

Eule \mathbb{R} , Crame \mathbb{R} , D'Alembe \mathbb{R} t et les courbes singuliè \mathbb{R} es

Thierry JOFFREDO

Membre associé AHP-PRéST (Univ. de Lorraine / Univ. de Strasbourg / CNRS)
et HSM IMJ-PRG (Sorbonne Université / Université Paris Cité / CNRS)



« Je suis le premier qui ait démontré invinciblement l'existence de ces points, que d'habiles géomètres avoient attaquée, comme le savant M. Euler l'a reconnu dans les mém. de l'acad. de Berlin de 1750, pag. 112. »

D'Alembert, article REBROUSSEMENT, *Encyclopédie* vol. XIII p. 842,
<http://enccre.academie-sciences.fr/encyclopedie/article/v13-2324-0/>.

Plan

Les pRotagonistes

Des débuts contRariés

Épineuses RRecherches

Un détour : Le tRiangle analytique

Un bRouillamini épouvantable

Les protagonistes



Les protagonistes



Leonhard Euler
(1707-1783)



Les protagonistes



Leonhard Euler
(1707-1783)



Gabriel Cramer
(1704-1752)



Les protagonistes



Leonhard Euler
(1707-1783)

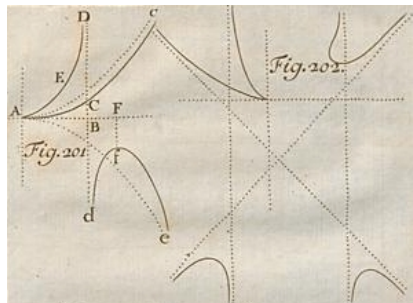


Gabriel Cramer
(1704-1752)



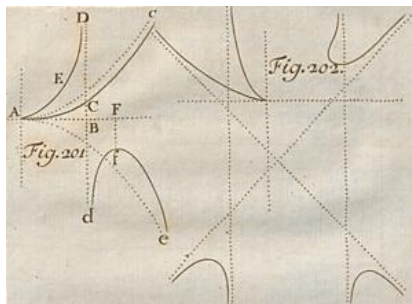
D'Alembert
(1717-1783)

Les protagonistes



Et...

Les protagonistes



Et...

le point de rebroussement de la seconde espèce
(1696- ?)

Plan

Les pRotagonistes

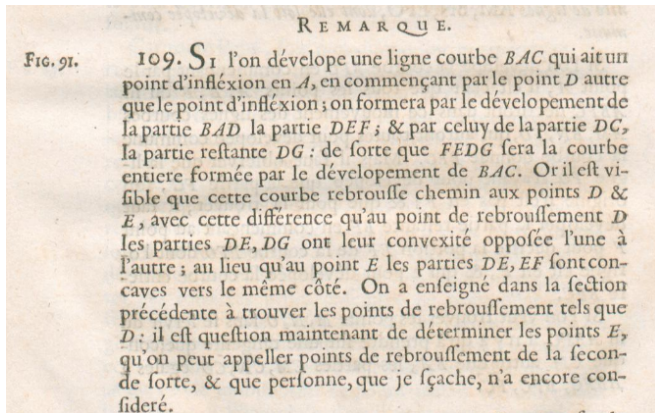
Des débuts contRariés

Épineuses RRecherches

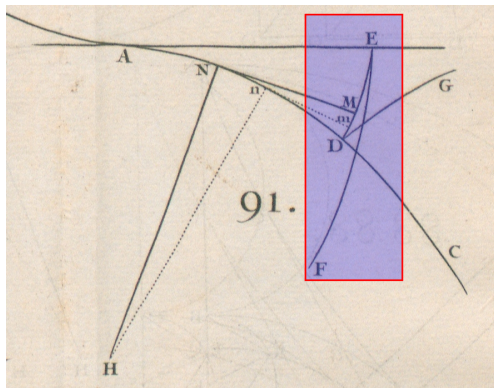
Un détour : Le tRiangle analytique

Un bRouillamini épouvantable

1696, L'Hôpital, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, p. 102



1696, L'Hôpital, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, fig. 91



<https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/3041649>

1696, L'Hôpital, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, p. 103

partie *DE* deux perpendiculaires *MN, mn*, terminées par la développée aux points *N, n*, par lesquels on tirera deux autres perpendiculaires *NH, nH* sur les premières *NM, nm*; ce qui formera deux petits secteurs *MNm, NHn* qui seront semblables, puisque les angles *MNm, NHn* sont égaux. On aura donc $Nn.Mm :: NH.NM$. Or dans le point d'inflexion *A* le rayon *NH* devient* infini ou zero; * *Art. 81.* & le rayon *MN*, qui devient *AE*, demeure d'une grandeur finie. Il faut donc qu'au point de rebroussement *E* de la seconde sorte, la raison de la différence *Nn* du rayon *MN* de la développée, à la différence *Mm* de la courbe, devienne ou infiniment grande ou infiniment petite. Et partant

$$\text{puisque } *Nn = \frac{-3 dx dy ddy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} + dx dddy \sqrt{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}}}{dx^2 ddy^2}, \text{ \& } * \text{ Art. 86.}$$

$$Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \text{ l'on aura } \frac{dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3 dy ddy^2}{dx ddy^2} = 0$$

ou ∞ ; & multipliant par $dx ddy^2$, on trouvera la formule $dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3 dy ddy^2 = 0$ ou ∞ , qui servira à déterminer les points de rebroussement de la seconde sorte.

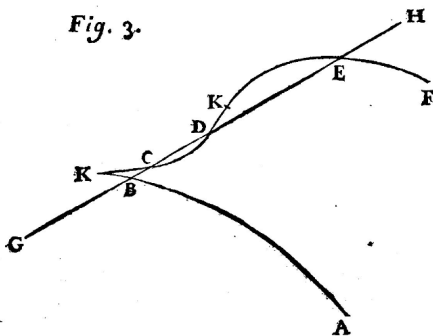
Maupertuis, *Sur quelques affections des courbes*, Histoire de l'Académie royale des sciences pour l'année 1729, partie Mémoires, p. 279-280

Ici se présente nécessairement le point de rebroussement que M. de l'Hôpital appelle *point de rebroussement de la seconde sorte*, dont il se contente de dire, que le rayon de la développée y est un plus grand ou un plus petit ; & de-là donne une formule pour trouver ces sortes de points. La nature de ce point fait partie de cette Théorie, dont il n'est qu'un cas.

Nous avons vû que dans le point de serpenement, deux points d'inflexion s'étoient unis ; & que le point de double pointe étoit l'union de deux points de rebroussement : dans ces deux cas le second point détruit le changement que le premier avoit apporté au cours de la Courbe.

Mais un point d'inflexion peut s'unir à un point de rebroussement ; & ces deux points n'étant point absolument opposés, l'un ne rétablit point ce qu'à changé l'autre ; & le cours de la Courbe paroît rebroussant.

1729, Maupertuis, *Sur quelques affections des courbes*,
Histoire de l'Académie royale des sciences pour l'année
1729, partie Mémoires, p. 279-280



1740, De Gua de Malves, *Usages de l'Analyse de Descartes...*, préface, p.xvi-xvii

Je prouve, par exemple, à la suite du Lemme premier, que deux Branches Infinies Conjuguées l'une à l'autre Hyperboliques, ou Paraboliques ne peuvent se disposer l'une par raport à l'autre que de trois façons différentes. Je fais voir de même à la suite du Lemme second que deux parties d'une Branche de Courbe ne peuvent s'unir l'une à l'autre que par des Points de trois figures différentes, & la démonstration que

P R E F A C E. xvij
je donne de cette verité me sert aussi à démontrer l'impossibilité du Point qu'on nomme communément Rebroussement de la seconde Espece; Point qu'on avoit toujours cru possible depuis que M. le Marquis de l'Hopital en avoit supposé l'existence, & donné la description.

