HAL
open science

CORRESPONDANCE DE LANGLANDS LOCALE p-ADIQUE ET ANNEAUX DE KISIN

Pierre Colmez, Gabriel Dospinescu, Wieslawa Niziol

To cite this version:

Pierre Colmez, Gabriel Dospinescu, Wieslawa Niziol. CORRESPONDANCE DE LANGLANDS LOCALE p-ADIQUE ET ANNEAUX DE KISIN. Acta Arithmetica, 2023, 208 (2), pp.101-126. 10.4064/aa220520-24-4 . hal-04289202

HAL Id: hal-04289202

https://hal.science/hal-04289202v1

Submitted on 16 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CORRESPONDANCE DE LANGLANDS LOCALE p-ADIQUE ET ANNEAUX DE KISIN

par

Pierre Colmez, Gabriel Dospinescu & Wiesława Nizioł

Résumé. — Nous utilisons un procédé de complétion $\mathscr{B}$-adique et la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ pour donner une construction des anneaux de Kisin et des représentations galoisiennes universelles associées (en dimension 2 et pour $\mathbf{Q}_p$) à partir de la correspondance de Langlands locale classique.

Abstract. — We use a $\mathscr{B}$-adic competion and the p-adic local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ to give a construction of Kisin's rings and the attached universal Galois representations (in dimension 2 and for $\mathbf{Q}_p$) directly from the classical Langlands correspondence.

Table des matières

Introduction 1
1. La correspondance de Langlands locale p-adique 3
2. Complétions profinie et $\mathscr{B}$-adique 6
3. Le complété universel de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ 10
4. Représentations de type M 12
5. Complétion $\mathscr{B}$-adique et anneaux de Kisin 16
Références 22

Introduction

Nous donnons, pour $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et en dimension 2, une construction directe des anneaux de Kisin et des représentations universelles attachées.

Plus précisément, soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ d'anneau des entiers $\mathscr{O}_L$ et de corps résiduel k_L, et soient M un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module de rang 2 irréductible, $a < b$ des entiers et $\overline{\rho} : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(k_L)$ une représentation continue, semi-simple. Notre

This research was partially supported by the project ANR-19-CE40-0015-02 COLOSS..

construction part de la représentation $\mathrm{LL}(M)$ de $G := \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ associée à M par la recette de Fontaine et la correspondance de Langlands locale classique (c'est une représentation supercuspidale puisque M est supposé irréductible). On suppose que la représentation localement algébrique

$$\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) = \mathrm{LL}(M) \otimes \mathrm{Sym}^{b-a-1} \otimes \det{}^a$$

a un caractère central unitaire. Elle admet alors des $\mathscr{O}_L$-réseaux stables par G ; on fixe un tel réseau Λ. La représentation $\overline{\rho}$ détermine un bloc $\mathscr{B}$ de la catégorie des $\mathscr{O}_L$-représentations de G lisses de longueur finie et de caractère central égal à celui de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$. On définit [1] *le complété $\mathscr{B}$-adique* $\Lambda_{\mathscr{B}}$ de Λ comme la limite projective des quotients de longueur finie de Λ dont toutes les composantes de Jordan-Hölder appartiennent à $\mathscr{B}$, et on pose $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M) = L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Lambda_{\mathscr{B}}$ (le résultat est indépendant du choix de Λ). Soient alors [2] :

$$R^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}} := \mathrm{End}_G(\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)), \quad X^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}} := \mathrm{Spec}\, R^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}}, \quad \rho^{[a,b]}_M := \mathbf{V}(\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M))$$

Notre résultat principal est que $\rho^{[a,b]}_M$ est la famille universelle des représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de type (M,a,b) dont la réduction [3] est $\overline{\rho}$, (i.e. de dimension 2, potentiellement semi-stables à poids de Hodge-Tate a et b, et dont le D_{pst} est isomorphe à M).

petit1 ***Théorème 0.1***. — (i) *$R^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}}$ est un anneau commutatif s'identifiant à l'anneau des fonctions analytiques bornées sur un ouvert analytique de $\mathbf{P}^1$; algébriquement, c'est le produit d'un nombre fini d'anneaux principaux.*

(ii) *$\rho^{[a,b]}_M$ est libre de rang 2 sur $R^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}}$ et l'application de spécialisation $x \mapsto \rho_x$ induit, pour toute extension finie L' de L, une bijection entre $X^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}}(L')$ et l'ensemble des L'-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de réduction $\overline{\rho}$ et de type (M,a,b).*

Ce théorème est prouvé aux §§ 5.2 et 5.3 (les notations y sont un peu différentes car on met l'accent sur le bloc $\mathscr{B}$ plutôt que la représentation $\overline{\rho}$, et donc $R^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}}$ devient $R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$ et $\rho^{[a,b]}_M$ devient $\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$). La preuve repose sur deux ingrédients :

• Le « théorème $R = T$ » local de Paškūnas [**23, 26**] qui montre que $\mathbf{V}(\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M))$ est « de type GL_2 » et munit ce module d'une action de l'anneau des déformations universelles du pseudo-caractère $\mathrm{Tr} \circ \overline{\rho}$.

• Les résultats de [**14**] prouvant que, si V est irréductible de dimension 2, de Rham à poids de Hodge-Tate distincts, et si E est une extension de V par V, alors $\mathbf{\Pi}(V)$ est la complétée de ses vecteurs localement algébriques si et seulement si E est de Rham.

1. Cette construction apparaît déjà dans [**20**, (1.6.4)].

2. Rappelons que l'on dispose d'un foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ associant une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à une L-représentation unitaire Π de G, et que la correspondance de Langlands locale p-adique $V \mapsto \mathbf{\Pi}(V)$ associe à une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2, une L-représentation de G vérifiant $\mathbf{V}(\mathbf{\Pi}(V)) = V$.

3. Par définition, on prend la semi-simplifiée de la réduction d'un réseau stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Ce résultat permet de montrer que $R^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}}$ est un produit d'anneau principaux et que $\rho^{[a,b]}_M$ est libre de rang 2 sur $R^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}}$ (cf. th. 5.4 et cor. 5.5).

Remarque 0.2. — (i) Pour $\overline{\rho}$ générique, l'existence de $\rho^{[a,b]}_M$ peut se déduire des résultats de Kisin [**19**] (cf. aussi [**20**, cor. 1.4.7]) à part pour le fait que Kisin ne fixe pas M mais seulement sa restriction au sous-groupe d'inertie et son déterminant ce qui donne a priori deux M possibles : M et $M \otimes \mu_{-1}$ où μ_{-1} est le caractère non ramifié d'ordre 2. (Les résultats de Kisin sont valables pour des représentations de $\mathscr{G}_K$, avec $[K : \mathbf{Q}_p] < \infty$, en dimension arbitraire, mais comme notre construction utilise la correspondance de Langlands locale p-adique, nous sommes forcés de nous restreindre aux représentations de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$; la géométrie de l'analogue de l'espace $X_{M,\mathscr{B}}$ ci-dessus a été étudiée par Wang-Erickson [**29**].)

(ii) Que $R^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}}$ soit un produit d'anneaux principaux repose sur la classification [**21, 22**] des ouverts de $\mathbf{P}^1$. Ceci a déjà été utilisé par Rozensztajn [**27**] dans le cas cristallin.

(iii) Les deux ingrédients ci-dessus ont aussi été utilisés par Paškūnas [**25**] pour prouver la conjecture de Breuil-Mézard (avec quelques restrictions sur $\overline{\rho}$ dont certaines ont été levés par Hu et Tan [**18**]), ce qui nécessite des informations sur $R^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}}$ un peu différentes de celles mentionnées ci-dessus (et il ne faut pas rendre p inversible), cf. [**25**, th. 6.6, th. 6.24].

(iv) On déduit de la construction de $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$ et des résultats des §§ 2.2 et 2.3 une suite de décomposition de la réduction de $\rho^{[a,b]}_M$ qui fournit (prop. 5.8 et 5.11) une forme de la conjecture de Breuil-Mézard [**5, 16**].

Remerciements. — On remercie Kisin, Paškūnas, Emerton et Gee d'avoir parfois de bonnes idées.

Notations

On note :

- G le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$,
- B le borel des matrice triangulaires supérieures,
- Z le centre de G,
- $K := \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ le sous-groupe compact maximal.

On note :

- μ_λ le caractère non ramifié de $\mathbf{Q}_p^*$ prenant la valeur λ en p (dans un anneau où λ est inversible), i.e. $\mu_\lambda(x) = \lambda^{v_p(x)}$.
- ε le caractère $x \mapsto x|x|$ de $\mathbf{Q}_p^*$.
- χ le caractère $\chi \circ \det$ de G, si χ est un caractère de $\mathbf{Q}_p^*$.

PETIT6

1. La correspondance de Langlands locale p-adique

1.1. Représentations irréductibles

Si $0 \leq r \leq p-1$ et si $\chi : \mathbf{Q}_p^* \to k_L^*$ est un caractère continu, soit $W_{r,\chi}$ le KZ-module $(\mathrm{Sym}^r k_L^2) \otimes \chi$, et soit $I_{r,\chi}$ son induite compacte de KZ à G. Soit T_{BL} l'opérateur de Barthel-Livné. Il résulte des travaux de Barthel-Livné [**1, 2**] et Breuil [**4**] que $\mathrm{End}_{k_L[G]} I_{r,\chi} = k_L[T_{\mathrm{BL}}]$ et que, si $P \in k_L[T]$ est irréductible, alors

$$\Pi_{r,\chi,P} := I_{r,\chi}/P(T_{\mathrm{BL}})$$

est irréductible sauf si $r = 0$ ou $p-1$ et $P = T \pm 1$. (bien sûr, si $\deg P \geq 2$, alors $\Pi_{r,\chi,P}$ n'est pas absolument irréductible), mais dans tous les cas, les composantes de Jordan-Hölder de $\Pi_{r,\chi,P}$ appartiennent toutes à un même bloc.

Sur $\overline{\mathbf{F}}_p$, on obtient la liste suivante :

Proposition 1.1. — *Les $\overline{\mathbf{F}}_p$-représentations lisses, irréductibles, admettant un caractère central sont :*

- *les χ, pour χ caractère lisse de $\mathbf{Q}_p^*$,*
- *les $\mathrm{St} \otimes \chi$, pour χ caractère lisse de $\mathbf{Q}_p^*$,*
- *les $B(\chi_1, \chi_2) := \mathrm{Ind}_B^G \chi_2 \otimes \chi_1 \varepsilon^{-1}$, pour χ_1, χ_2 caractères lisses de $\mathbf{Q}_p^*$, avec $\chi_1 \neq \varepsilon\chi_2$,*
- *les $\Pi_{r,\chi,T}$, pour $0 \leq r \leq p-1$ et χ caractère lisse de $\mathbf{Q}_p^*$.*

Soit $B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$ la $k_L[T, T^{-1}]$-représentation

$$B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}}) := \mathrm{Ind}_B^G(\chi\mu_{T^{-1}} \otimes \chi\varepsilon^r\mu_T)$$

On déduit des résultats de Barthel-Livné que, si $P \in k_L[T]$ est irréductible et n'admet pas 0 pour racine, alors

$$B_{r,\chi,P} := (k_L[T, T^{-1}]/P) \otimes_{k_L[T,T^{-1}]} B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$$

a même semi-simplifiée que $\Pi_{r,\chi,P}$ et lui est isomorphe sauf si $r = p-1$ et $P = T - \lambda$, avec $\lambda = \pm 1$ où $\Pi_{r,\chi,P}$ est une extension de $\chi\mu_\lambda$ par $\mathrm{St} \otimes \chi\mu_\lambda$ tandis que $B_{r,\chi,P}$ est une extension de $\mathrm{St} \otimes \chi\mu_\lambda$ par $\chi\mu_\lambda$.

1.2. Le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$

Soit $\mathrm{Tors}\, G$ la catégorie des $\mathscr{O}_L[G]$-modules lisses, de longueur finie. (un tel module est tué par p^N, si N est supérieur ou égal à la longueur). Si $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ est un caractère continu, on note $\mathrm{Tors}^\delta G$ la sous-catégorie des objets de caractère central δ.

