique pour calculer la distance de Tchebyshev associée au second membre d'un système d'équations relationnelles floues de type $\max - T$ lorsque la t-norme est le min, c'est-à-dire $T = T_M$. La preuve de la formule de calcul de la distance de Tchebyshev lorsque la t-norme est le produit usuel $T = T_P$ reposera sur la résolution de la troisième inéquation. La dernière inéquation est utilisée dans le cas de la t-norme de Lukasiewicz, c'est-à-dire $T = T_L$.

On utilise des notations introduites dans (Section 2). Soit $x, y, z, u \in [0, 1]$ fixés.

4.1 T-norme min

Pour la t-norme min, nous voulons obtenir la plus petite valeur de $\delta \in [0, 1]$ vérifiant l'inéquation suivante :

$$(x - \delta)^+ \leq y. \quad (14)$$

Proposition 2 Pour tout $\delta \in [0, 1]$, on a :

$$(x - \delta)^+ \leq y \iff (x - y)^+ \leq \delta. \quad (15)$$

On déduit que l'on a :

$$(x - y)^+ = \min\{\delta \in [0, 1] \mid (x - \delta)^+ \leq y\}.$$

Étudions la résolution d'une inéquation faisant intervenir l'implication de Gödel \rightarrow_G , voir (4) :

$$\underline{x}(\delta) \leq y \rightarrow_G \bar{z}(\delta), \quad (16)$$

$$\text{où : } y \rightarrow_G \bar{z}(\delta) = \begin{cases} 1 & \text{si } y - z \leq \delta \\ z + \delta & \text{si } y - z > \delta \end{cases}.$$

Soit :

$$\sigma_G(x, y, z) = \min\left(\frac{(x - z)^+}{2}, (y - z)^+\right). \quad (17)$$

Alors on a :

Proposition 3 Pour tout $\delta \in [0, 1]$, on a :

$$\underline{x}(\delta) \leq y \rightarrow_G \bar{z}(\delta) \iff \sigma_G(x, y, z) \leq \delta. \quad (18)$$

On déduit que l'on a :

Théorème 2

$$\sigma_G(x, y, z) = \min\{\delta \in [0, 1] \mid \underline{x}(\delta) \leq y \rightarrow_G \bar{z}(\delta)\}.$$

4.2 T-norme produit

Pour la t-norme produit T_P , nous étudions l'inéquation suivante qui fait intervenir l'implication de Goguen \xrightarrow{GG} (voir (5)), pour $\delta \in [0, 1]$:

$$\underline{x}(\delta) \leq u \cdot (y \xrightarrow{GG} \bar{z}(\delta)) \quad (19)$$

$$\text{où } y \xrightarrow{GG} \bar{z}(\delta) = \begin{cases} 1 & \text{si } y - z \leq \delta \\ \frac{z + \delta}{y} & \text{si } y - z > \delta \end{cases}.$$

Nous recherchons la plus petite valeur de δ pour que l'inéquation (19) soit vraie.

Soit :

$$\sigma_{GG}(u, x, y, z) = \max[(x - u)^+, \min(\varphi(u, x, y, z), (y - z)^+)] \quad (20)$$

$$\text{où } \varphi(u, x, y, z) = \begin{cases} \frac{(x \cdot y - u \cdot z)^+}{u + y} & \text{si } u > 0 \\ x & \text{si } u = 0 \end{cases}.$$

Proposition 4 Pour tout $\delta \in [0, 1]$, on a :

$$\underline{x}(\delta) \leq u \cdot (y \xrightarrow{GG} \bar{z}(\delta)) \iff \sigma_{GG}(u, x, y, z) \leq \delta.$$

Nous en déduisons immédiatement :

Théorème 3 Pour tout $x, y, z, u \in [0, 1]$, on a :

$$\sigma_{GG}(u, x, y, z) = \min\{\delta \in [0, 1] \mid \underline{x}(\delta) \leq u \cdot (y \xrightarrow{GG} \bar{z}(\delta))\}.$$