1740, De Gua de Malves, *Usages de l'Analyse de Descartes...*, p. 73-76

74

de l'Analyse des *infinitement petits*, M. de l'Hôpital a tourné ses vûes d'un autre côté, & il s'est attaché (*voy. Anal. des infin. pet. Pag. 102.*) à établir la possibilité d'une prétendue quatrième Espece de Point Singulier, qu'il a nommé *Point de Rebroussement de la seconde Espece*, dont il a dit que personne n'avoit parlé avant lui, & qu'il a fait naître du Développement d'un Point d'Inflexion. On voit dans la *Fig. 14.* la forme dont il seroit, s'il pouvoit exister.

Ce Rebroussement a été aussi adopté depuis par M. de Maupeirtuis Géomètre d'un grand nom dans la même Académie de Paris. L'Ouvrage où ce dernier Académicien en a fait mention est un de ceux que renferment les Recueils de l'Académie dont il est Membre. * Le dessein

* Voyez les Mem. de l'Ac. Roy. des Sc. de Par. an. 1729. pag. 277, 279 & autres. Edit. de Paris.

75

de l'Auteur dans ce Mémoire paroît avoir été de découvrir des formations nouvelles & ingénieuses de differens Points Singuliers ou Remarquables ; mais passant un peu trop rapidement sur la possibilité de l'existence de celui dont il est question maintenant, il a prétendu que ce Point en particulier pourroit se former par la réunion d'une Inflexion avec un Rebroussement ordinaire, comme cela seroit vrai en effet, si un Rebroussement & une Inflexion pouvoient réellement se réunir dans un même Point & une même Branche de Courbe.

Or, puisque ces deux Géomètres ont négligé d'examiner, le premier si le Perimetre tracé par l'Evolution d'une Courbe quelconque ne pouvoit pas être nécessairement Conjugué à une autre partie que le seul Développe-

G ij

76

ment ordinaire ne feroit point conoître, & le seconds'il pouvoit se faire qu'un Rebroussement, & une Inflexion se trouvaient effectivement compliqués dans un même Point, & une même Branche de Courbe, nous esperons par cette raison qu'on ne verra point avec surprise que nous entreprenions ici de démontrer à *priori* l'impossibilité du prétendu Rebroussement dont ils n'ont établi l'un & l'autre l'existence que sur des suppositions peu exactes.

Pour cet effet qu'on place l'Origine d'une Courbe dans un Point Singulier quelconque de son Perimetre, ou si l'on veut même dans plusieurs à la fois, & qu'on y prenne $x=0$; on prouvera d'abord facilement, & de la même maniere dont on l'a fait à la Page 47, que la valeur correspondante de y devra s'exprimer par un seul Terme, ou

1740, D'Alembert, *Usages de l'Analyse de Descartes...*, Journal des Sçavans, mai 1740

USAGE DE L'ANALYSE DE DESCARTES ; POUR découvrir sans le secours du Calcul différentiel les propriétés ou affections principales des lignes Géométriques de tous les Ordres, par M. l'Abbé de Gua de Malves, Trésorier du Chapitre de Mougou, Académicien de l'Académie Royale de Bordeaux. A Paris, chez de Birse l'aîné, Quai des August. à S. Paul; & chez Piget, Quai des Augustins, à l'Image saint Jacques, pages 497.-volume iv-12.

Les bons Livres sont aussi rares en matière de Science qu'en tout autre genre, mais les Ouvrages véritablement nouveaux le sont encore davantage. Dans la Géométrie en particulier, il seroit facile de compter combien il a paru depuis Descartes de ces Livres originaux qu'on peut regarder comme la source & le modèle de tous les autres. Ce n'est pas que cette Science ne s'enrichisse tous les jours de nouvelles découvertes; mais la plupart applicables seulement à un objet particulier, ne viennent d'ailleurs à rien; elles

pliquent outre cela à plusieurs recherches auxquelles les anciennes ne pouvoient servir, enfin cet Ouvrage deviendra utile au progrès des Mathématiques, en même tems qu'il sera si honorable à son Auteur & à la nation.

Tel est, le caractère de l'excellent Livre dont nous allons rendre compte. M. l'Abbé de Gua se propose de démontrer dans cet Ouvrage, que l'Analyse de Descartes peut être employée avec plus de succès que le Calcul différentiel à la plupart des recherches que l'on peut faire sur les courbes géométriques.

C'est ici que l'Auteur démontre la proposition dont nous avons parlé plus haut sur les différentes manières dont peuvent s'unir les parties d'une même branche. Il prouve que ce ne peut être que par des points semblables de figure ou aux points ordinaires, ou aux inflexions ou aux rebroussemens ordinaires; par conséquent les deux parties d'une même branche de courbe ne peuvent être unies, de façon que la convexité de l'une regarde la concavité de l'autre. Donc ce point singulier que M. le Marquis de l'Hôpital, a nommé *rebroussement de la seconde espèce*, & qu'il a fait naître du développement d'une courbe à inflexion, ne peut avoir lieu dans les courbes. M. de Maupertuis, célèbre Acadé-

micien de l'Académie Royale des Sciences, dans un mémoire de l'année 1729, a imaginé ce point comme formé par la réunion d'une inflexion avec un rebroussement ordinaire, formation très ingénieuse, & qui lui conviendrait en effet, ajoute l'auteur, si un rebroussement & une inflexion, pouvoient se réunir dans un même point & une même branche de courbe. M. l'Abbé de Gua démontre d'une manière directe l'impossibilité de la formation de M. de Maupertuis & de celle de M. de l'Hôpital, & il réfute de toutes ses preuves que le prétendu rebroussement de la seconde espèce, n'est autre chose qu'une *demi-osculation* de deux branches situées de façon que la concavité de l'une regarde la convexité de l'autre.

<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k56589d/f285.item>

Plan

Les pRotagonistes

Des débuts contRariés

Épineuses RRecherches

Un détour : Le tRiangle analytique

Un bRouillamini épouvantable

1744, 20 octobre, lettre d'Euler à Cramer

Monsieur

Quoique je n'aye pas encore vu mon ouvrage, qui vient de sortir de la presse, je vous en suis infiniment obligé de la peine toute particulière que vous avez bien voulu vous donner pour la correction. Mais plus mon obligation, que je vous en ai, est grande, plus je dois plaindre le tems précieux que vous y avez employé, et le savoir me faisant fort peu de gré, que j'ai été cause que vous avez été détournée de vos occupations ordinaires, si estimées par tout. C'est à cause de cette considération que j'approuve tout à fait la réponse que vous avez faite à Monsieur Bousquet, en lui refusant votre secours par rapport à la correction de mon ouvrage, qui veut mettre sous la presse, ne doutant point, qu'il ne réussit trouver à Lacépède un homme propre pour cela. J'ai appris avec bien du plaisir, que vous avez composé un ouvrage sur la même matière, et comme je suis extrêmement curieux de le voir.