Si $\Pi \in \mathrm{Tors}_G^\delta$, on peut associer [**7**, th. IV.2.13, IV.2.14] à Π, de manière fonctorielle, une représentation $\mathbf{V}(\Pi)$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ « de type GL_2 » (cf. th. 1.6 pour le sens à donner à cet énoncé : si on est en dimension 2, l'opérateur $g + \delta\varepsilon(g)g^{-1}$ qui y apparaît est juste la trace de g).

Si $\Pi = \varprojlim \Pi_i$, où les Π_i sont de longueur finie, on pose $\mathbf{V}(\Pi) = \varprojlim \mathbf{V}(\Pi_i)$, et si $\Pi = L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Pi^+$, on pose $\mathbf{V}(\Pi) = L \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathbf{V}(\Pi^+)$, ce qui permet de définir $\mathbf{V}(\Pi)$ pour

des banachs dont la réduction est de longueur finie (ou même juste limite projective d'objets de longueur finie).

Proposition 1.2. — ([**7**, th. 0.10] ou [**20**, th. 1.2.4])
(i) $\mathbf{V}(\Pi) = 0$ *si* Π *est de dimension* 1.
(ii) $\mathbf{V}(\Pi_{r,\chi,P}) = \varepsilon^{r+1}\mu_\lambda\chi$, *si* $P(\lambda) = 0$ *et* $\lambda \neq 0$.
(iii) $\mathbf{V}(\Pi_{r,\chi,T}) = \mathrm{Ind}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_{p^2}}}^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}} \omega_2^{r+1} \otimes \chi$.

qc3

1.3. Blocs

La théorie de Gabriel [**17**] fournit des décompositions

$$\mathrm{Tors}\, G = \prod\nolimits_{\mathscr{B}} \mathrm{Tors}_{\mathscr{B}}\, G, \quad \mathrm{Tors}^\delta\, G = \prod\nolimits_{\mathscr{B}} \mathrm{Tors}^\delta_{\mathscr{B}}\, G$$

où $\mathscr{B}$ parcourt l'ensemble des blocs [4] de $\mathrm{Tors}\, G$ (resp. $\mathrm{Tors}^\delta\, G$), et $\mathrm{Tors}_{\mathscr{B}}\, G$ (resp. $\mathrm{Tors}^\delta_{\mathscr{B}}\, G$) est la sous-catégorie de $\mathrm{Tors}\, G$ (resp. $\mathrm{Tors}^\delta\, G$) des objets dont toutes les composantes de Jordan-Hölder appartiennent à $\mathscr{B}$. (Les blocs de $\mathrm{Tors}^\delta\, G$ sont ceux de $\mathrm{Tors}\, G$ de caractère central δ.)

pasku0

Proposition 1.3. — (Paškūnas)
(i) *Les blocs de* $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbf{F}}_p}\, G$ *sont d'une des formes suivantes :*
- $\{\pi\}$, *où* π *est supersingulière.*
- $\{B(\chi_1, \chi_2), B(\chi_2, \chi_1)\}$, *où* $\chi_1\chi_2^{-1} \neq \varepsilon^\pm, 1$.
- $\{B(\chi, \chi)\}$, *si* $p \neq 2$. (*Si* $p = 2$, *ce bloc devient* $\{\chi, \mathrm{St} \otimes \chi\}$.)
- $\{\chi, \mathrm{St} \otimes \chi, B(\chi, \chi\varepsilon)\}$, *si* $p \neq 3$. (*Si* $p = 3$, *ce bloc devient* $\{\chi, \mathrm{St} \otimes \chi, \chi\varepsilon, \mathrm{St} \otimes \chi\varepsilon\}$.)

(ii) *Les blocs de* $\mathrm{Rep}_{k_L}\, G$ *sont ceux de* $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbf{F}}_p}\, G$ *modulo l'action de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_p/k_L)$.

Si π est irréductible, on note P_π (resp. P_π^δ) l'enveloppe projective de $\pi^\vee$ (dans la catégorie des $\mathscr{O}_L[G]$-modules compacts, resp. de caractère central δ^{-1}). Alors P_π est un $\mathscr{O}_L[G]$-module compact, limite projective de $\mathscr{O}_L[G]$-modules compacts et de longueur finie. Si $\mathscr{B}$ est un bloc de $\mathrm{Tors}\, G$ ou de $\mathrm{Tors}^\delta\, G$, on pose

$$\begin{array}{lll} P_{\mathscr{B}} = \oplus_{\pi \in \mathscr{B}} P_\pi & E_{\mathscr{B}} := \mathrm{End}_G(P_{\mathscr{B}}) & Z_{\mathscr{B}} := \text{centre de } E_{\mathscr{B}} \\ P^\delta_{\mathscr{B}} = \oplus_{\pi \in \mathscr{B}} P^\delta_\pi & E^\delta_{\mathscr{B}} := \mathrm{End}_G(P^\delta_{\mathscr{B}}) & Z^\delta_{\mathscr{B}} := \text{centre de } E^\delta_{\mathscr{B}} \end{array}$$

Alors $Z^\delta_{\mathscr{B}}$ est un quotient de $Z_{\mathscr{B}}$ et $Z_{\mathscr{B}}$, $Z^\delta_{\mathscr{B}}$ sont des $\mathscr{O}_L$-algèbres locales compactes.

pasku1

Remarque 1.4. — Si $\pi \in \mathrm{Tors}^\delta_{\mathscr{B}}\, G$, alors $Z^\delta_{\mathscr{B}}$ agit sur π ainsi que, par fonctorialité, sur $\mathbf{V}(\pi)$.

4. On met, sur les représentations irréductibles, une relation d'équivalence définie par $\pi \sim \pi'$ si et seulement si il existe une suite $\pi = \pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_r = \pi'$ telle que $\pi_{i+1} = \pi_i$ ou $\mathrm{Ext}^1(\pi_i, \pi_{i+1}) \neq 0$ ou $\mathrm{Ext}^1(\pi_{i+1}, \pi_i) \neq 0$ (ces conditions ne sont pas exclusives). Une classe d'équivalence est *un bloc*.

qc10

1.4. Blocs et représentations galoisiennes modulo p

pasku3 ***Remarque 1.5***. — Il y a une bijection $\mathscr{B} \leftrightarrow \rho_{\mathscr{B}}$ entre blocs et mod-p représentations semi-simples de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Cette bijection envoie un bloc $\mathscr{B}$ sur la représentation semi-simple dont l'ensemble des sous-représentations irréductibles est $\{\mathbf{V}(\pi),\ \pi \in \mathscr{B}\}$. Donc :

- $\rho_{\mathscr{B}}$ est irréductible, de dimension 2, si $\mathscr{B} = \{\pi\}$, avec π supersingulière.
- $\rho_{\mathscr{B}} = \chi_1 \oplus \chi_2$, si $\mathscr{B} = \{B(\chi_1, \chi_2), B(\chi_2, \chi_1)\}$ et $\chi_1 \neq \chi_2$.
- $\rho_{\mathscr{B}} = \chi \oplus \chi$, si $\mathscr{B} = \{B(\chi, \chi)\}$.
- $\rho_{\mathscr{B}} = \chi \oplus \chi\varepsilon$, si $\mathscr{B} = \{\chi, \mathrm{St} \otimes \chi, B(\chi, \chi\varepsilon)\}$.

Dans tous les cas, $(\det \rho_{\mathscr{B}})\varepsilon^{-1}$ est égal au caractère central des éléments de $\mathscr{B}$.

Soit $\mathscr{B}$ un bloc de $\mathrm{Tors}^{\delta} G$. Notons $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}$ l'anneau des déformations universelles du pseudo-caractère $\mathrm{Tr} \circ \rho_{\mathscr{B}}$, de déterminant $\delta\varepsilon$, et

$$T^{\delta}_{\mathscr{B}} : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}$$

le pseudo-caractère universel. On a alors le « théorème $R = T$ » local suivant (cf. rem. 1.4 pour l'action de $Z^{\delta}_{\mathscr{B}}$).

pasku6 ***Théorème 1.6***. — (Paškūnas **[23]**, Paškūnas-Tung **[26]**) *Il existe un unique morphisme d'anneaux*

$$\iota^{\delta}_{\mathscr{B}} : R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}} \to Z^{\delta}_{\mathscr{B}}$$

tel que, pour tout $\pi \in \mathrm{Tors}^{\delta}_{\mathscr{B}} G$ *et tout* $g \in \mathrm{Gal}_{\mathbf{Q}_p}$, *on ait*

$$\iota^{\delta}_{\mathscr{B}}(T^{\delta}_{\mathscr{B}}(g)) = g + \delta\varepsilon(g)g^{-1} \quad \textit{dans } \mathrm{End}(\mathbf{V}(\pi))$$

De plus :

- *Si* $p \geq 5$, $\iota^{\delta}_{\mathscr{B}}$ *est un isomorphisme.*
- *Dans le cas général* $L \otimes_{\mathscr{O}_L} \iota^{\delta}_{\mathscr{B}}$ *est un isomorphisme,* $Z^{\delta}_{\mathscr{B}} = R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}/\mathscr{O}_L$-torsion *si* $p = 3$ *et le conoyau de* $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}/\mathscr{O}_L$-torsion $\to Z^{\delta}_{\mathscr{B}}$ *est tué par* 2 *si* $p = 2$.

Remarque 1.7. — Les anneaux de déformations universelles de pseudo-caractères de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sont noethériennes (et mêmes quotients de $\mathscr{O}_L[[x_1, \ldots, x_r]]$) ; on en déduit que $Z^{\delta}_{\mathscr{B}}[\frac{1}{p}]$ est noethérienne (et même $Z^{\delta}_{\mathscr{B}}$ sauf, peut-être, dans les cas exceptionnels).

2. Complétions profinie et $\mathscr{B}$-adique

PETIT7

2.1. Complétion profinie

PETIT8

Si X est un $\mathscr{O}_L[G]$-module topologique, on note $\widetilde{X}$ son *complété profini*, i.e. la limite projective des X/W, où W parcourt l'ensemble des sous-$\mathscr{O}_L[G]$-modules ouverts (et donc aussi fermés) de X tels que $X/W \in \mathrm{Tors}\, G$. Alors $\widetilde{X}$ admet une décomposition

$$\widetilde{X} = \prod_{\mathscr{B}} X_{\mathscr{B}}$$

où $\mathscr{B}$ décrit l'ensemble des blocs des représentations de G sur k_L ; $X_{\mathscr{B}}$ est le *complété $\mathscr{B}$-adique* de X. Si X a pour caractère central δ, les blocs apparaissant dans le produit sont ceux de $\mathrm{Tors}^{\delta} G$.

petit5 ***Remarque 2.1.*** — On n'est pas forcé de prendre un bloc pour définir un complété $\mathscr{B}$-adique : on peut prendre pour $\mathscr{B}$ un sous-ensemble d'un bloc et ne considérer que les quotients dont les composantes de Jordan-Hölder appartiennent à $\mathscr{B}$.

A36 ***Remarque 2.2.*** — Pour définir $E_{\mathscr{B}}$, on doit pouvoir prendre l'enveloppe projective de $\oplus_{\pi\in\mathscr{B}}\pi$ dans la catégorie des $\mathscr{O}_L[G]$-modules profinis au lieu de celle de $\oplus_{\pi\in\mathscr{B}}\pi^{\vee}$ dans la catégorie des $\mathscr{O}_L[G]$-modules compacts.

PETIT9 **2.2. Complétion $\mathscr{B}$-adique des induites compactes : le cas irréductible**

A33 ***Proposition 2.3.*** — *Si $\mathscr{B}$ est le bloc contenant $\Pi_{r,\chi,P}$, alors*

$$(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}} = \varprojlim_n I_{r,\chi}/P(T_{\mathrm{BL}})^n$$

De plus,

$$\mathrm{End}_{k_L[G]}((I_{r,\chi})_{\mathscr{B}}) = \varprojlim_n k_L[T]/P^n$$

Démonstration. — On déduit des résultats de Barthel-Livné (et Breuil) qu'un quotient Π de $I_{r,\chi}$, de longueur finie, est quotient de $I_{r,\chi}/Q(T_{\mathrm{BL}})$, avec $Q(T)\in k_L[T]$. Le théorème des restes chinois implique donc que Π est quotient de $\oplus_\lambda I_{r,\chi}/P(T_{\mathrm{BL}})^{n_P}$, où la somme porte sur les P irréductibles et les n_P sont presque tous nuls. Le premier point s'en déduit remarquant que les blocs associés aux différents P sont distincts (à r,χ fixé, s'entend).