4.3 T-norme de Lukasiewicz

Pour la t-norme de Lukasiewicz T_L , nous étudions une inéquation utilisant l'implication de Lukasiewicz \rightarrow_L (voir (6)) pour $\delta \in [0, 1]$:

$$\underline{x}(\delta) \leq \max(0, y \rightarrow_L \bar{z}(\delta) - u), \quad (21)$$

où

$$y \rightarrow_L \bar{z}(\delta) = \begin{cases} 1 & \text{si } y - z \leq \delta \\ 1 - y + z + \delta & \text{si } y - z > \delta \end{cases}.$$

Soit $v = x + u - 1$ et :

$$\sigma_L(u, x, y, z) = \min\left(x, \max\left(v^+, \frac{(v + y - z)^+}{2}\right)\right). \quad (22)$$

Alors on a :

Proposition 5 Pour tout $\delta \in [0, 1]$, on a :

$$\underline{x}(\delta) \leq \max(0, y \rightarrow_L \bar{z}(\delta) - u) \iff \sigma_L(u, x, y, z) \leq \delta.$$

On déduit immédiatement :

Théorème 4 Pour tout $x, y, z, u \in [0, 1]$, on a :

$$\sigma_L(u, x, y, z) = \min\{\delta \in [0, 1] \mid \underline{x}(\delta) \leq \max(0, y \rightarrow_L \bar{z}(\delta) - u)\}.$$

5 Formules analytiques explicites pour calculer la distance de Tchebyshev associée au second membre pour les systèmes d'équations relationnelles floues de type $\max - T$

Dans ce qui suit, en utilisant (Théorème 1), nous donnons les formules analytiques explicites des distances de Tchebyshev associées aux systèmes d'équations relationnelles floues de type $\max - T$.

Pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, l'expression de l'inéquation $\underline{b}(\delta)_i \leq F(\bar{b}(\delta))_i$ figurant dans le (Théorème 1) est :

$$\begin{aligned} \underline{b}(\delta)_i &\leq F(\bar{b}(\delta))_i \\ &= \max_{1 \leq j \leq m} T(a_{ij}, \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{I}_T(a_{kj}, \bar{b}(\Delta)_k)). \end{aligned}$$

Nous remarquons que selon la t-norme T utilisée, les inéquations traitées dans la section précédentes, i.e., (14) et (16) lorsque $T = T_M$ est le min, (19) lorsque $T = T_P$ est le produit usuel

et (21) quand $T = T_L$ est la t-norme de Lukasiewicz, interviennent dans la résolution de l'inéquation ci-dessous.

Si $T = T_M$ est la t-norme min, la formule pour calculer la distance de Tchebyshev associée au second membre b du système d'équations relationnelles floues $A \square_{T_M}^{\max} x = b$ est :

Théorème 5

$$\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i$$

où pour $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\delta_i = \min_{1 \leq j \leq m} \max[(b_i - a_{ij})^+, \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_G(b_i, a_{kj}, b_k)].$$

Voir (17) pour la définition de σ_G .

Si $T = T_P$ est le produit usuel, la formule utilise σ_{GG} , voir (20) :

Théorème 6

$$\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i$$

où pour $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\delta_i = \min_{1 \leq j \leq m} \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_{GG}(a_{ij}, b_i, a_{kj}, b_k).$$

Si $T = T_L$ i.e., la t-norme de Lukasiewicz, la formule utilise σ_L , voir (22) :

Théorème 7

$$\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i$$

où pour tout $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\delta_i = \min_{1 \leq j \leq m} \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_L(1 - a_{ij}, b_i, a_{kj}, b_k).$$

Nous illustrons ces résultats :