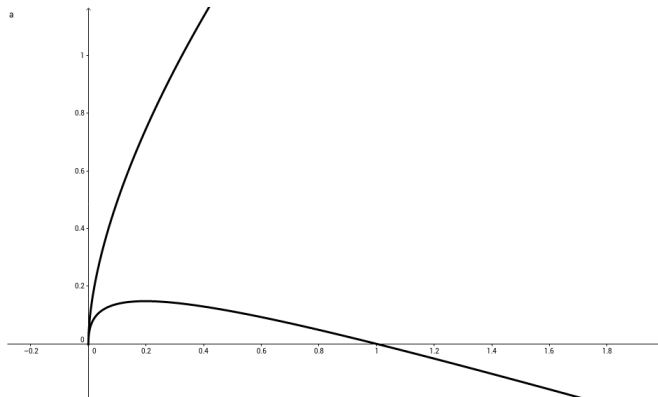
1744, 20 octobre, lettre d'Euler à Cramer

Je serai la même matière, et comme je
je joins mes sollicitations à celles de M^r. Bouquet, pour Vous en demander
la publication. Ce sont à mon avis de telles matières, qui pour la plupart ne
sont pas encore mises dans tout leur jour, et je ne doute nullement, que Vous
n'en ayez éclairci quantité de circonstances, qui me sont échappées aussi bien
qu'à d'autres, qui ont écrit sur cela. Il s'y trouve même des recherches si épi-
neuses, où il faut apporter toute l'attention possible pour ne s'y tromper pas.
ce qui m'est arrivé en développant la nature du point de rebroussement de la
seconde espèce. M^r. le Marquis de l'Hôpital avoit fait voir qu'il y avoit en
effet des courbes douées d'un tel point, mais M^r. Gué de Malherbe prétend, que
les deux branches de la courbe, qui forment ce point, s'étendent toujours de
l'autre côté, de sorte que selon lui ce point n'est autre chose, qu'une intersection
de deux branches, qui se croisent à un angle infiniment petit. Les raisons qu'il en
apportent me sembloient assez fortes, et j'en ai encore trouvé d'autres, qui m'ont
détournée à croire, qu'il avoit raison, comme Vous aussi sans doute remarquez
en parcourant mon ouvrage. Mais depuis j'ai reconnu très clairement, que

1744, 20 octobre, lettre d'Euler à Cramer

je m'étois trompé sur ce point, et qu'il y a effectivement des courbes, qui
 ont un tel point de rebroussement tout net, sans qu'on le puisse regarder
 comme une intersection infiniment proche de deux branches. Il y a même
 dans l'ordre quatrième, une ligne courbe de cette nature. Dont l'équation
 est $y^4 - 2xy^2 + xx = x^2 + 4yxx$, qui se réduit à $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[3]{x^2}$. La raison pour
 quoi je me suis trompé, étoit que j'avois cru, que cette courbe devoit avoir un
 diamètre, parce que \sqrt{x} se peut prendre aussi bien négative qu'affirmative,
 mais comme l'autre terme $\sqrt[3]{x^2}$ est égal au premier \sqrt{x} multiplié par sa ra-
 cine quarrée $\sqrt{\sqrt{x}}$, on voit bien, qu'on ne sauroit prendre le premier \sqrt{x} né-
 gativement, sans que l'autre $\sqrt[3]{x^2}$ ne devienne imaginaire. Et en effet si l'on
 donnoit au terme \sqrt{x} le signe $-$, l'équation $y = -\sqrt{x} \pm \sqrt[3]{x^2}$ se change-
 roit à cellecy $y^4 - 2xy^2 + xx = x^2 - 4yxx$, qui n'est plus pour la même courbe
 dans la même situation. Comme je n'ai pas une copie de mon exemplaire
 chez moi, je vous supplie, en cas que Vous l'ayez eue chez Vous, d'ajouter
 à cet endroit une petite note.

1744, 20 octobre, lettre d'Euler à Cramer



Courbe d'équation $y^4 - 2xy^2 + xx = x^3 + 4yxx$ tracée avec GeoGebra

1744, 11 novembre, réponse de Cramer à Euler (brouillon)

J'ai été surpris de ne que vous me marquis plusieurs points de rebroussement
 de la grande cycloïde. Les raisons de M. de Gua ne m'avoient pas paru
 et est vrai, tout a fait de découverte. C'est pourquoi je n'en avois rien dit
 dans mon Esai, me contentant de passer cette espèce de point comme
 dans l'enumeration de points doubles. Mais je vous avouerais pourtant ^{chemin}
 que, comme vous, j'étois fort persuadé que tel est le point de ce point. ^{si on n'auroit jamais vu que c'est un}
 j'ai fait tout mon possible pour ^{le} concevoir ou chicaner ^{la} courbe que
 l'on croit, mais il n'y a pas eu moyen. Le choc est trop laïc, quoiqu'on
 paraisse d'abord j'ai voulu voir qu'il est tel m'avoit en une espèce de point
 fort allongé ^{et cela me paroissoit devoir être ainsi, parce que cette}
 courbe simple n'est que la Parab. $y^2 = ax^3$, dont il a été prouvé que c'est un point
 double. ^{et d'un moment après j'ai vu que c'est deux branches qui se touchent}

1744, 11 novembre, réponse de Cramer à Euler (transcription de l'original)

« Le point de rebroussement de la seconde espèce est un véritable Paradoxe. Il est bien vrai que les raisons de M^r de Gua ne m'avoient pas paru tout à fait démonstratives : c'est pourquoi je n'en avois rien dit, me contentant de passer cette espèce de point sous silence dans l'énumération des diverses sortes de points doubles. Mais je vous avouerai pourtant que, comme vous, j'étois fort prévenu contre l'existence de ces points-là, n'en aiant jamais trouvé avant celui que Vous m'indiquez. J'ai fait tout mon possible pour chicaner votre Courbe. Mais il n'y a point moyen de résister à l'évidence. D'abord j'ai voulu croire qu'elle se terminoit en une sorte de petit sac fort allongé, en cette forme : »



1744, 11 novembre, réponse de Cramer à Euler (transcription de l'original)

« Ensuite j'ai examiné, si ce point du sommet ne seroit pas un point de rebroussement ordinaire, dont une branche par une inflexion fort proche du sommet retourne sa concavité vers l'autre branche, comme cela arrive à des courbes que je connois, et dont le sommet à cette figure. Ce qui donnoit quelque apparence à ce soupçon, c'est qu'on peut concevoir ce point, comme formé par l'évanouissement d'une feuille. Car si au lieu de l'équation $y = 4\sqrt{ax} \pm \sqrt[4]{ax^3}$, on prend $y = \sqrt{ax} \pm \sqrt[4]{ax(x-b)^2}$, la Courbe aura cette forme à peu près et b diminuant à l'infini, la feuille s'évanouit.

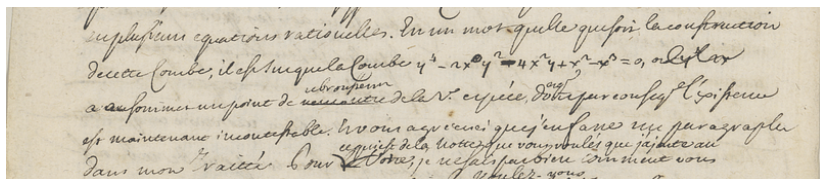


Or il est ordinaire qu'un foliolum evanescens produise un point de rebroussement de le prem[ière] espèce. Mais il a falu encore renoncer à cette conjecture. »

1744, 11 novembre, Cramer à Euler (brouillon)

plusieurs équations rationnelles. En un mot quelle que soit la construction
 de cette courbe, il est sur que la courbe $y^3 - ax^2y^2 = 4x^2y + x^2 - x^3 = 0$, ou $y^3 - ax^2y^2 = 4x^2y + x^2 - x^3$
 a au moins un point de ^{intersection} avec la x^e droite, d'où par conséquent l'équation
 est maintenant inévitable. Je vous agrée que j'en fais un paragraphe
 dans mon traité. Si vous le trouvez bon, je ne fais pas d'erreur en vous
 en parlant.