Le second découle de ce que $\mathrm{End}(I_{r,\chi}/Q(T_{\mathrm{BL}})) = k_L[T_{\mathrm{BL}}]/Q(T_{\mathrm{BL}})$ car toute copie de $W_{r,\chi}$ dans $I_{r,\chi}$ est de la forme $Q(T_{\mathrm{BL}})\cdot W_{r,\chi}$ puisque $\mathrm{End}(I_{r,\chi}) = k_L[T_{\mathrm{BL}}]$. □

Proposition 2.4. — *Si $P\in k_L[T]$ est irréductible et n'admet pas 0 pour racine, si $\mathscr{B}$ est le bloc qui lui correspond, et si T agit sur $(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}}$ via T_{BL}, on a un isomorphisme de $k_L[[P]][G]$-modules*

$$(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}} \cong k_L[[P]]\otimes_{k_L[T,T^{-1}]} B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$$

dans le cas générique, et une suite exacte

$$0\to k_L[[P]]\otimes_{k_L[T,T^{-1}]} B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}}) \to (I_{r,\chi})_{\mathscr{B}} \to \chi\mu_\lambda \to 0$$

si $r=p-1$ et $P=T-\lambda$ avec $\lambda=\pm 1$.

Démonstration. — On a une flèche naturelle $I_{r,\chi}\to B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T,\chi\mu_{T^{-1}})$ de $k_L[T][G]$-modules, où T agit sur $I_{r,\chi}$ par T_{BL}. Celle-ci induit une flèche de $k_L[T,T^{-1}][G]$-modules

$$k_L[T,T^{-1}]\otimes_{k_L[T]} I_{r,\chi} \to B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T,\chi\mu_{T^{-1}})$$

qui est injective et est un isomorphisme sauf si $r=p-1$ où on a une suite exacte

$$0\to k_L[T,T^{-1}]\otimes_{k_L[T]} I_{r,\chi} \to B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T,\chi\mu_{T^{-1}}) \to (\mathrm{St}\otimes\chi\mu_1)\oplus(\mathrm{St}\otimes\chi\mu_{-1})\to 0$$

et T agit par 1 (resp. -1) sur le premier (resp. second) terme du conoyau.

• Si $r \neq p-1$ ou si $P \neq T-\lambda$, avec $\lambda \neq \pm 1$ (cas générique), on a donc, pour tout n, un isomorphisme

$$I_{r,\chi}/P(T_{\mathrm{BL}})^n \cong (k_L[T]/P^n) \otimes_{k_L[[T,T^{-1}]]} B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$$

• Si $r = p-1$ et si $\lambda = \pm 1$ (cas exceptionnels), on a, pour tout n, des suites exactes

$$0 \to \mathrm{St} \otimes \chi\mu_\lambda \to I_{r,\chi}/(T-\lambda)^n \to M_{\lambda,n} \to 0$$

$$0 \to (T-\lambda)(B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})/(T-\lambda)^{n-1}) \to M_{\lambda,n} \to \chi\mu_\lambda \to 0$$

$$M_{\lambda,n} := \mathrm{Ker}\big(B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})/(T-\lambda)^n \to \mathrm{St} \otimes \chi\mu_\lambda\big)$$

Quand on passe de $n+1$ à n, la flèche $\mathrm{St}\otimes\chi\mu_\lambda \to \mathrm{St}\otimes\chi\mu_\lambda$ est 0 (et pas l'identité). En passant aux limites projectives, cela fournit, dans le cas générique, un isomorphisme

$$(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}} \cong k_L[[P]] \otimes_{k_L[[T,T^{-1}]]} B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$$

et dans les cas exceptionnels, un isomorphisme $(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}} \cong \varprojlim_n M_{\lambda,n}$, et une suite exacte

$$0 \to P\,k_L[[P]] \otimes_{k_L[[T,T^{-1}]]} B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}}) \to (I_{r,\chi})_{\mathscr{B}} \to \chi\mu_\lambda \to 0$$

On en déduit le résultat. □

petit6 ***Lemme 2.5.*** — ([**20**, Lemma 1.5.11]) *Si $P \in k_L[T]$ est irréductible et si $\mathscr{B}$ est le bloc que lui est associé, l'application naturelle $\alpha_{r,\chi} : Z_{\mathscr{B}} \to \mathrm{End}((I_{r,\chi})_{\mathscr{B}})$ est surjective sauf dans le cas $r = p-2$ et $P = T \pm 1$, correspondant à $\mathscr{B} = \{B(\chi\mu_{\pm 1}, \chi\mu_{\pm 1})\}$, où l'image est $k_L[[P^2]]$.*

A34 ***Corollaire 2.6.*** — ([**20**, Lemma 1.5.2]) *$\mathbf{V}((I_{r,\chi})_{\mathscr{B}})$ est un module de type fini sur $Z_{\mathscr{B}}$, de rang 2, si $P = T$ et « de rang 1 » si P n'a pas 0 comme racine.*

Démonstration. — Cela suit de ce que $\mathbf{V}((I_{r,\chi})_{\mathscr{B}}/P)$ est de rang fini sur $\mathrm{End}((I_{r,\chi})_{\mathscr{B}})/P$, et ce rang vaut 2 si $P = T$ (car $(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}}/P$ est supersingulière) et 1 sinon (car $(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}}/P$ est une série principale à des caractères près). □

A35 ***Remarque 2.7.*** — Dans le cas d'un bloc de la série principale, $\mathbf{V}((I_{r,\chi})_{\mathscr{B}})$ est la déformation non ramifiée d'un caractère. Dans le cas $\mathscr{B}$ supersingulier, on obtient une déformation « Fontaine-Laffaille » de $\mathbf{V}(\Pi_{r,\chi,T})$, cf. [**20**, Lemma 1.5.3].

PETIT10 **2.3. Complétion $\mathscr{B}$-adique des induites compactes : exactitude**

On fixe $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ un caractère lisse, et tous nos KZ-modules et G-modules sont supposés de caractère central δ. Si W est une représentation de KZ, de type fini sur $\mathscr{O}_L$, on pose

$$I(W) := \text{c-Ind}_{KZ}^G W$$

On va prouver que les foncteurs $W \mapsto \widetilde{I(W)}$ et $W \mapsto I(W)_{\mathscr{B}}$ sont exacts.

petit7 ***Lemme 2.8***. — *Soit π un $\mathscr{O}_L[G]$-module admissible, tué par p^N. Alors $\mathrm{Ext}^1_G(I_{r,\chi},\pi)$ est un $\mathscr{O}_L$-module de longueur fini.*

Démonstration. — Par réciprocité de Frobenius, on a $\mathrm{Ext}^1_G(I_{r,\chi},\pi)=\mathrm{Ext}^1_K(W_{r,\chi},\pi_{|K})$. On en déduit que

$$\mathrm{Ext}^1_G(I_{r,\chi},\pi)=H^1(K,W_{r,\chi}^\vee\otimes_{\mathscr{O}_L}\pi_{|K})$$

et l'énoncé résulte de ce que $W_{r,\chi}^\vee\otimes_{\mathscr{O}_L}\pi_{|K}$ est une représentation admissible de K (si M est un $\mathscr{O}_L[K]$-module admissible, alors $H^i(K,M)$ est de type fini sur $\mathscr{O}_L$, cf. [**28**, Lemma 3.13]). □

petit8 ***Lemme 2.9***. — *Soient π_1 un $\mathscr{O}_L[G]$-module de longueur finie, et E une extension de $I_{r,\chi}$ par π_1. Alors il existe $P\in k_L[T]$, non nul, tel que la restriction de E à $P(T)\cdot I_{r,\chi}$ soit scindée.*

Démonstration. — Le groupe $\mathrm{Ext}^1_G(I_{r,\chi},\pi_1)$ est un $k_L[T]$-module (via l'action sur $I_{r,\chi}$). Comm il est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, la classe de E est tuée par un élément non nul P de $k_L[T]$. On en déduit le résultat. □

petit9 ***Corollaire 2.10***. — *Soit π_2 un quotient de $I_{r,\chi}$, de longueur finie. Alors il existe un quotient π de E, contenant π_1, et dont π_2 soit un quotient.*

Démonstration. — Il existe $Q\in k_L[T]$ tuant π_2. On peut relever $PQ\cdot I_{r,\chi}$ dans E, et il suffit de prendre $\pi=E/(PQ\cdot I_{r,\chi})$. □

petit10 ***Proposition 2.11***. — *Soit W un $\mathscr{O}_L[KZ]$-module de torsion, et soient W_2 un quotient, W_1 le noyau de $W\to W_2$. Alors la suite $0\to\widetilde{I(W_1)}\to\widetilde{I(W)}\to\widetilde{I(W_1)}\to 0$ est exacte.*

Démonstration. — On se ramène au cas W_2 irréductible par récurrence sur la longueur de W. Si W_2 n'est pas irréductible, soit W_2'' un quotient irréductible. Soit W' le noyau de $W\to W_2''$ et W_2' celui de $W_2\to W_2''$. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \widetilde{I(W_1)} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \widetilde{I(W_1)} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \widetilde{I(W')} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{I(W)} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{I(W_2'')} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{I(W_2')} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{I(W_2)} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{I(W_2'')} \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, la colonne de gauche et la ligne du bas sont exactes par l'hypothèse de récurrence, et la ligne du milieu (et celle du bas) est exacte grâce au cas

irréductible traité ci-dessous ; il s'ensuit que la colonne du milieu est exacte, ce que l'on voulait.

On suppose donc W_2 irréductible (et donc $W_2 \cong W_{r,\chi}$ pour un unique (r,χ)). On peut écrire $\widetilde{I(W_1)}$ comme $\varprojlim_n \pi_{1,n}$ avec des flèches de transition surjectives. De même, $\widetilde{I(W_2)} = \varprojlim_n \pi'_{2,n}$ avec des flèches de transition surjectives. On va construire, par récurrence une suite de quotients π_n de $I(W)$, tels que π_n soit un quotient de π_{n+1} pour tout n, et que l'on ait une suite exacte $0 \to \pi_{1,n} \to \pi_n \to \pi_{2,n} \to 0$, où $\pi_{2,n}$ se surjecte sur $\pi'_{2,n}$. Cela permettra de conclure en passant à la limite projective sur la suite ci-dessus.

On suppose π_{n-1} construit. Soit $I_{1,n}$ le noyau de $I(W_1) \to \pi_{1,n}$, et soit $E_n = I(W)/I_{1,n}$. Alors E_n est une extension de $I(W_2)$ par $\pi_{1,n}$. Soit $\pi''_{2,n}$ un quotient de $I(W_2)$ se surjectant sur $\pi_{2,n-1}$ et $\pi'_{2,n}$. Il résulte du cor. 2.10 que l'on peut trouver un quotient π_n de E_n dont $\pi''_{2,n}$ soit un quotient. Il suffit alors de poser $\pi_{2,n} = \pi_n/\pi_{1,n}$. □

petit11 ***Corollaire 2.12.*** — *Soit W un $\mathscr{O}_L[KZ]$-module sans p-torsion.*

(i) *$\widetilde{I(W)}$ est sans p-torsion.*

(ii) *$\widetilde{I(W)} = \varprojlim_n \widetilde{I(W)}/p^n$, et $\widetilde{I(W)}/p^n = \widetilde{I(W/p^n)}$, pour tout n.*

Démonstration. — L'identification $\widetilde{I(W)} = \varprojlim_n \widetilde{I(W/p^n)}$ est immédiate. La multiplication par p^n induit un isomorphisme $I(W)/p^n \xrightarrow{\sim} p^n I(W)/p^{2n} I(W) \subset I(W)/p^{2n}$; elle induit donc aussi un isomorphisme $\widetilde{I(W)}/p^n \xrightarrow{\sim} p^n \widetilde{I(W)}/p^{2n} \widetilde{I(W)} \subset \widetilde{I(W)}/p^{2n}$. A la limite, on voit qu'un élément de p-torsion de $\varprojlim_n \widetilde{I(W)}/p^n$ est dans l'image de la multiplication par p^n, pour tout n. Le résultat s'en déduit car le sous-groupe p-divisible de $\widetilde{I(W)}$ est réduit à 0 (vu que c'est le cas pour tous les quotients de longueur finie de $I(W)$). □

petit12 ***Remarque 2.13.*** — En utilisant la décomposition suivant les blocs, on en déduit les mêmes résultats pour la complétion $\mathscr{B}$-adique.