Exemple 1 Nous reprenons la matrice et le vecteur suivants, utilisés dans [5, 11, 15] :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.5 & 0.7 \\ 0.7 & 0.5 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 1 & 1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.8 \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 1 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pour le système $A \square_{T_M}^{\max} x = b$, où T_M est la t -norme min, on calcule (Théorème 5) :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \min(0.2, 0.2, 0.2, 0.2) = 0.2, \\ \delta_2 &= \min(0.4, 0.5, 0.7, 0.5) = 0.4, \\ \delta_3 &= \min(0.1, 0.1, 0.1, 0.1) = 0.1, \\ \delta_4 &= \min(0.0, 0.0, 0.0, 0.0) = 0.0. \end{aligned}$$

La distance de Tchebyshev associée à b est $\Delta = \max(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = 0.4$. On calcule

$$\bar{b}(\Delta) = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \\ 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} \text{ et } F(\bar{b}(\Delta)) = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.7 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix} \text{ est la plus}$$

grande approximation de Tchebyshev de b , donc le système $A \square_{T_M}^{\max} x = F(\bar{b}(\Delta))$ est compatible.

Pour le système $A \square_{T_P}^{\max} x = b$ qui utilise la t -norme produit T_P , on calcule (Théorème 6) :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \min(0.11, 0.23, 0.2, 0.21) = 0.11, \\ \delta_2 &= \min(0.42, 0.6, 0.72, 0.62) = 0.42, \\ \delta_3 &= \min(0.13, 0.07, 0.07, 0.11) = 0.07, \\ \delta_4 &= \min(0.0, 0.0, 0.0, 0.0) = 0.0. \end{aligned}$$

Donc on a $\Delta = 0.42$. On calcule $\bar{b}(\Delta) =$

$$\begin{bmatrix} 0.82 \\ 1 \\ 0.62 \\ 0.42 \end{bmatrix} \text{ et } F(\bar{b}(\Delta)) = \begin{bmatrix} 0.82 \\ 0.57 \\ 0.62 \\ 0.42 \end{bmatrix} \text{ est la plus}$$

grande approximation de Tchebyshev de b , donc le système $A \square_{T_P}^{\max} x = F(\bar{b}(\Delta))$ est compatible.

Si on utilise la t -norme de Lukasiewicz T_L , on

calcule (Théorème 7) :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \min(0, 0.4, 0.35, 0.25) = 0, \\ \delta_2 &= \min(0.45, 0.65, 0.75, 0.65) = 0.45, \\ \delta_3 &= \min(0.2, 0, 0, 0.2) = 0, \\ \delta_4 &= \min(0, 0, 0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Donc on obtient $\Delta = 0.45$. On calcule : $\bar{b}(\Delta) =$

$$\begin{bmatrix} 0.85 \\ 1 \\ 0.65 \\ 0.45 \end{bmatrix} \text{ et } F(\bar{b}(\Delta)) = \begin{bmatrix} 0.85 \\ 0.55 \\ 0.65 \\ 0.45 \end{bmatrix} \text{ est la plus}$$

grande approximation de Tchebyshev de b , donc le système $A \square_{T_L}^{\max} x = F(\bar{b}(\Delta))$ est compatible.

6 Conclusion

Dans cet article, pour chacun des trois systèmes d'équations relationnelles floues $A \square_T^{\max} x = b$ de type $\max - T$, où T est une t -norme parmi le minimum, le produit et celle de Lukasiewicz, nous avons donné une formule analytique explicite pour calculer la distance de Tchebyshev Δ associée à son second membre b . Nous avons également calculé la plus grande approximation de Tchebyshev de b et la plus grande solution approchée (Corollaire 2) du système $A \square_T^{\max} x = b$.

En perspective, on peut étudier la structure de l'ensemble des solutions approchées du système initial et celle de l'ensemble des approximations de Tchebyshev du second membre b (dans [3], nous avons traité le cas de la t -norme min).

Ce travail peut être utile pour résoudre les problèmes d'incompatibilité des systèmes $\max - T$ intervenant dans l'apprentissage (voir les mémoires associatives dans [18], l'apprentissage de paramètres de règles possibilistes [1]), trouver des inverses approchés de matrices floues en utilisant la norme L_∞ (besoin mis en avant dans [19] pour de nombreuses applications pratiques), où pour des applications basées sur les systèmes $\max - T$, e.g. analyse spatial [6], problème de diagnostic [9].