1744, 11 novembre, Cramer à Euler (brouillon)



1744, 11 novembre, Cramer à Euler (transcription de l'original)

« En un mot, quelque Construction qu'on imagine, il est constant
 que la Courbe $y^4 - 2xy^2 - 4x^2y - x^3 + x^2 = 0$ a au sommet un point
 de rebroussement de la 2^e espèce, desquels par conseq[uent] l'existence est
 mainten[ant] incontestable. »

1744, 11 novembre, Cramer à Euler (brouillon)

est maintenant insupportable. vous avez vu que j'en ai mis un sur votre
 dans mon Traité. Pour ^{ce qui est de la Note que vous voulez que j'ajoute au} ~~ce qui est de la~~ Note, je ne sais pas bien comment vous
 le cas de l'existence ^{de ces points} ~~de ces points~~. Je souhaiterois fort que vous ^{supprimer} ~~supprimer~~
 les raisons que vous alleguez contre l'existence de ces points, ou
 voulez-vous simplement marquer que nonobstant toutes ces raisons, qui
 semblent d'abord si plausible, il y a pourtant des points de cette espece.
 Je souhaiterois fort que vous vous donnassiez la peine de mettre votre
 idée sur le papier. Vous auriez encore du temps à la faire qu'en rien
 de plus.

1744, 11 novembre, Cramer à Euler (transcription de l'original)


« Pour ce qui est de la Note que vous souhaitez que j'ajoute à Votre Traité, je ne sais pas comment vous l'entendez. Votre idée est-elle de supprimer les raisons que vous alleguez contre l'existence de ces points de rebroussement de la seconde espece ; ou voulez-vous simplement marquer, que nonobstant toutes ces raisons, qui semblent d'abord si plausibles, il y a pourtant de ces sortes de points. Je souhaiterois fort que vous vous donnassiez la peine de mettre votre idée sur le papier. »

1744, 15 décembre, Euler à Cramer

Je profiterai néanmoins de votre offre, par rapport à une remarque sur la faute qui m'est échappée à l'égard du point de rebroussement de la seconde espèce. Comme il n'est pas possible de changer rien dans le texte sans renvoyer sur cet endroit tout à fait, je vous prie seulement de faire ajouter ou à la marge ou en bas une remarque, environ en ces termes:

Non obstantibus his argumentis, quibus existentia huiusmodi cuspidis secundo speciei evadit videtur, innumerabiles dantur curvae algebraicae tali cuspede praeditae. Inter quas habetur adeo una ex ordine linearum quarto hac aequatione contenta $y^4 - 2y^2x - 4yx^2 + x^3 - x^2 = 0$, quae ex ista formula $y = \sqrt{x} \pm \sqrt{x^2}$ resultat. Quiaquam enim hic primum occurrit terminus \sqrt{x} , tamen ejus signum non est ambiguum, sed ne cessario esse debet +. Nam si ipsi tribueretur signum negativum, alter terminus $\sqrt{x^2} = \sqrt{x}\sqrt{x}$ evadit imaginarius. Ex quo exemplo, quemadmodum dem argumenta supra allata restringi oporteat, lauculenter percipitur.

1744 15

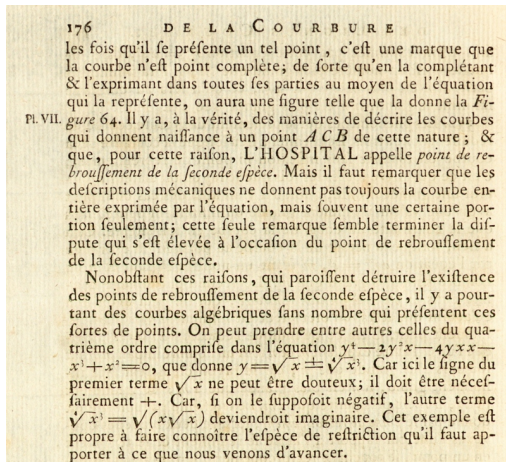


1744, 15 décembre, Euler à Cramer (transcription)

« Je profiterai neansmoins de Votre offerte, parrapport à une remarque sur la faute qui m'est échappée à l'égard du point de rebroussement de la seconde espèce. Comme il n'est pas possible de changer rien dans le texte sans renverser cet endroit tout à fait, je Vous prie seulement de faire ajouter ou à la marge ou en bas une remarque environ en ces termes :

"Non obstantibus his argumentis, quibus existentia hujusmodi cuspidis secundae speciei everti videtur, innumerabiles dantur curvae algebraicae tali cuspide praeditae. Inter quas habetur adeo una ex ordine linearum quarto hac aequatione contenta $y^4 - 2y^2x - 4yxx + xx - x^3 = 0$; quae ex ista formula $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$ resultat. Quanquam enim hic primum occurrit terminus \sqrt{x} , tamen ejus signum non est ambiguum, sed necessario esse debet +. Nam si ipsi tribueretur signum negationis, alter terminus $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt{x\sqrt{x}}$ evaderet imaginarius. Ex quo Exemplo, quemadmodum argumenta supra allata restringi oporteat, luculenter perspicitur." »

1748, Euler, Introduction à l'analyse infinitésimale, t. 2, p. 176 (trad. Labey, 1797)



Plan

Les pRotagonistes

Des débuts contRariés

Épineuses RRecherches

Un détour : Le tRiangle analytique

Un bRouillamini épouvantable

1740, Buffon, La Méthode des Fluxions et des Suites Infinies, p. 7

XX. Soit l'Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ à reduire en suite infinie, prenez un Nombre comme 2, qui ne difere pas d'une de ses dixiemes Parties de la vraie valeur de la Racine, & faites $2 + p = y$, substituez $2 + p$ pour y dans l'Equation donnée, & vous aurez $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, dont il faut chercher la Racine pour l'ajouter au Quotient; rejetez $p^3 + 6p^2$ à cause de sa petitesse, il restera $10p - 1 = 0$, ou $p = 0,1$, ce qui est très-près de la vraie valeur de p ; c'est pourquoi l'écrivain au Quotient, je fais $0,1 + q = p$, & substituant comme auparavant, j'ai $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$, négligeant les deux premiers Termes, il reste $11,23q + 0,061 = 0$, ou $q = -0,0054$ à peu près (& cela en divisant $0,061$ par $11,23$ jusqu'à ce qu'on ait autant de Figures qu'il y a de Places entre les premieres Figures de ce Quotient & le principal Quotient exclusivement, comme ici où il a deux places entre 2 & $0,005$). J'écris donc $-0,0054$ dans le Quotient, mais au-dessous parce que ce Terme est Négatif; & supposant $-0,0054 + r = q$, je substitue comme auparavant, & je continue ainsi l'Opération aussi long-tems qu'il convient, comme on le peut voir ci-dessous.