3. Le complété universel de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$

PETIT5

Soit M un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module de rang 2 sur $L \otimes \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$, absolument irréductible en restriction au sous-groupe d'inertie de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (et donc $N = 0$), et soit $\mathrm{LL}(M)$ la L-représentation lisse de G associée par la correspondance de Langlands locale classique (elle est supercuspidale grâce à l'hypothèse faite sur M).

Si $a < b$ sont des entiers, notons $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ la représentation localement algébrique

$$\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) = \mathrm{LL}(M) \otimes \mathrm{Sym}^{b-a-1} \otimes \det{}^a$$

On suppose que le caractère central $\delta_M^{[a,b]}$ de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est unitaire.

D'après la classification des représentations supercuspidales de G, il existe une représentation irréductible σ_M de KZ (de dimension finie), telle que [5]

$$\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M = \mathrm{LL}(M) \quad \text{ou bien} \quad \mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M = \mathrm{LL}(M) \oplus (\mathrm{LL}(M) \otimes \mu_{-1})$$

On a donc le même résultat pour $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ en remplaçant σ_M par $\sigma_M^{[a,b]} = \sigma_M \otimes \mathrm{Sym}^{b-a-1} \otimes \det{}^a$:

$$\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]} = \mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \quad \text{ou bien} \quad \mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]} = \mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \oplus (\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \otimes \mu_{-1})$$

L'hypothèse selon laquelle le caractère central de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est unitaire implique qu'il existe des réseaux de $\sigma_M^{[a,b]}$ stables par KZ. Si σ^+ est un un tel réseau, on note $I_M(\sigma^+)$ l'image de $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma^+$ dans $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$; c'est un réseau de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ et $\widehat{I_M(\sigma^+)} = \varprojlim I_M(\sigma^+)/\varpi^n$ est un réseau du complété universel $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$.

A32 ***Proposition 3.1***. — $\mathrm{End}_{L[G]}(\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)) = L$.

Démonstration. — Comme $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est dense dans $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ et comme

$$\mathrm{End}_{L[G]}(\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)) = L$$

d'après le lemme de Schur classique, il suffit de prouver que les vecteurs localement algébriques de $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ sont réduits à $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$, et pour cela il suffit de prouver le même résultat pour $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$.

Notons X_n la double classe $KZ\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)KZ$ (cela correspond aux points à distance n du sommet central sur l'arbre de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Q}_p)$). Alors $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]} = \oplus_n \mathrm{ind}_{KZ}^{X_n} \sigma_M^{[a,b]}$, et le complété universel de $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$ est l'ensemble des $x = \sum_{n \geq 0} x_n$, avec $x_n \in \mathrm{ind}_{KZ}^{X_n} \sigma_M^{[a,b]}$, et $x_n \to 0$ quand $n \to \infty$ (i.e. $x_n \in p^{k_n} \mathrm{ind}_{KZ}^{X_n} \sigma^+$, avec $k_n \to +\infty$). L'application $x \mapsto R_n(x) = \sum_{i \leq n} x_i$ est K-équivariante et $x = \lim_{n \to \infty} R_n(x)$. Si x est K_r-algébrique, où $K_r = 1 + p^r \mathrm{M}_2(\mathbf{Z}_p)$, il en est de même de $R_n(x)$ pour tout n. Comme $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$ est admissible, les vecteurs K_r-algébriques dans $\oplus_{i \leq n} \mathrm{ind}_{KZ}^{X_i} \sigma_M^{[a,b]}$ ne dépendent pas de $n \geq n(r)$; on en déduit que $R_n(x) = R_{n(r)}(x)$ pour tout $n \geq n(r)$, et donc que $x = R_{n(r)}(x) \in \mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$. En résumé, les vecteurs localement algébriques du complété universel de $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$ sont réduits à $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$.

Le résultat s'en déduit. □

Soit Π un $L[G]$-banach unitaire de longueur finie, contenant $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ comme sous-espace dense. Par propriété universelle de $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ l'injection $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \hookrightarrow \Pi$ se prolonge en une application continue $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M) \to \Pi$. Comme $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ n'est pas admissible, il n'y a aucune raison *a priori* pour que l'image soit fermée, mais on a le résultat suivant.

5. On note ind := c-Ind l'induite à support compact.

A12 ***Proposition 3.2.*** — *L'application* $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ *est surjective, et donc* Π *est un quotient de* $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$.

Démonstration. — Le fait que $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ est surjective est une conséquence du fait que Π est résiduellement de longueur finie **[23, 11]** : on fixe un réseau Π^+ de Π, et on note r la longueur de Π^+/ϖ. Comme $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est dense dans Π, on peut trouver $v_1, \dots, v_r \in \mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \cap \Pi^+$ dont les images modulo ϖ engendrent Π^+/ϖ. Mais alors le sous-$\mathscr{O}_L[G]$-module W de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ engendré par $v_1, \dots, v_r$ est de type fini, et donc son complété ϖ-adique $\widehat{W}$ peut être choisi comme boule unité de $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$. Par construction $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ envoie $\widehat{W}$ dans Π^+ et induit une surjection modulo ϖ. On en déduit, puisque tout est complet pour la topologie ϖ-adique, que $\widehat{W} \to \Pi^+$ est surjective, ce qui permet de conclure. □

4. Représentations de type M

On va associer un certain nombre d'objets à un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module M satisfaisant les hypothèses du chap. 3 (en plus de la représentation $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ déjà introduite).

PETIT3 **4.1. Les représentations $V_{M,\mathscr{L}}$ et $\Pi_{M,\mathscr{L}}$**

Soit

$$M_{\mathrm{dR}} = (\overline{\mathbf{Q}}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} M)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}$$

C'est un L-module de rang 2. On voit la droite projective $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})$ comme une courbe analytique définie sur L. Si $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})(\overline{\mathbf{Q}}_p)$, on note $L_{\mathscr{L}}$ le corps de définition de $\mathscr{L}$ (c'est une extension finie de L). On note $\mathrm{Fil}^\bullet_{\mathscr{L}}$ la filtration sur $L_{\mathscr{L}} \otimes_L M_{\mathrm{dR}}$ définie par

$$\mathrm{Fil}^i_{\mathscr{L}} = \begin{cases} L_{\mathscr{L}} \otimes_L M_{\mathrm{dR}} & \text{si } i \leq -b, \\ \mathscr{L} & \text{si } -b+1 \leq i \leq -a, \\ 0 & \text{si } i \geq -a+1. \end{cases}$$

Alors $(L_{\mathscr{L}} \otimes_L M, \mathrm{Fil}^\bullet_{\mathscr{L}})$ est faiblement admissible, et on note $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ la représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ associée **[12]** :

$$V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}} := \mathrm{Ker}\big[(\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} (L_{\mathscr{L}} \otimes_L M))^{\varphi=1} \to ((\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} (L_{\mathscr{L}} \otimes_L M_{\mathrm{dR}}))/\mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L}})\big]$$

C'est une $L_{\mathscr{L}}$-représentation de dimension 2, potentiellement cristalline à poids a et b, avec $D_{\mathrm{pst}}(V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}) = L_{\mathscr{L}} \otimes_L M$ (en particulier $V_{M,\mathscr{L}}$ est absolument irréductible puisque M l'est). Réciproquement, une représentation potentiellement cristalline à poids a et b, dont le D_{pst} est isomorphe à $L_{\mathscr{L}} \otimes_L M$, est isomorphe à $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ pour un unique choix de $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})(L_{\mathscr{L}})$.

On note $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ la représentation de G associée à $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ par la représentation de Langlands locale p-adique :

$$\mathbf{V}(\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}) = V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}, \quad (\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}})^{\mathrm{alg}} = \mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$$

PETIT4

4.2. Déformations infinitésimales de $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$ et $\Pi_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$

Fixons $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ et soit $L_{\mathscr{L}}$ le corps de définition de $\mathscr{L}$.

4.2.1. Déformations de $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$. — Choisissons une base e_1, e_2 de M_{dR} sur L, avec $e_1 \notin \mathscr{L}$, de telle sorte que $\mathscr{L}$ soit engendrée par $e_2 + z(\mathscr{L})e_1$, avec $L_{\mathscr{L}} = L(z(\mathscr{L}))$.

Si $n \geq 0$, soit $M_{\mathscr{L},n}^{[a,b]}$ le $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module filtré, de rang 2 sur $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$, défini par

$$M_{\mathscr{L},n}^{[a,b]} = (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \otimes M$$

en tant que $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module, la filtration $\mathrm{Fil}_{\mathscr{L},n}^{\bullet}$ sur

$$(\overline{\mathbf{Q}}_p \otimes M_{\mathscr{L},n}^{[a,b]})^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}} = (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \otimes M_{\mathrm{dR}}$$

étant définie par

$$\mathrm{Fil}_{\mathscr{L},n}^{i} = \begin{cases} (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \otimes M_{\mathrm{dR}} & \text{si } i \leq -b, \\ (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \cdot (e_2 + (z(\mathscr{L}) + T)e_1) & \text{si } -b+1 \leq i \leq -a, \\ 0 & \text{si } i \geq -a+1. \end{cases}$$

Les $M_{\mathscr{L},n}^{[a,b]}$ sont faiblement admissibles, et

$$V_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]} := \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(M_{\mathscr{L},n}^{[a,b]})$$

est l'unique déformation infinitésimale d'ordre n de $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$ qui est de Rham (cf. [**14**]).

petit2

Remarque 4.1. — (i) En adaptant les méthodes de [**6**, § 5.1], on peut construire une déformation de Rham de $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$ dans un voisinage p-adique, et pas juste dans un voisinage formel.

(ii) Le th. 5.4 et le lemme 5.3 ci-dessous donnent une construction d'une déformation au-dessus de tout l'espace des représentations de Rham de type (M, a, b).

4.2.2. Déformations de $\Pi_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$. — Soit V une $(L[T]/T^{k+1})$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de rang 2, avec $\mathrm{End}\, V = L[T]/T^{k+1}$ dont le déterminant est à valeurs dans $L \subset L[T]/T^{k+1}$ (condition qui sort naturellement quand on regarde des déformations à déterminant fixé). Donc V est une extension successive de k copies de $V_0 = L \otimes_{L[T]/T^{k+1}} V$, l'extension $V_0 \to (L[T]/T^2) \otimes_{L[T]/T^{k+1}} V \to V_0$ étant non scindée et $\mathrm{End}\, V_0 = L$.

Soient Δ le (φ, Γ)-module sur l'anneau de Robba associé à V et Δ_0 celui associé à V_0. On peut réaliser V comme un quotient d'une famille de représentations de dimension 2, et les techniques des n°s II.4.2 et II.3.1 de [**7**] permettent de définir un faisceau G-équivariant $U \mapsto \Delta \boxtimes U$ sur $\mathbf{P}^1$ et de définir une représentation $\mathbf{\Pi}(V)$ vérifiant $\mathbf{V}(\mathbf{\Pi}(V)) = V$ et vivant dans une suite exacte

$$0 \to \mathbf{\Pi}(V)^* \otimes ((x|x|)^{-1} \det V) \to \Delta \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \mathbf{\Pi}(V) \to 0$$

Alors $\mathbf{\Pi}(V)$ est une $(L[T]/T^{k+1})$-représentation de G, extension successive de k copies de $\mathbf{\Pi}(V_0)$.