Références

- [1] Baaj, I. 2022, «Apprentissage des paramètres des règles d'un système à base de règles possibilistes», dans *Rencontres francophones sur la logique floue et ses applications*, Rencontres francophones sur la logique floue et ses Applications 2022, Cepadues, Toulouse, France, p. 199–206.
- [2] Baaj, I. 2023, «Chebyshev distances associated to the second members of systems of Max-product/Lukasiewicz Fuzzy relational equations», *arXiv e-prints*, doi :10.48550/arXiv.2302.08554, arXiv :2302.08554.
- [3] Baaj, I. 2023, «Max-min Learning of Approximate Weight Matrices from Fuzzy Data», *arXiv e-prints*, doi :10.48550/arXiv.2301.06141, arXiv :2301.06141.
- [4] Baets, B. D. 2000, «Analytical solution methods for fuzzy relational equations», dans *Fundamentals of Fuzzy Sets*, Springer, p. 291–340.
- [5] Cuninghame-Green, R. et K. Ceclárová. 1995, «Residuation in fuzzy algebra and some applications», *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 71, n° 2, p. 227–239.
- [6] Di Martino, F. et S. Sessa. 2011, «Spatial analysis and fuzzy relation equations», *Advances in Fuzzy Systems*, vol. 2011, p. 6–6.
- [7] Di Nola, A., W. Pedrycz, S. Sessa et E. Sanchez. 1991, «Fuzzy relation equations theory as a basis of fuzzy modelling : An overview», *Fuzzy sets and systems*, vol. 40, n° 3, p. 415–429.
- [8] Di Nola, A., E. Sanchez, W. Pedrycz et S. Sessa. 1989, *Fuzzy relation equations and their applications to knowledge engineering*, Kluwer Academic Publishers.
- [9] Dubois, D. et H. Prade. 1995, «Fuzzy relation equations and causal reasoning», *Fuzzy sets and systems*, vol. 75, n° 2, p. 119–134.
- [10] Klement, E. P., R. Mesiar et E. Pap. 2013, *Triangular norms*, vol. 8, Springer Science & Business Media.
- [11] Li, P. et S.-C. Fang. 2010, «Chebyshev approximation of inconsistent fuzzy relational equations with max-t composition», dans *Fuzzy Optimization*, Springer, p. 109–124.
- [12] Miyakoshi, M. et M. Shimbo. 1985, «Solutions of composite fuzzy relational equations with triangular norms», *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 16, n° 1, p. 53–63, ISSN 0165-0114.
- [13] Pedrycz, W. 1982, «Fuzzy relational equations with triangular norms and their resolutions», *Busefal*, vol. 11, p. 24–32.
- [14] Pedrycz, W. 1985, «On generalized fuzzy relational equations and their applications», *Journal of mathematical Analysis and applications*, vol. 107, n° 2, p. 520–536.
- [15] Pedrycz, W. 1990, «Inverse problem in fuzzy relational equations», *Fuzzy Sets and systems*, vol. 36, n° 2, p. 277–291.
- [16] Sanchez, E. 1976, «Resolution of composite fuzzy relation equations», *Information and control*, vol. 30, n° 1, p. 38–48.
- [17] Sanchez, E. 1977, «Solutions in composite fuzzy relation equations : Application to medical diagnosis in brouwerian logic», dans *Fuzzy automata and decision processes*, édité par M. M. Gupta, G. N. Saridis et B. R. Gaines, Amsterdam : North-Holland, p. 221–234.
- [18] Sussner, P. et M. E. Valle. 2006, «Implicative fuzzy associative memories», *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 14, n° 6, p. 793–807.
- [19] Wen, C.-F., Y.-K. Wu et Z. Li. 2022, «Algebraic formulae for solving systems of max-min inverse fuzzy relational equations», *Information Sciences*, ISSN 0020-0255.