$y^3 - 2y - 5 = 0$		+ 2,10000000 - 0,0044882
		+ 2,09551141, &c. = y
$2 + p = y$	+ y^3 - $2y$ - 5	+ 8 + 12p + 6p ² + p ³ - 4 - 2p - 5
SOMME.		- 1 + 10p + 6p ² + p ³
$0,1 + q = p$	+ p ³ + 6p ² + 10p - 1	+ 0,001 + 0,03q + 0,3q ² + q ³ + 0,06 + 1,2 + 6 + 1, + 10, - 1,
SOMME.		+ 0,061 + 11,23q + 6,3q ² + q ³
$-0,0054 + r = q$.	+ q ³ + 6,3q ² + 11,23q + 0,061	- 0,00000158304 + 0,000007221 - 2,02021 + r ³ + 0,000181722 - 0,00882q + 6,3 + 0,060642 + 11,23 + 0,061
SOMME.		+ 0,0005416 + 11,162r
$-0,00004852 + s = r$		

<https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/1088549>

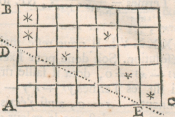
1740, Buffon, La Méthode des Fluxions et des Suites Infinies, p. 10-11

XXIX. La Figure suivante facilitera l'usage, & donnera une idée plus claire de cette regle. Divisez l'Espace Angulaire ABC en petits Quarés ou Parallelogrammes égaux, dans lesquels vous inscrirez x & y selon leurs Dimensions, comme vous le voyez. Quand on vous propofera une Equation, marquez tous les Parallelogrammes qui correspondent par leurs Dimensions à tous les Termes de l'Equation; puis appliquez une Regle à l'Angle du Parallelogramme le plus bas à main gauche de tous les Parallelogrammes marqués, faites tourner cette Regle jusqu'à ce qu'elle touche un ou plus d'un Parallelogramme marqué à main droite, sans qu'elle quitte celui qui est à main gauche; prenez ces termes que la Regle touche, & en les égalant à zero, tirez-en la quantité qu'il faut écrire au Quotient.

XXX. Par exemple pour tirer la Racine y de l'Equation $y^6 - 5xy^5 + \frac{2}{a}y^4 - 7a^2x^2y^3 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$, je marque les Parallelogrammes auxquels les termes de cette Equation appartiennent de la Note *, puis j'applique la Regle DE au plus bas Parallelogram-

	x^4	x^3y	x^2y^2	xy^3	x^4y^6
	x^3	x^2y	xy^2	xy^3	x^3y^4
	x^2	xy	xy^2	x^2y^3	x^2y^4
	x	xy	xy^2	xy^3	xy^4
A	1	y	y^2	y^3	y^4

me marqué à main gauche, & je la fais tourner à main droite, jusqu'à ce qu'elle touche un ou plus d'un autre Parallelogramme marqué; je vois que ceux qu'elle touche appartiennent à x^3 , x^2y^2 & y^6 je prens donc dans l'Equation les Termes de ces Dimensions, scavoir $y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3$, & je les égale à zero; & pour avoir une Equation plus simple, je fais $y = v\sqrt{ax}$ ce qui en substituant me donne $v^6 - 7v^2 + 6 = 0$, dont les Racines $\pm\sqrt{ax}$ & $\pm\sqrt{2ax}$ me donnent chacune à mon choix le premier Terme du Quotient, & cela selon la Racine de cette Equation que j'ai deffein de tirer.



<https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/1088552>

1740, Buffon, La Méthode des Fluxions et des Suites Infinies, p. 12-13

XXXVI. Il nous reste maintenant à montrer la pratique de la Résolution. Soit donc pour Exemple l'Equation $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, dont il faille tirer la Racine; je choisis, comme je l'ai dit les Termes $y^3 + a^2y - 2a^3$, qui étant égaux à zero, me donnent $y - a = 0$, ainsi j'écris $+a$ dans le Quotient; mais parce que $+a$ n'est pas la valeur complete de y je fais $a + p = y$, & je substitue dans l'Equation cette valeur de y , & parmi les Termes $p^3 + 3ap^2 + axp$, &c. qui en résultent; je choisis de la même façon les Termes $+4a^2p + a^2x$, qui étant égaux à zero donnent $p = -\frac{x}{4}$, j'écris donc $-\frac{x}{4}$ au Quotient; mais parce que $-\frac{x}{4}$ n'est pas la valeur exacte de p , je fais $-\frac{x}{4} + q = p$, & substituant cette valeur je choisis dans les Termes $q^3 - \frac{3}{4}xq^2 + 3aq^2$, &c. qui en résultent, les Termes $q^3 - \frac{3}{16}ax^2$ qui étant égaux à zero donnent $q = \frac{xx}{64a}$ que j'écris au Quotient, mais comme $\frac{xx}{64a}$ n'est pas la valeur exacte de q , je fais $\frac{xx}{64a} + r = q$, & je substitue comme ci-dessus, ce qui se peut continuer aussi long-tems qu'on voudra, comme on peut le voir dans la Figure suivante.

$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0. y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{311x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3} \&c.$																	
$+a + p = y.$	<table border="1"> <tr><td>$+y^3$</td><td>$+a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3$</td></tr> <tr><td>$+axy$</td><td>$+a^2x + axp$</td></tr> <tr><td>$+x^2y$</td><td>$+ax^2 + a^2p$</td></tr> <tr><td>$-x^3$</td><td>$-x^3$</td></tr> <tr><td>$-2a^3$</td><td>$-2a^3$</td></tr> </table>	$+y^3$	$+a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3$	$+axy$	$+a^2x + axp$	$+x^2y$	$+ax^2 + a^2p$	$-x^3$	$-x^3$	$-2a^3$	$-2a^3$						
$+y^3$	$+a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3$																
$+axy$	$+a^2x + axp$																
$+x^2y$	$+ax^2 + a^2p$																
$-x^3$	$-x^3$																
$-2a^3$	$-2a^3$																
$-\frac{x}{4} + q = p.$	<table border="1"> <tr><td>$+p^3$</td><td>$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2q - \frac{3}{4}xq^2 + q^3$</td></tr> <tr><td>$+3ap^2$</td><td>$+\frac{3}{16}ax^2 - \frac{3}{4}axq + 3aq^2$</td></tr> <tr><td>$+axp$</td><td>$-\frac{1}{4}ax^2 + axq$</td></tr> <tr><td>$+4a^2p$</td><td>$-a^2x + 4a^2q$</td></tr> <tr><td>$+a^2x$</td><td>$+a^2x$</td></tr> <tr><td>$-x^3$</td><td>$-x^3$</td></tr> </table>	$+p^3$	$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2q - \frac{3}{4}xq^2 + q^3$	$+3ap^2$	$+\frac{3}{16}ax^2 - \frac{3}{4}axq + 3aq^2$	$+axp$	$-\frac{1}{4}ax^2 + axq$	$+4a^2p$	$-a^2x + 4a^2q$	$+a^2x$	$+a^2x$	$-x^3$	$-x^3$				
$+p^3$	$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2q - \frac{3}{4}xq^2 + q^3$																
$+3ap^2$	$+\frac{3}{16}ax^2 - \frac{3}{4}axq + 3aq^2$																
$+axp$	$-\frac{1}{4}ax^2 + axq$																
$+4a^2p$	$-a^2x + 4a^2q$																
$+a^2x$	$+a^2x$																
$-x^3$	$-x^3$																
$+\frac{xx}{64a} + r = q.$	<table border="1"> <tr><td>$+q^3$</td><td>*</td></tr> <tr><td>$-\frac{3}{4}xq^2$</td><td>*</td></tr> <tr><td>$+3aq^2$</td><td>$+\frac{3x^4}{4096a} * + \frac{1}{16}x^2r + 3ar^2$</td></tr> <tr><td>$+\frac{3}{16}x^2q$</td><td>$+\frac{3x^4}{1024a} * + \frac{1}{16}x^2r$</td></tr> <tr><td>$-\frac{1}{4}axq$</td><td>$-\frac{1}{16}ax^3 - \frac{1}{4}axr$</td></tr> <tr><td>$+4a^2q$</td><td>$+\frac{1}{4}a^2x^2 + 4a^2r$</td></tr> <tr><td>$-\frac{6}{4}ax^3$</td><td>$-\frac{6}{4}ax^3$</td></tr> <tr><td>$-\frac{1}{4}a^2x^2$</td><td>$-\frac{1}{4}a^2x^2$</td></tr> </table>	$+q^3$	*	$-\frac{3}{4}xq^2$	*	$+3aq^2$	$+\frac{3x^4}{4096a} * + \frac{1}{16}x^2r + 3ar^2$	$+\frac{3}{16}x^2q$	$+\frac{3x^4}{1024a} * + \frac{1}{16}x^2r$	$-\frac{1}{4}axq$	$-\frac{1}{16}ax^3 - \frac{1}{4}axr$	$+4a^2q$	$+\frac{1}{4}a^2x^2 + 4a^2r$	$-\frac{6}{4}ax^3$	$-\frac{6}{4}ax^3$	$-\frac{1}{4}a^2x^2$	$-\frac{1}{4}a^2x^2$
$+q^3$	*																
$-\frac{3}{4}xq^2$	*																
$+3aq^2$	$+\frac{3x^4}{4096a} * + \frac{1}{16}x^2r + 3ar^2$																
$+\frac{3}{16}x^2q$	$+\frac{3x^4}{1024a} * + \frac{1}{16}x^2r$																
$-\frac{1}{4}axq$	$-\frac{1}{16}ax^3 - \frac{1}{4}axr$																
$+4a^2q$	$+\frac{1}{4}a^2x^2 + 4a^2r$																
$-\frac{6}{4}ax^3$	$-\frac{6}{4}ax^3$																
$-\frac{1}{4}a^2x^2$	$-\frac{1}{4}a^2x^2$																
$+\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ax + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{4096a} \left(+ \frac{311x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3} \right)$																	