En appliquant ce qui précède à $V = V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$, on construit une représentation $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ telle que :

$$\mathbf{V}(\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}) = V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$$

Alors $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ est une $(L[T]/T^{n+1})$-représentation de G, extension successive de copies de $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$, et nous allons montrer que $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ est l'unique déformation infinitésimale d'ordre n de $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ qui est complétée de ses vecteurs localement algébriques et que l'on a :

$$(\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n})^{\mathrm{alg}} = (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \otimes \mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$$

Théorème 4.2. — *Soit V une $(L[T]/T^{n+1})$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ comme ci-dessus. Alors $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{alg}}$ est dense dans $\mathbf{\Pi}(V)$ si et seulement si V est de Rham à poids de Hodge-Tate non tous égaux.*

Remarque 4.3. — (i) Si $n = 0$ (i.e. si $V = V_0$), ce résultat est prouvé dans [**7**, chap. VI] (avec des preuves simplifiées dans [**13, 8**]) ; si $n = 1$, il est prouvé dans [**14**].

(ii) Soit Π une L-représentation unitaire de G dont toutes les composantes de Jordan-Hölder sont isomorphe à Π_0. Supposons Π_0^{alg} irréductible et dense dans Π_0. Alors une récurrence immédiate (utilisant la densité de $(\Pi/\Pi_0)^{\mathrm{alg}}$ dans Π/Π_0 si Π^{alg} est dense dans Π) sur la longueur de Π montre que Π^{alg} est dense dans Π si et seulement si $\mathrm{lg}(\Pi^{\mathrm{alg}}) = \mathrm{lg}(\Pi)$, et que, si c'est le cas, $\mathrm{lg}(W^{\mathrm{alg}}) = \mathrm{lg}(W)$ pour tout sous-quotient W de Π.

Démonstration. — La preuve du cas $n = 0$ que l'on trouve dans [**8**] s'étend presque verbatim au cas n quelconque. Nous allons en esquisser les grandes lignes.

Le cas $n = 0$ permet de supposer que V_0 est de Rham, à poids de Hodge-Tate $k_1 < k_2$. La condition $\mathrm{End}\, V = L[T]/T^{n+1}$ permet d'adapter la preuve de [**8**, prop. 2.2] pour obtenir $A_1, A_2 \in L[T]/T^{n+1}$ vérifiant $A_1 + A_2 = k_1 + k_2$ (grâce à la condition sur le déterminant de V) et $(\nabla - A_1)(\nabla - A_2)\Delta \subset t\Delta$ (on a donc $A_i = k_i + P_i$ avec $P_i \in TL[T]$, si $i = 1, 2$). La preuve de [**8**, th. 2.15] montre que le module qui permet de décrire (au moins en tant que module sous l'action du borel) les vecteurs localement algébriques de $\mathbf{\Pi}(V)$ est $(\Delta^-_{\mathrm{dif}})^{U(\mathfrak{g})\text{-fini}}$; plus précisément, en adaptant cette preuve, on montre que le $L_\infty[t]$-module $(\Delta^-_{\mathrm{dif}})^{U(\mathfrak{g})\text{-fini}}$ est de longueur $(k_2 - k_1)\mathrm{lg}(\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{alg}})$. La preuve de [**8**, prop. 2.7] montre alors que $\mathrm{lg}_{L_\infty[t]}(\Delta^-_{\mathrm{dif}})^{U(\mathfrak{g})\text{-fini}})$ est la longueur du quotient par le plus grand sous-$L_\infty[[t]]$-réseau N de Δ^+_{dif} vérifiant $(\nabla - A_1)(\nabla - A_2)N \subset tN$.

Il existe une base $e_{0,1}, e_{0,2}$ de $\Delta^+_{0,\mathrm{dif}}$ vérifiant $\nabla(e_{0,1}) = k_1 e_{0,1}$ et $\nabla e_{0,2} = k_2 e_{0,2}$. Les seuls sous-$L_\infty[[t]]$–modules d'indice fini de $\Delta^+_{0,\mathrm{dif}}$ vérifiant $(\nabla - k_1)(\nabla - k_2)N \subset tN$ sont $\Delta^+_{0,\mathrm{dif}}$ et le module $N_{0,\mathrm{dif}}$ engendré par $e_{0,2}$ et $t^{k_2-k_1}e_{0,1}$.

On peut relever $e_{0,1}, e_{0,2}$ en une base e_1, e_2 de Δ^+_{dif} vérifiant $\nabla(e_1) = A_1 e_1$ et $\nabla(e_2) = A_2 e_2 + Bt^{k_2-k_1}e_1$ avec $B \in TL_\infty[T]$. La représentation V est de Rham si et seulement si $A_1 = k_1$, $A_2 = k_2$ et $B = 0$.

Posons $L_\infty^{(n)} = L_\infty[T]/T^{n+1}$. Les seuls sous $L_\infty^{(n)}[[t]]$-sous-modules d'indice fini de Δ_{dif}^+ vérifiant $(\nabla - A_1)(\nabla - A_2)N \subset (t,T)N$ sont les $N_{\mathrm{dif}} + T^i\Delta_{\mathrm{dif}}^+$, où N_{dif} est le module engendré par e_2 et $t^{k_2-k_1}e_1$. Parmi ceux-ci, le seul qui peut fournir des vecteurs localement algébriques de la bonne longueur est N_{dif}, i.e. $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{alg}}$ est dense dans $\mathbf{\Pi}(V)$ si et seulement si $(\nabla - A_1)(\nabla - A_2)N_{\mathrm{dif}} \subset tN_{\mathrm{dif}}$. Cette dernière condition équivaut à $(\nabla - A_2)t^{k_2-k_1}e_1 \in tN_{\mathrm{dif}}$ et $(\nabla - A_2)e_2 \in tN_{\mathrm{dif}}$.

• La première des deux conditions équivaut à $A_1 - A_2 + k_2 - k_1 = 0$, et comme $A_1 + A_2 = k_1 + k_2$, cela équivaut à $A_1 = k_1$ et $A_2 = k_2$.

• La seconde équivaut à $B = 0$.

La conjonction des deux conditions équivaut donc à ce que V soit de Rham, ce qui permet de conclure. □

Corollaire 4.4. — *$\Pi_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]}$ est la complétée de ses vecteurs localement algébriques et*

Justifier le second point

$$(\Pi_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]})^{\mathrm{alg}} = (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \otimes \mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$$

petit3 ***Remarque 4.5***. — En fait, si $\lambda \in (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1})$ est inversible, alors $\lambda \cdot \mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est déjà dense dans $\Pi_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]}$ car les seuls sous-objets stricts de $\Pi_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]}$ sont les $T^k\Pi_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]}$ pour $1 \leq k \leq n-1$ (cela se voit en appliquant le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ et en utilisant le fait que les seuls sous-objets stricts de $V_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]}$ sont les $T^kV_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]}$, cf. lemme 5.14 et définition de $V_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]}$), et $\lambda \cdot \mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ n'est inclus dans aucun. Il résulte donc de la prop. 3.2 que $\Pi_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]}$ est un quotient de $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$.

Proposition 4.6. — *$\Pi_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]}$ est l'unique déformation infinitésimale d'ordre n de $\Pi_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$ qui est complétée de ses vecteurs localement algébriques.*

Démonstration. — Posons $\Pi = \Pi_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$ et $\Pi_n := \Pi_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]}$. Nous allons prouver, par récurrence sur n, que Π_n est, à isomorphisme près, l'unique déformation d'ordre n de $\Pi = \Pi_0$ dans laquelle Π_n^{alg} est dense.

Si E est une telle déformation, une petite récurrence montre que les longueurs de E et E^{lisse} sont égales (car $(E/\Pi)^{\mathrm{lisse}}$ est dense dans E/Π), et que tout sous-objet F de E a encore des vecteurs localement algébriques denses (et $\lg(F^{\mathrm{lisse}}) = \lg(F)$). Il s'ensuit que $\mathrm{Ker}(E \to \Pi)$ et E/Π sont isomorphes à Π_n par l'hypothèse de récurrence et, si on choisit un isomorphisme $E/\Pi \cong \mathrm{Ker}(E \to \Pi)$, cela fournit un endomorphisme nilpotent $T : E \to E$, et $T^iE \cong \Pi_{n-1-i}$ si $i \geq 1$ par l'hypothèse de récurrence. En particulier, E est muni d'une structure de $L[T]$-module et on a $\mathrm{End}\, E \cong L[T]/T^{n+1}$. La construction de Π_n donne une telle structure de $L[T]$-module et $\Pi_{n+1}/T\Pi_{n+1} = \Pi$ et $T\Pi_{n+1} \cong \Pi_n$.

Notons $\mathrm{Ext}_g^1(\Pi, \Pi_n) \subset \mathrm{Ext}^1(\Pi, \Pi_n)$ l'ensemble (c'est en fait un sous-L-module comme on le voit en revenant à la définition de l'addition et de la multiplication par $\lambda \in L$) des extensions ayant des vecteurs localement algébriques denses.

Si $\alpha \in \operatorname{End}\Pi_n$, alors α induit une flèche $\operatorname{Ext}^1(\Pi,\Pi_n) \to \operatorname{Ext}^1(\Pi,\Pi_n)$, ce qui munit $\operatorname{Ext}^1(\Pi,\Pi_n)$ d'une structure de module sur $\operatorname{End}\Pi_n \cong L[T]/T^{n+1}$. La classe de Π_{n+1} n'est pas tuée par T^n comme on le voit en appliquant **V**. On conclut grâce au lemme suivant. □

Lemme 4.7. — $\operatorname{Ext}^1_g(\Pi,\Pi_n)$ *est un* $L[T]/T^{n+1}$*-module de rang* 1 *engendré par la classe de* Π_{n+1}

Démonstration. — La preuve se fait par récurrence sur n. Par l'hypothèse de récurrence, $\operatorname{Ext}^1_g(\Pi,\Pi_{n-1})$ est un $L[T]/T^n$-module de rang 1. Par ailleurs, la classe de Π_{n+1} engendre un sous-$L[T]/T^{n+1}$-module libre de rang 1 et on a une suite exacte (la flèche de gauche vient de l'isomorphisme $\Pi_{n-1} \cong T\Pi_n$ et l'exactitude vient du fait que tout sous-objet d'une g-extension de Π par Π_n a des vecteurs localement algébriques denses et donc que $\operatorname{Ext}^1_g(\Pi,\Pi_n) \cap \operatorname{Ext}^1(\Pi,T\Pi_n) = \operatorname{Ext}^1_g(\Pi,T\Pi_n)$)

$$\operatorname{Ext}^1_g(\Pi,\Pi_{n-1}) \to \operatorname{Ext}^1_g(\Pi,\Pi_n) \to \operatorname{Ext}^1_g(\Pi,\Pi)$$

et des isomorphismes $\operatorname{Ext}^1_g(\Pi,\Pi_{n-1}) \cong L[T]/T^n$ et $\operatorname{Ext}^1_g(\Pi,\Pi) \cong L$. On en déduit le résultat. □

5. Complétion $\mathscr{B}$-adique et anneaux de Kisin

PETIT11

5.1. Les $R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$-modules $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$ et $\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$

PETIT12

Notons $I_M(\sigma^+)_{\mathscr{B}}$ le complété $\mathscr{B}$-adique de $I_M(\sigma^+)$ (cf. § 3). On définit alors le complété $\mathscr{B}$-adique de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ par :

$$\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M) := L \otimes_{\mathscr{O}_L} I_M(\sigma^+)_{\mathscr{B}}$$

(le résultat ne dépend pas du choix de σ^+). Posons

$$\delta = \delta^{[a,b]}_M, \quad I^+ := I_M(\sigma^+)_{\mathscr{B}}$$

Alors I^+ est une limite projective d'objets Π_i de $\operatorname{Tors}^\delta_{\mathscr{B}} G$. On a donc une action de $Z^\delta_{\mathscr{B}}$ sur I^+ et sur $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$. Par fonctorialité, cela fournit une action de $Z^\delta_{\mathscr{B}}$ sur $\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$. Cette action coïncide avec l'action naturelle de $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}$, via l'isomorphisme du th. 1.6.

On note $R^{[a,b],+}_{M,\mathscr{B}}$ le quotient à travers lequel $Z^\delta_{\mathscr{B}}$ agit sur I^+ (notons que $R^{[a,b],+}_{M,\mathscr{B}}$ est sans p-torsion puisque I^+ l'est, cf. cor. 2.12), et on pose

$$R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} := R^{[a,b],+}_{M,\mathscr{B}}[\tfrac{1}{p}]$$

A38 ***Remarque 5.1.*** — On verra plus loin que $R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$ est l'anneau des fonctions analytiques bornées sur un ouvert strict $U^{\mathrm{an}}_{M,\mathscr{B}}$ de la droite projective analytique $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})^{\mathrm{an}}$, et donc est très loin d'être réduit à L. Or $R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$ agit fidèlement sur $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$, ce qui contraste avec le fait que $\operatorname{End}_{L[G]}\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M) = L$ (prop. 3.1).

On peut envisager les choses de la manière suivante (et il est probable que la théorie de Dotto-Emerton-Gee [**15**] rende cette vision correcte). Tous les objets ci-dessus « vivent sur $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})$ », i.e. $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ est un faisceau sur $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})$ et $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$ est le localisé-complété de $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ en l'ouvert $U^{\mathrm{an}}_{M,\mathscr{B}}$. Alors $\mathrm{End}_{L[G]}\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ est un fibré en droites sur $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})$, qui est trivial ce qui explique que $\mathrm{End}_{L[G]}\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M) = L$ (sections globales constantes).

Posons

$$\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} := \mathbf{V}(\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M))$$

Alors $R^{[a,b],+}_{M,\mathscr{B}}$ agit, par fonctorialité de $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$, sur $\mathbf{V}(I^+)$ et $R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$ agit sur $\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$.

petit13 ***Lemme 5.2.*** — *$\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$ est de type fini sur $R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$.*

Démonstration. — $I_M(\sigma^+)$ est un facteur direct de $I(\sigma^+)$ et donc I^+ est un facteur direct de $I(\sigma^+)_{\mathscr{B}}$. Il suffit donc de prouver que $\mathbf{V}(I(\sigma^+)_{\mathscr{B}})$ est de type fini sur $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}$. On a $k_L \otimes \mathbf{V}(I(\sigma^+)_{\mathscr{B}}) = \mathbf{V}(k_L \otimes I(\sigma^+)_{\mathscr{B}}) = \mathbf{V}(I(k_L \otimes \sigma^+)_{\mathscr{B}})$ (les morphismes de transitions entre les objets entrant dans la définition des complétés $\mathscr{B}$-adiques sont surjectifs, et donc les $\mathrm{R}^1 \lim$ s'annulent). Maintenant $k_L \otimes \sigma^+$ est une extension successive finie d'induites compactes $I(W)$, où les W sont de la forme $W_{r,\chi}$, et le cor. 2.6 implique que $k_L \otimes \mathbf{V}(I(\sigma^+)_{\mathscr{B}})$ est de type fini sur $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}$. Il en est donc de même de $\mathbf{V}(I(\sigma^+)_{\mathscr{B}})$. □

PETIT13 **5.2. Spécialisation en un point de** $\mathrm{Spec}\, R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$

On note $U_{M,\mathscr{B}}$ l'ensemble des $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ tels que $\Pi_{M,\mathscr{L}} \in \mathrm{Ban}^{\delta}_{\mathscr{B}} G$; c'est aussi l'ensemble des $\mathscr{L}$ tels que $V_{M,\mathscr{L}}$ ait pour réduction $\rho_{\mathscr{B}}$. Comme nous le verrons, $U_{M,\mathscr{B}}$ est l'ensemble des points classiques d'un ouvert analytique $U^{\mathrm{an}}_{M,\mathscr{B}}$ de la droite projective $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})^{\mathrm{an}}$. Soient

$$X = \mathrm{Spec}\, R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}[\tfrac{1}{p}], \quad X_M = \mathrm{Spec}\, R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$$

On note aussi X^{an} et X^{an}_M les espaces analytiques associés à X et X_M : X^{an} est de dimension 3 et, comme nous le verrons, X^{an}_M est de dimension 1 (isomorphe à l'ouvert $U^{\mathrm{an}}_{M,\mathscr{B}}$ de $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})^{\mathrm{an}}$).

On note $\mathrm{Ban}^{\delta} G$ la catégorie des $L[G]$-banachs unitaires de caractère central δ, de longueur finie. On note $\mathrm{Ban}^{\delta}_{\mathscr{B}} G$ la sous-catégorie de $\mathrm{Ban}^{\delta} G$ des Π dont la réduction est un objet de $\mathrm{Tors}^{\delta}_{\mathscr{B}}$. D'après Paškūnas [**23**], tout objet Π de $\mathrm{Ban}^{\delta}_{\mathscr{B}} G$ a une décomposition $\Pi = \oplus_x \Pi_x$, où la somme porte sur $x \in X$ fermé, $\Pi_x = 0$ sauf pour un nombre fini de x et toutes les composantes de Jordan-Hölder de Π_x sont élément du bloc $\mathscr{B}_x$ de $\mathrm{Ban}^{\delta} G$ correspondant à x (si le pseudo-caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ correspondant à x est le caractère d'une représentation irréductible, alors $\mathscr{B}_x$ a un unique élément, si ce pseudo-caractère est $\chi_1 \oplus \chi_2$, ce bloc est constitué des composantes de Jordan-Hölder

des induites continues de $\chi_1 \otimes \chi_2\varepsilon^{-1}$ et $\chi_2 \otimes \chi_1\varepsilon^{-1}$ – ces représentations sont toutes les deux irréductibles sauf si $\chi_2 = \chi_1\varepsilon^{\pm 1}$).

Si $x \in X_M$, notons $\mathfrak{m}_x$, l'idéal maximal de $R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$ qui lui est associé, et L_x le corps résiduel $R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}/\mathfrak{m}_x$.

petit14 ***Lemme 5.3.*** — (i) *Si $x \in X_M$, il existe $\mathscr{L}(x) \in U_{M,\mathscr{B}}$ tel que*

$$L_x \otimes_{R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}} \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M) \cong \Pi_{M,\mathscr{L}(x)}, \quad L_x \otimes_{R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}} \rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} \cong V_{M,\mathscr{L}(x)}$$

(ii) *Plus généralement, si $n \geq 1$, alors*

$$(R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}/\mathfrak{m}_x^n) \otimes_{R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}} \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M) \cong \Pi_{M,\mathscr{L}(x),n}, \quad (R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}/\mathfrak{m}_x^n) \otimes_{R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}} \rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} \cong V_{M,\mathscr{L}(x),n}$$

(iii) *$x \mapsto \mathscr{L}(x)$ est une bijection de X_M sur $U_{M,\mathscr{B}}$.*

Démonstration. — Par construction, $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est dense dans $\Pi_x = L_x \otimes \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$. Donc le bloc de $\mathrm{Ban}^{\delta}_{\mathscr{B}} G$ correspondant à x contient un unique $\Pi_{M,\mathscr{L}(x)}$, avec $\mathscr{L}(x) \in \mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})(L_x)$. Comme $V_{M,\mathscr{L}(x)}$ est irréductible, ce bloc est réduit à $\Pi_{M,\mathscr{L}(x)}$ et donc $\Pi_x \cong \Pi^{\oplus d}_{M,\mathscr{L}(x)}$, avec $d \geq 1$ car $\Pi_{M,\mathscr{L}(x)}$ est un quotient de $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$. Comme $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est dense dans Π_x, on a $d = 1$, ce qui prouve le (i).

On déduit de la rem. 5.18 que $(R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}/\mathfrak{m}_x^2) \otimes \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$ a pour quotient $\Pi_{M,\mathscr{L}(x),2}$. Par ailleurs $(R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}/\mathfrak{m}_x^2) \otimes \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$ est une extension de $\Pi_{M,\mathscr{L}(x)}$ par $\Pi^{\oplus d}_{M,\mathscr{L}(x)}$, avec $d \geq 1$ d'après ce qui précède. Comme $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est dense dans cette extension et que le groupe des extensions de $\Pi_{M,\mathscr{L}(x)}$ par $\Pi_{M,\mathscr{L}(x)}$ ayant des vecteurs algébriques denses est, d'après **[14]**, de dimension 1, on en déduit que le cosocle contient $\Pi^{\oplus(1+d-1)}_{M,\mathscr{L}(x)}$ et la densité de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ implique $1 + d - 1 \leq 1$, et donc $d = 1$. On en déduit le (ii) pour $n = 2$; le cas général se prouve par récurrence en utilisant le fait que $\Pi_{M,\mathscr{L}(x),n}$ est un quotient de $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$ grâce à la rem. 5.18.

Rajouter des détails sur la récurrence.

Enfin, le (iii) est une conséquence de ce qui précède et de ce que $\mathscr{L} \mapsto V_{M,\mathscr{L}}$ est injective. □

5.3. La propriété universelle de $\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$

PETIT14
petit15 ***Théorème 5.4.*** — (i) *$\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$ est localement libre sur X_M, de rang 2.*

(ii) *X_M est lisse, réduit, purement de dimension 1.*

Démonstration. — Posons, pour simplifier, $R := R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$, $\rho := \rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$. Alors R agit fidèlement sur $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$ et donc aussi sur ρ car $\mathbf{V}$ ne tue que les représentations de dimension finie, et aucun des blocs qui apparaissent n'en contient.

Notons $\widehat{\rho}_x$ le complété du localisé de ρ en x. Comme ρ est de type fini sur R, on a une injection R-linéaire $\rho \hookrightarrow \prod_x \widehat{\rho}_x$, et comme R agit fidèlement sur ρ, il agit fidèlement sur $\prod_x \widehat{\rho}_x$. Il résulte du (ii) du lemme 5.3 que $\widehat{\rho}_x$ est libre de rang 2 sur $L_x[[T_x]]$ (car $V_{M,\mathscr{L}(x),n}$ est libre de rang 2 sur $L_x[T_x]/T_x^n$), et comme ρ_x est irréductible, on a

$\mathrm{End}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(\widehat{\rho}_x) \cong L_x[[T_x]]$. On en déduit une injection d'anneaux $R \hookrightarrow \prod_x L_x[[T_x]]$, ce qui prouve que R est réduit.

Comme ρ_x est de rang 2, pour tout x (lemme 5.3 (i)), et que ρ est de type fini sur R, cela implique que ρ est localement libre, de rang 2, sur X_M. On en déduit, en utilisant ce qui précède, que le complété $\widehat{R}_x$ de l'anneau local de X_M en x est $L_x[[T_x]]$, ce qui prouve que X_M est lisse, purement de dimension 1. □

Il résulte de [**3**, § 5.3] que l'application $x \mapsto \mathscr{L}(x)$ ci-dessus est la restriction aux points classiques d'une application analytique $X_M^{\mathrm{an}} \to \mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})^{\mathrm{an}}$. L'ensemble $U_{M,\mathscr{B}}$ ci-dessus est donc l'ensemble des points classiques d'un ouvert analytique $U_{M,\mathscr{B}}^{\mathrm{an}}$ de $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})^{\mathrm{an}}$, et $x \mapsto \mathscr{L}(x)$ identifie X_M^{an} à $U_{M,\mathscr{B}}^{\mathrm{an}}$ et $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ à l'anneau des fonctions analytiques bornées sur $U_{M,\mathscr{B}}^{\mathrm{an}}$. Comme $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est un quotient de $R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}$ qui est de type fini, $U_{M,\mathscr{B}}^{\mathrm{an}}$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, et comme un ouvert analytique connexe de $\mathbf{P}^1$ est un disque ouvert privé d'un nombre fini de disques fermés [**21, 22, 27**], on en déduit les résultats suivants.

petit16 ***Corollaire 5.5***. — (i) *$R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est un produit fini d'anneaux principaux.*

(ii) *$\rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est libre sur $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$, de rang 2.*

petit31 ***Corollaire 5.6***. — *Si E est un quotient de $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ de degré fini sur L, alors $E \otimes \rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est une E-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de réduction*[6] *$\rho_{\mathscr{B}}^{\oplus[L:E]}$, potentiellement semi-stable à poids a et b, dont le D_{pst} est $E \otimes M$.*

Démonstration. — Cela résulte du (ii) du lemme 5.3 et du théorème des restes chinois. □

Réciproquement, on a le résultat suivant qui montre que $\rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est universelle pour ces propriétés.

petit17 ***Théorème 5.7***. — *Si E est une L-algèbre commutative de dimension d, et si $\rho : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(E)$ a pour réduction $\rho_{\mathscr{B}}^{\oplus d}$, est potentiellement semi-stable à poids a et b, et si $D_{\mathrm{pst}}(\rho) = E \otimes M$, alors il existe un morphisme $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]} \to E$ tel que $\rho = E \otimes \rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$.*

Démonstration. — Si E est un corps, alors ρ est de la forme $E \otimes_{L_x} V_{M,\mathscr{L}(x)}^{[a,b]}$, avec $x \in U_{M,\mathscr{B}}$, et comme $V_{M,\mathscr{L}(x)}^{[a,b]} = L_x \otimes \rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$, on obtient le résultat dans ce cas.