1750, Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, p. 55-56

DES LIGNES ALGÈBRIQUES. 55

Pl. III. verticale les termes où l'indéterminée x a le même expo-
 s. 35. sant, & ces exposants croissent d'une unité en passant d'une
 colonne à l'autre de gauche à droite. Ainsi chaque
 terme a sa Case déterminée par les exposants d' x & d' y
 dans ce terme.

Case	Case	Case	Case	Case	Case
by^5	rcy^4	ax^2y^3	dx^3y^2	ex^4y	Case
cy^4	mcy^3	sx^2y^2	βx^3y	ϵx^4	Case
dy^3	bxy^2	nx^2y	tx^3	γx^2y	Case
by	cxy	ix^2y	px^3y	ux^4y	Case
a	cx	fx^2	tx^3	qx^4	Case

Mais comme dans cette disposition les termes d'un même degré se trouvent placés en diagonale, Mr. DE GUILLAUME, en tournant le Parallélogramme, lui a donné une situation plus commode *. Il se présente alors comme un triangle, dont la pointe regarde en embas, & où les termes de l'équation générale sont placés comme on le voit dans cette Figure, qui explique la chose suffisamment.

* Usage de l'Analyse, etc. pag. 24. &c.

56 DES DIFFERENS ORDRES

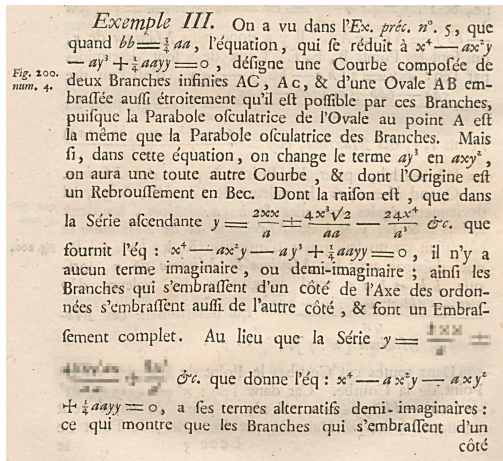
Pl. III. Case. Case. Case. Case. Case. Case. Case. C

36. DANS ce Triangle, que l'Auteur appelle *Triangle algébrique* ou *analytique*, chaque Case prend son nom des x & des y qu'elle contient. La Case inférieure seule, qui n'a ni x ni y , se nommera la *Case de la pointe*, ou, pour abrégé, la *Pointe du Triangle*. Des deux Cases qui la touchent, l'une s'appelle la *Case y*, l'autre la *Case x*. Les trois voisines se nomment la *Case yy*, la *Case xy*, & la *Case xx*. On comprend assez par-là quel est le nom de chaque Case.

1750, Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, p. 148

Voici le Principe qui nous guidera dans ces Recherches. Si dans une équation indéterminée, on suppose une des variables x ou y infinie ou infiniment petite, cette supposition rend certains termes de l'équation infiniment plus grands que les autres. On peut donc retrancher ceux-ci sans scrupule, parce qu'ils ne font rien en comparaison des plus grands, qui forment seuls toute l'équation. Par ce retranchement elle devient plus simple & plus traitable. Il ne s'agit que d'avoir une Règle pour discerner dans une équation proposée, quels sont les termes que la supposition d' x ou d' y infiniment grande ou infiniment petite, rend infiniment plus grands que tous les autres.

1750, Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, p. 590

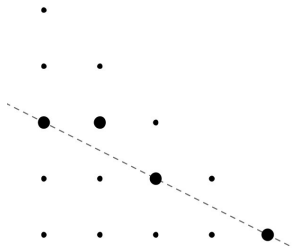


Un point singulier à l'origine

$$x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{1}{4}a^2y^2 = 0$$

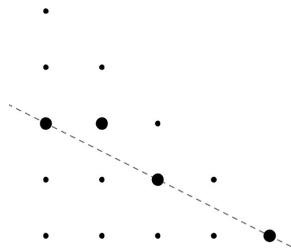
Un point singulier à l'origine

$$x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{1}{4}a^2y = 0$$



Un point singulier à l'origine

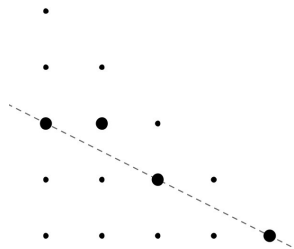
$$x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{1}{4}a^2y^2 = 0$$



déterminatrice inférieure : $x^4 - ax^2y + \frac{1}{4}a^2y^2 = 0$

Un point singulier à l'origine

$$x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{1}{4}aayy = 0$$

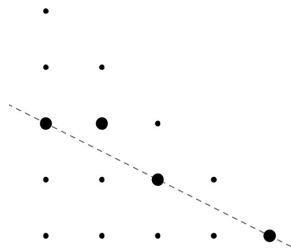


déterminatrice inférieure : $x^4 - ax^2y + \frac{1}{4}aayy = 0$

soit $(x^2 - \frac{1}{2}ay)^2 = 0$ qui donne $y = \frac{2xx}{a}$.