Si $E = E_0[I]/T^k$, où E_0 est un corps, alors $\rho_i := (T^i E/T^{i+1}E) \otimes_E \rho$ est de la forme $E_0 \otimes_{L_x} V_{M,\mathscr{L}(x)}^{[a,b]}$, avec $x \in U_{M,\mathscr{B}}$ indépendant de i. L'extension

$$0 \to \rho_i \to (T^{i-1}E/T^{i+1}E) \otimes_E \rho \to \rho_{i-1} \to 0$$

6. Par définition, c'est la semi-simplifiée de $k_L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Lambda$ (vue comme k_L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$), où Λ est n'importe quel $\mathscr{O}_L$-réseau stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

de $E_0 \otimes_{L_x} V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x)}$ par elle-même est indépendante de i car la multiplication par T sur ρ induit un isomorphisme permettant de passer de i à $i+1$. Comme le groupe des extensions de Rham est de dimension 1, il y a deux cas possibles :

– toutes ces extensions sont triviales et $\rho = E \otimes_{E_0} \rho_0$, et on conclut comme ci-dessus.

– ces extensions sont non triviales et $\rho = E_0 \otimes_{L_x} V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x),k}$, et on déduit le résultat dans ce cas de ce que $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x),k} = (R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}/\mathfrak{m}_x^k) \otimes \rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$.

Si E est un quotient de $E_0[T_1,\dots,T_r]/(T_1,\dots,T_r)^k$, en raisonnant comme ci-dessus et en utilisant de nouveau de le groupe de extensions de Rham est de dimension 1, on prouve que $\rho = E \otimes_{L_x} V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x),k}$ ou bien $\rho = E \otimes_{E'} \rho'$, avec E' quotient de E de la forme $E_0[I]/T^k$ et $\rho' \cong E_0 \otimes_{L_x} V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x),k}$.

Le cas général s'en déduit en décomposant E comme un produit d'algèbres quotients de $E_0[T_1,\dots,T_r]/(T_1,\dots,T_r)^k$. □

5.4. Applications à la conjecture de Breuil-Mézard

Dans l'énoncé géométrique de la conjecture de Breuil-Mézard [**5, 16**], au lieu de fixer le D_{pst}, on fixe seulement la restriction à l'inertie et le déterminant, ce qui fournit a priori deux D_{pst} possibles puisqu'on peut tordre par le caractère non ramifié μ_{-1} d'ordre 2 (rien n'empêche que ces deux D_{pst} soient, en fait, isomorphes). Le résultat est, qu'au lieu de considérer le sous-objet $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ de $\mathrm{ind}^G_{KZ}\sigma^{[a,b]}_M$ (cf. § 3), on considère à la place $\mathrm{ind}^G_{KZ}\sigma^{[a,b]}_M$ en entier.

On pose donc

$$\begin{aligned} M' = M \quad &\text{ou} \quad M' = M \oplus (M \otimes \mu_{-1}) \\ \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M') = \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M) \quad &\text{ou} \quad \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M') = \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M) \oplus (\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M) \otimes \mu_{-1}) \\ R^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} = R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} \quad &\text{ou} \quad R^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} = R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} \times R^{[a,b]}_{M\otimes\mu_{-1},\mathscr{B}} \\ \rho^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} = \rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} \quad &\text{ou} \quad \rho^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} = \rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} \oplus \rho^{[a,b]}_{M\otimes\mu_{-1},\mathscr{B}} \end{aligned}$$

suivant que $M = M \otimes \mu_{-1}$ ou que $M \neq M \otimes \mu_{-1}$.

Si σ est une k_L-représentation irréductible de K, on note $m^{[a,b]}_M(\sigma)$ la multiplicité de σ dans la réduction de $\sigma^{[a,b]}_M$. L'énoncé suivant est une forme de la version géométrique de la conjecture de Breuil-Mézard.

BM1 ***Proposition 5.8***. — *Les réductions de* $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M')$ *et* $\rho^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}}$ *se décomposent sous la forme*

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{LL}}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M') &= \oplus_\sigma m^{[a,b]}_M(\sigma) I(\sigma)_{\mathscr{B}} \\ \overline{\rho}^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} &= \oplus_\sigma m^{[a,b]}_M(\sigma) \mathbf{V}(I(\sigma)_{\mathscr{B}}) \end{aligned}$$

Démonstration. — Le premier énoncé est une conséquence de la prop. 2.11. Le second s'en déduit via la fonctorialité de $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$. □

Remarque 5.9. — Si $\mathscr{B}$ n'est pas un bloc supersingulier, $\mathbf{V}(I(\sigma)_{\mathscr{B}})$ est de rang 1 sur un quotient de $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}$, mais ce dernier agit par un pseudo-caractère de dimension 2 (cf. th. 1.6), pas de dimension 1.

BM2 ***Remarque 5.10***. — Les σ pour lesquels $I(\sigma)_{\mathscr{B}} \neq 0$ sont au nombre de : Justifier ?

- 2 si $\rho_{\mathscr{B}} = \chi_1 \oplus \chi_2$ avec $\chi_2\chi_1^{-1} \neq 1, \varepsilon^{\pm 1}$,
- 3 si $\rho_{\mathscr{B}} = \chi \oplus \chi\varepsilon$,
- 1 si $\rho_{\mathscr{B}} = \chi \oplus \chi$,
- 4 si $\rho_{\mathscr{B}}$ est irréductible.

La conjecture de Breuil-Mézard (version géométrique [7]) postule une décomposition analogue pour les supports des objets ci-dessus, vus comme faisceaux sur $\operatorname{Spec} Z^{\delta}_{\mathscr{B}}$.

On note $R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}$ le quotient à travers lequel $Z^{\delta}_{\mathscr{B}}$ agit sur $I(\sigma)_{\mathscr{B}}$ (cet anneau dépend a priori de σ, mais nous ne l'indiquons pas sur la notation). Alors $R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}$ s'injecte dans $R^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}}$ et on a $R^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} = R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}[\frac{1}{\varpi}]$. Comme $R^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}}$ est de dimension 1 puisque c'est un produit d'anneaux principaux, on en déduit que $R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}$ est un anneau local (comme quotient de $Z^{\delta}_{\mathscr{B}}$ qui est un anneau local), de dimension 2 et $R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}/\varpi$ est de dimension 1.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de $R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}/\varpi$. Notons encore $\mathfrak{p}$ l'image inverse de $\mathfrak{p}$ dans $Z^{\delta}_{\mathscr{B}}$; c'est un idéal premier de $Z^{\delta}_{\mathscr{B}}$ et $Z^{\delta}_{\mathscr{B}}/\mathfrak{p}$ est de dimension 1. La conjecture de Breuil-Mézard postule une formule pour la longueur du localisé $(R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}/\varpi)_{\mathfrak{p}}$ comme $(Z^{\delta}_{\mathscr{B}})_{\mathfrak{p}}$-module (on note $\ell_{\mathfrak{p}}(M)$ la longueur d'un $(Z^{\delta}_{\mathscr{B}})_{\mathfrak{p}}$-module). On la déduit du résultat suivant (le membre de gauche se calcule en utilisant la prop. 5.8) :

BM3 ***Proposition 5.11***. — *Si $\mathfrak{p}$ est comme ci-dessus,*

$$\ell_{\mathfrak{p}}(\overline{\rho}^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}}) = 2\ell_{\mathfrak{p}}((R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}/\varpi)_{\mathfrak{p}})$$

Démonstration. — Les longueurs ne changent pas par complétion. Notons donc Z le complété de $(Z^{\delta}_{\mathscr{B}})_{\mathfrak{p}}$ pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique, R celui de $(R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}})_{\mathfrak{p}}$, et V celui de $\mathbf{V}(I(\sigma)_{\mathscr{B}})$.

Alors R/ϖ est un corps local de dimension 1 – c'est le corps des fractions de $(R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}/\varpi)/\mathfrak{p}$ – et donc R est un anneau de valuation discrete dont $R[\frac{1}{\varpi}]$ est le corps des fractions. Comme $\mathbf{V}(I(\sigma)_{\mathscr{B}})$ est sans ϖ-torsion puisque $I(\sigma)_{\mathscr{B}}$ l'est (cor. 2.12), on en déduit que V est un module libre sur R, de rang 2 puisque $\rho^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} = L \otimes_{\mathscr{O}_L} I(\sigma)_{\mathscr{B}}$ est libre de rang 2 sur $R^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}}$. Il s'ensuit que V/ϖ est libre de rang 2 sur R/ϖ ; d'où le résultat. □

7. Il semble y avoir une certaine latitude dans l'énoncé de la conjecture : par exemple, on peut prendre des anneaux de déformations de représentations galoisiennes, ou de représentations encadrées ; la version que nous obtenons utilise des anneaux de déformations de pseudo-caractères – le th. 1.6 identifie $Z^{\delta}_{\mathscr{B}}$ à un tel anneau.

Références

BL0 [1] L. Barthel, R. Livné, Irreducible modular representations of GL_2 of a local field. Duke Math. J. **75** (1994), 261–292.

BL [2] L. Barthel, R. Livné, Modular representations of GL_2 of a local field : the ordinary, unramified case. J. Number Theory **55** (1995), 1–27.

BC [3] L. Berger, P. Colmez, Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique. Astérisque **319** (2008), 303–337.

Breuil [4] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. I. Compos. Math. **138** (2003), 165–188.

BM [5] C. Breuil, A. Mézard, Multiplicités modulaires et représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ en $\ell = p$, avec un appendice par G. Henniart, Duke Math. J. **115** (2002), 205–310.

triangulines [6] P. Colmez, Représentations triangulines de dimension 2, Astérisque **319** (2008), 213–258.

gl2 [7] P. Colmez, Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules, Astérisque **330** (2010), 281–509.

poids [8] P. Colmez, Correspondance de Langlands locale p-adique et changement de poids, J. EMS **21** (2019) 797–838.

CD [9] P. Colmez, G. Dospinescu, Complétions unitaires de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Algebra and Number Theory **8** (2014), 1447–1519.

Mettre le titre quand ça a près

CDN5 [10] P. Colmez, G. Dospinescu, W. Nizioł, en préparation.

CDP [11] P. Colmez, G. Dospinescu, V. Paškūnas, The p-adic local Langlands correspondence for $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Cambridge J. Math. **2** (2014), 1–47.

CF [12] P. Colmez, J.-M. Fontaine, Construction des représentations p-adiques semi-stables, Invent. math. **140** (2000), 1–43.

Dosp1 [13] G. Dospinescu, Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Math. Ann. **354** (2012), 627–657.

D-dR [14] G. Dospinescu, Extensions de Représentations de de Rham et vecteurs localement algébriques, Compos. Math. **151** (2015), 1462–1498.

DGE [15] A. Dotto, M. Emerton, T. Gee, en préparation.

EG [16] M. Emerton, T. Gee, A geometric perspective on the Breuil-Mézard conjecture, J. Inst. Math. Jussieu **13** (2014), 183–223.

gaby [17] P. Gabriel, Des catégories abéliennes, Bull. SMF **90** (1962), 323–448.