Un point singulier à l'origine

$$x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{1}{4}aayy = 0$$



déterminatrice inférieure : $x^4 - ax^2y + \frac{1}{4}aayy = 0$

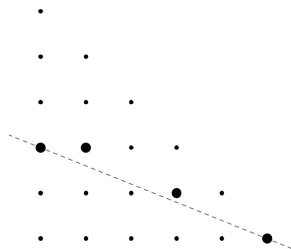
soit $(x^2 - \frac{1}{2}ay)^2 = 0$ qui donne $y = \frac{2xx}{a}$. Posons $y = \frac{2xx}{a} + u$.

Un point singulier à l'origine

$$-4\frac{x^5}{a} - 4x^3u - axu^2 + \frac{1}{4}a^2u^2 = 0$$

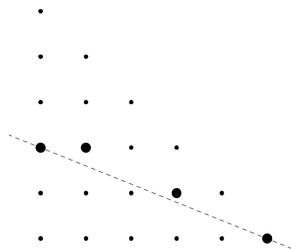
Un point singulier à l'origine

$$-4\frac{x^5}{a} - 4x^3u - axu^2 + \frac{1}{4}a^2u^2 = 0$$



Un point singulier à l'origine

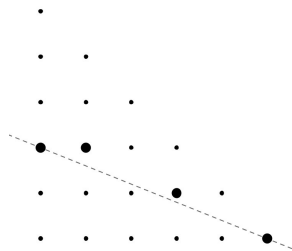
$$-4\frac{x^5}{a} - 4x^3u - axu^2 + \frac{1}{4}a^2u^2 = 0$$



déterminatrice inférieure : $-4\frac{x^5}{a} + \frac{1}{4}a^2u^2 = 0$

Un point singulier à l'origine

$$-4\frac{x^5}{a} - 4x^3u - axu^2 + \frac{1}{4}a^2u^2 = 0$$

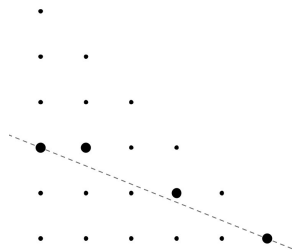


déterminatrice inférieure : $-4\frac{x^5}{a} + \frac{1}{4}a^2u^2 = 0$

donne, dans le cas où x est positif : $u = \pm \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{4xx\sqrt{ax}}{aa}$

Un point singulier à l'origine

$$-4\frac{x^5}{a} - 4x^3u - axu^2 + \frac{1}{4}a^2u^2 = 0$$



déterminatrice inférieure : $-4\frac{x^5}{a} + \frac{1}{4}a^2u^2 = 0$

donne, dans le cas où x est positif : $u = \pm \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{4xx\sqrt{ax}}{aa}$

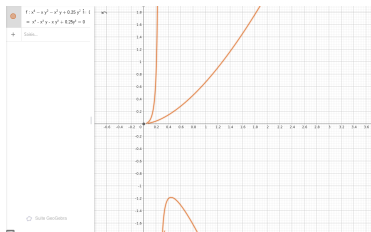
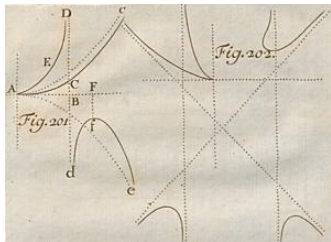
Posons $u = \pm \frac{4xx\sqrt{ax}}{aa} + t$ etc.

Un point singulier à l'origine

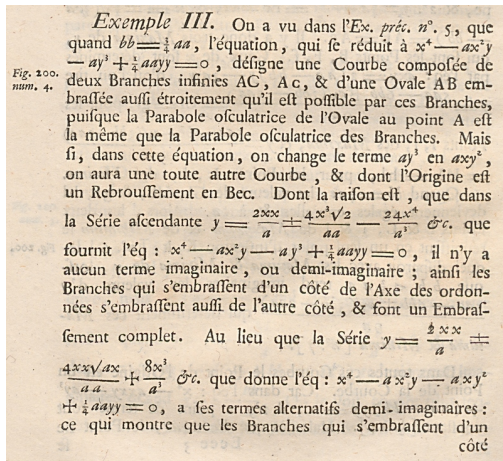
Début du développement :

$$y = \frac{2xx}{a} \pm \frac{4xx\sqrt{ax}}{aa} + \frac{8x^3}{a^3} + \dots$$

La série se scinde en deux dès le deuxième terme ; ces deux séries sont semi-imaginaires (réelles uniquement pour des valeurs positives de x), « ce qui montre que les Branches qui s'embrassent d'un côté de l'axe des ordonnées manquent de l'autre côté, ne font qu'un demi-Embrassement, c'est-à-dire un Bec. »



1750, Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, p. 590



Plan

Les pRotagonistes

Des débuts contRariés

Épineuses RRecherches

Un détour : Le tRiangle analytique

Un bRouillamini épouvantable

1747, 24 mars, lettre de D'Alembert à Euler

« Je me suis aperçu comme vous, Monsieur, de l'erreur de M. de Gua sur le point de rebroussement de la 2de. Espece. J'en ay parlé, mais avec beaucoup de menagemens, dans le memoire sur le calcul integral que j'ay envoyé à vôtre academie le 6 Dec. dernier. J'y parle d'une courbe $y = x^2 \pm \sqrt{x^5}$, qui a un point de cette Espece à son origine, & j'y refute en passant le raisonnement de M. de Gua, qui consiste à negliger le terme $\sqrt{x^5}$ & a ne prendre que $y = x^2$ lorsque $x = 0$. Comme j'ay fait il y a 7 ans dans le journal des savans l'extrait de cet ouvrage, et que j'ay loué alors de tres bonne foy cette pretendüe decouverte de M. de Gua, j'ay cru devoir a moy même & a la verité, de detromper ceux qui pourroient etre dans l'erreur, en menageant l'auteur dont j'estime les connoissances & les talens. Ce qu'il y a de facheux, c'est que cette erreur, dont je ne me suis aperçu que depuis peu, influe sur presque tout son livre. »

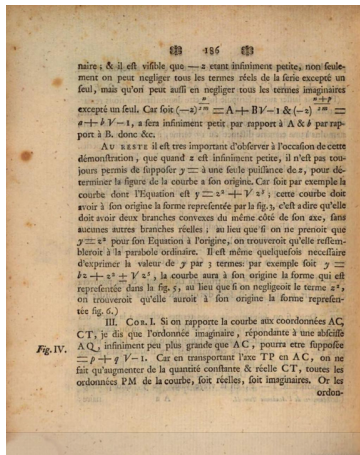
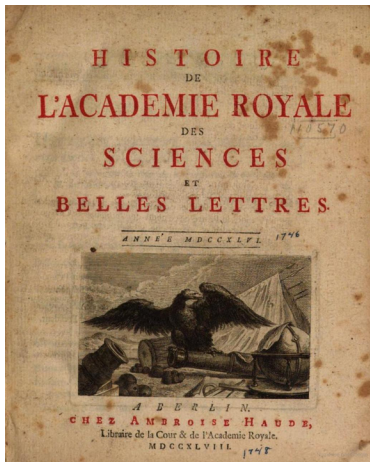
[http://dalembert.academie-sciences.fr/Correspondance/navgenerale.php?
book=4703&version=manuscrit1](http://dalembert.academie-sciences.fr/Correspondance/navgenerale.php?book=4703&version=manuscrit1)

1748, 7 septembre, lettre de D'Alembert à Euler

« La manière dont vous parlez sur les points de rebroussement de la 2^{de} espèce me paroît équivoque car d'un côté vous dites que toutes les fois qu'on croit trouver ces points, c'est une marque que toute la courbe n'est pas décrite, et de l'autre vous convenez qu'il y a pourtant une infinité de courbes ou ces points se rencontrent. [...] Dans mon mémoire qui est imprimé dans votre volume, j'ay apporté pour exemple la courbe $y = x^2 \pm \sqrt{x^5}$ qui ne peut souffrir, ce me semble, aucune difficulté. »

[http://dalembert.academie-sciences.fr/Correspondance/navgenerale.php?
book=4808&version=manuscrit1](http://dalembert.academie-sciences.fr/Correspondance/navgenerale.php?book=4808&version=manuscrit1)

1748, D'Alembert, Recherches sur le calcul intégral, Mémoires de l'académie de Berlin pour 1746, p. 186



1748, 28 septembre, réponse d'Euler à D'Alembert

« Et dans ce tems la je fus aussi fort douteux, s'il y avoit effectivement des courbes qui eussent un point de rebroussement de la seconde espece et j'etois meme porté à croire le contraire. Ensuite m'étant éclairci parfaitement sur ce point, j'ai envoyé à Mr. Bousquet une note la dessus, dans laquelle j'ai montré la réalité de ces points par l'exemple d'une ligne du quatrieme ordre $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$ (contre laquelle Vous n'aures plus de doute, dès que Vous la feres rationnelle en la reduisant à $y^4 - 2xyy - 4xxy + xx - x^3 = 0$) et j'avois prié Mr. Bousquet de faire inserer cette note sous le texte. Je suis donc fort fâché qu'il l'a introduit dans le texte meme, qui cause maintenant tant avec le precedent qu'avec la suite une contradiction ouverte. J'ai aimé mieux de laisser dans mon ouvrage cette matiere imparfaite que d'y faire les corrections que je n'avois trouvées que quelque tems après, surtout ayant eu occasion de profiter de Vos lumieres, de peur de paroître que je m'etois voulu aproprier des decouvertes, dont la premiere invention ne m'appartient point. »

<http://dalembert.academie-sciences.fr/Correspondance/navgenerale.php?>

book=4809&version=manuscrit1

1748, 5 décembre, lettre de D'Alembert à Cramer

« Vous avés vu sans doute l'introductio ad Analys. inf. de M. Euler. Lisés je vous prie ce qu'il dit sur les points de rebroussement de la 2de. Espece à la fin du Chapitre osculatione curvarum dans le To. II & vous verrés qu'il se contredit sur ce point deux fois dans la meme page. Je lui en ay escrit, il m'a dit que d'abord il pensoit que ces points étoient impossibles, qu'ensuite ayant lu ce que j'ay dit la dessus dans un memoire envoyé à l'academie de Berlin & imprimé dans leur 2d. vol. il avoit changé d'avis, & envoyé une note à Bousquet, qui l'a inseré dans le texte, ce qui cause un brouillamini epouvantable. Je ne say pourquoy il n'a pas mieux aimé recommencer son chapitre & me citer. Mais ce sont de ces choses auxquelles je ne tiens gueres. »

<http://dalembert.academie-sciences.fr/Correspondance/navgenerale.php?>

book=4812&version=manuscrit1

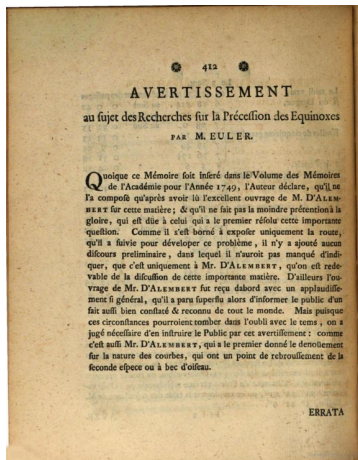
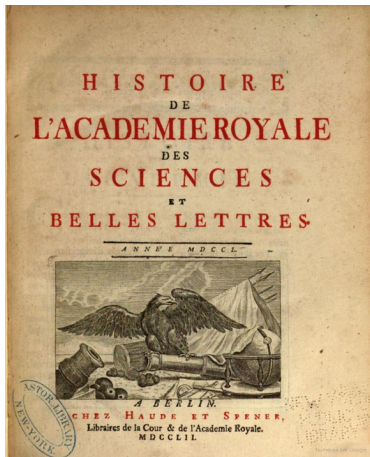
1752, 4 août, lettre de D'Alembert à Maupertuis

« Je suis tres content du parti que vous avez pris par rapport à mes memoires. Mon dessein n'etoit point que celui ou je revendique ce qui m'appartient fut imprimé; je voulois seulement que vous l'examinassiez et que vous me fissiez rendre justice. Je n'ay point eu envie d'attaquer M. Euler, et je n'ay jamais douté que des qu'il feroit attention a mes justes sujets de plainte, il ne me donnât la satisfaction que je suis en droit d'exiger. Je voudrois bien que dans le papier qu'il imprimera il fit aussi mention de ma remarque sur les points de rebroussement de la seconde espece; et qu'il expliquât aussi ce qu'il a dit sur mon memoire touchant les racines imaginaires. Je suis d'autant plus jaloux du 1^{er} article que vous y etes personnellement interessé, puisque l'abbé de Gua vous a attaqué sur cet article tres mal à propos; et à l'egard du second, c'est un theoreme d'algebre assez important pour que je sois flatté de l'avoir decouvert le premier. »

<http://dalembert.academie-sciences.fr/Correspondance/navgenerale.php?>

book=5207&version=manuscrit1

1752, Euler, Avertissement au sujet des Recherches sur la Précession des Equinoxes, Mémoires de l'académie de Berlin pour 1750, p. 412



175 ?, D'Alembert, Article REBROUSSEMENT, Encyclopédie, vol. XIII, p. 842

« Je suis le premier qui ait démontré invinciblement l'existence de ces points, que d'habiles géomètres avoient attaquée, comme le savant M. Euler l'a reconnu dans les mém. de l'acad. de Berlin de 1750, pag. 112. »

; -)

Merci de votre attention.

Quelques références :

- ▶ Irène Passeron, éd.. 2015. Correspondance générale 1741-1752. T. V/2. Jean Le Rond d'Alembert, Œuvres complètes. Paris : CNRS.
- ▶ Siegfried Bodenmann, Vanja Hug, Mirjana Ilic et Andreas Kleinert, éd.s. 2017. Correspondance de Leonhard Euler avec des savants suisses en langue française. T. 4A / 7. *Commercium epistolicum*. Bâle : Birkhäuser.
- ▶ Robert E. Bradley, 2006. *The Curious Case of the Bird's Beak*. International Journal of Mathematics and Computer Science, vol. 1 n° 2, p. 243–268.
- ▶ Thierry Joffredo, 2016. *Entre algèbre et géométrie : la question des points de serpentement et de rebroussement dans la correspondance de Gabriel Cramer avec Euler et D'Alembert*. Circé. Histoires, Cultures & Sociétés, n° 8 (avril). [Lien](#)
- ▶ Thierry Joffredo, 2021. *Le triangle analytique, un outil pour tracer les courbes algébriques aux XVIIIe et XIXe siècles*, Images des mathématiques. [Lien](#)