HT [18] Y. Hu, F. Tan, The Breuil-Mézard conjecture for non-scalar split residual representations, Ann. ENS **48** (2015), 1383–1421.

Kis [19] M. Kisin, Potentially semi-stable deformation rings. J. AMS **21** (2008), 513–546.

Kis2 [20] M. Kisin, The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2, J. AMS **22** (2009), 641–690.

LR1 [21] L. Lipshitz, Z. Robinson, Rigid subanalytic subsets of the line and the plane, Amer. J. Math. **118** (1996) 493–527.

LR2 [22] L. Lipshitz, Z. Robinson, Rings of separated power series and quasi-affinoid geometry, Astérisque **264** (2000), vi+171.

Paskext [23] V. Paškūnas, The image of Colmez's Montreal functor. Publ. IHES **118** (2013), 1–191.

Pas1 [24] V. Paškūnas, Blocks for mod p representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. *Automorphic forms and Galois representations.* Vol. 2, 231–247, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 415, Cambridge Univ. Press, 2014.

Pas2 [25] V. Paškūnas, On the Breuil-Mézard conjecture. Duke Math. J. **164** (2015), 297–359.

PT [26] V. Paškūnas, S.-N. Tung, Finiteness properties of the category of mod p representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. arXiv :2104.08948 [math.RT].

Roz [27] S. Rozensztajn, On the locus of 2-dimensional crystalline representations with a given reduction modulo p, Algebra & Number Theory **14** (2020) 643–700.

Sz [28] P. Scholze, On the p-adic cohomology of the Lubin-Tate tower, Ann. ENS **51** (2018), 811–863.

WE [29] C. Wang-Erickson, Algebraic families of Galois representations and potentially semi-stable pseudodeformation rings, Math. Ann. **371** (2018), 1615–1681.

defo1

5.5. Déformations de Rham et vecteurs localement algébriques

Soit V_0 une L-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, absolument irréductible. Soient $\delta = \det V_0$, et $\mathscr{B}$ le bloc correspondant à la réduction de V_0. Alors V_0 correspond à un point $x \in X := \operatorname{Spec} R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}[\frac{1}{p}]$, et la restriction de $T^{\delta}_{\mathscr{B}}$ à une boule ouverte B de l'espace rigide associé à X, contenant x et suffisamment petite, est la trace d'une représentation $\rho : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}(B)^+)$. Alors $\mathscr{O}(B)^+ \cong \mathscr{O}_{L_x}[[T_1, T_2, T_3]]$ (mais il ne semble pas y avoir de choix naturel des coordonnées T_1, T_2, T_3). Rajouter des explications ?

Les techniques des n°s II.2.4 et II.3.1 de [**7**] fournissent un faisceau G-équivariant $U \mapsto D(\rho) \boxtimes U$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ et une $\mathscr{O}(B)^+[\frac{1}{p}]$-représentation $\mathbf{\Pi}(\rho)$ de G telle que, pour tout $y \in U$, on ait $\mathbf{\Pi}(\rho)_y = \mathbf{\Pi}(\rho_y)$, et qui vit dans une suite exacte

$$0 \to \mathbf{\Pi}(\rho)^* \otimes ((x|x|)^{-1}\delta) \to D(\rho) \boxtimes \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{\Pi}(\rho) \to 0$$

Si E est un quotient de $\mathscr{O}(B)^+[\frac{1}{p}]$, de dimension finie sur L, alors $\rho_E := E \otimes \rho$ est une E-représentation de dimension 2, et $\mathbf{\Pi}(\rho_E) := E \otimes \mathbf{\Pi}(\rho)$ est une E-représentation de G, vérifiant $\mathbf{V}(\mathbf{\Pi}(\rho_E)) = \rho_E$. En spécialisant la suite exacte ci-dessus et en utilisant les techniques de [**7**, chap. V] ou de [**9**, chap. V, VI], on obtient des suites exactes

$$0 \to \mathbf{\Pi}(\rho_E)^* \otimes ((x|x|)^{-1}\delta) \to D(\rho_E) \boxtimes \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{\Pi}(\rho_E) \to 0$$
$$0 \to (\mathbf{\Pi}(\rho_E)^{\mathrm{an}})^* \otimes ((x|x|)^{-1}\delta) \to D_{\mathrm{rig}}(\rho_E) \boxtimes \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{\Pi}(\rho_E)^{\mathrm{an}} \to 0$$

On peut appliquer ceci, en particulier, aux quotients E de $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}[\frac{1}{p}]/\mathfrak{m}_x^n$, pour $n \in \mathbf{N}$. Les E-représentations $V = \rho_E$ que l'on obtient vérifient $\operatorname{End}_{E[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]} V = E$ et, vues comme L-représentations, n'ont alors que V_0 comme composante de Jordan-Hölder.

Soit V comme ci-dessus (E est donc une algèbre locale de corps résiduel L ; on note $\mathfrak{m}_E$ son idéal maximal), et soient $\Delta := D_{\mathrm{rig}}(V)$ et $\Delta_0 := D_{\mathrm{rig}}(V_0)$.

defo2

Théorème 5.12. — *$\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{alg}}$ est dense dans $\mathbf{\Pi}(V)$ si et seulement si V est de Rham à poids de Hodge-Tate non tous égaux.*

defo3

Remarque 5.13. — (i) Si $V = V_0$, ce résultat est prouvé dans [**7**, chap. VI] (avec des preuves simplifiées dans [**13, 8**]) ; si V est une extension de V_0 par V_0, il est prouvé dans [**14**].

(ii) Soit Π une L-représentation unitaire de G dont toutes les composantes de Jordan-Hölder sont isomorphe à Π_0. Supposons Π_0^{alg} irréductible et dense dans Π_0. Alors une récurrence immédiate (utilisant la densité de $(\Pi/\Pi_0)^{\mathrm{alg}}$ dans Π/Π_0 si Π^{alg} est dense dans Π) sur la longueur de Π montre que Π^{alg} est dense dans Π si et seulement si $\lg(\Pi^{\mathrm{alg}}) = \lg(\Pi)$, et que, si c'est le cas, $\lg(W^{\mathrm{alg}}) = \lg(W)$ pour tout sous-quotient W de Π.

Démonstration. — La preuve du cas $V = V_0$ que l'on trouve dans [**8**] s'étend presque verbatim au cas n quelconque. Nous allons en esquisser les grandes lignes.

Le cas $V = V_0$ permet de supposer que V_0 est de Rham, à poids de Hodge-Tate $k_1 < k_2$. Comme $\operatorname{End} V = E$, on a $\operatorname{End} \Delta = E$, ce qui permet d'adapter la preuve

de [**8**, prop. 2.2] pour obtenir $A_1, A_2 \in E$ vérifiant $A_1 + A_2 = k_1 + k_2$ (car $\det V = \delta$) et $(\nabla - A_1)(\nabla - A_2)\Delta \subset t\Delta$ (on a donc $A_i = k_i + P_i$ avec $P_i \in \mathfrak{m}_E$, si $i = 1, 2$). La preuve de [**8**, th. 2.15] montre que le module qui permet de décrire les vecteurs localement algébriques (au moins en tant que module sous l'action du borel) de $\mathbf{\Pi}(V)$ est $(\Delta^-_{\mathrm{dif}})^{U(\mathfrak{g})\text{-fini}}$; plus précisément, en adaptant cette preuve, on montre que le $L_\infty[t]$-module $(\Delta^-_{\mathrm{dif}})^{U(\mathfrak{g})\text{-fini}}$ est de longueur $(k_2 - k_1)\mathrm{lg}(\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{alg}})$. La preuve de [**8**, prop. 2.7] montre alors que $\mathrm{lg}_{L_\infty[t]}(\Delta^-_{\mathrm{dif}})^{U(\mathfrak{g})\text{-fini}})$ est la longueur du quotient par le plus grand sous-$L_\infty[[t]]$-réseau N de Δ^+_{dif} vérifiant $(\nabla - A_1)(\nabla - A_2)N \subset tN$.

Il existe une base $e_{0,1}, e_{0,2}$ de $\Delta^+_{0,\mathrm{dif}}$ vérifiant $\nabla(e_{0,1}) = k_1 e_{0,1}$ et $\nabla e_{0,2} = k_2 e_{0,2}$. Les seuls sous-$L_\infty[[t]]$–modules d'indice fini de $\Delta^+_{0,\mathrm{dif}}$ vérifiant $(\nabla - k_1)(\nabla - k_2)N \subset tN$ sont $\Delta^+_{0,\mathrm{dif}}$ et le module $N_{0,\mathrm{dif}}$ engendré par $e_{0,2}$ et $t^{k_2-k_1}e_{0,1}$.

On peut relever $e_{0,1}, e_{0,2}$ en une base e_1, e_2 de Δ^+_{dif} vérifiant $\nabla(e_1) = A_1 e_1$ et $\nabla(e_2) = A_2 e_2 + Bt^{k_2-k_1}e_1$ avec $B \in L_\infty \otimes_L \mathfrak{m}_E$. La représentation V est de Rham si et seulement si $A_1 = k_1$, $A_2 = k_2$ et $B = 0$.

Posons $L_{E,\infty} := L_\infty \otimes E$. Les seuls sous $L_{E,\infty}[[t]]$-sous-modules d'indice fini de Δ^+_{dif} vérifiant $(\nabla - A_1)(\nabla - A_2)N \subset (t, \mathfrak{m}_E)N$ sont les $N_{\mathrm{dif}} + \Lambda\Delta^+_{\mathrm{dif}}$, où N_{dif} est le module engendré par e_2 et $t^{k_2-k_1}e_1$ et Λ est un idéal de E. Parmi ceux-ci, le seul qui peut fournir des vecteurs localement algébriques de la bonne longueur est N_{dif}, i.e. $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{alg}}$ est dense dans $\mathbf{\Pi}(V)$ si et seulement si $(\nabla - A_1)(\nabla - A_2)N_{\mathrm{dif}} \subset tN_{\mathrm{dif}}$. Cette dernière condition équivaut à $(\nabla - A_2)t^{k_2-k_1}e_1 \in tN_{\mathrm{dif}}$ et $(\nabla - A_2)e_2 \in tN_{\mathrm{dif}}$.

- La première des deux conditions équivaut à $A_1 - A_2 + k_2 - k_1 = 0$, et comme $A_1 + A_2 = k_1 + k_2$, cela équivaut à $A_1 = k_1$ et $A_2 = k_2$.
- La seconde équivaut à $B = 0$.

La conjonction des deux conditions équivaut donc à ce que V soit de Rham, ce qui permet de conclure. □

defo4

5.6. Déformations infinitésimales de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$

Fixons $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ et soit $L_{\mathscr{L}}$ le corps de définition de $\mathscr{L}$. Choisissons une base e_1, e_2 de M_{dR} sur L, avec $e_1 \notin \mathscr{L}$, de telle sorte que $\mathscr{L}$ soit engendrée par $e_2 + z(\mathscr{L})e_1$, avec $L_{\mathscr{L}} = L(z(\mathscr{L}))$.

Si $n \geq 0$, soit $M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$ le $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module filtré, de rang 2 sur $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$, défini par

$$M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n} = (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \otimes M$$

en tant que $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module, la filtration $\mathrm{Fil}^\bullet_{\mathscr{L},n}$ sur

$$(\overline{\mathbf{Q}}_p \otimes M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n})^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}} = (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \otimes M_{\mathrm{dR}}$$

étant définie par

$$\mathrm{Fil}^i_{\mathscr{L},n} = \begin{cases} (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \otimes M_{\mathrm{dR}} & \text{si } i \leq -b, \\ (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \cdot (e_2 + (z(\mathscr{L}) + T)e_1) & \text{si } -b+1 \leq i \leq -a, \\ 0 & \text{si } i \geq -a+1. \end{cases}$$

Notons que le sous-module $T^k M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$ de $M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$ est isomorphe à $M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n-k}$ comme $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module filtré (sur $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$ et donc a fortiori sur L).

defo250 ***Lemme 5.14***. — *Sii $n \geq 1$, alors :*

(i) *$M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$, vu comme $L_{\mathscr{L}}$-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module filtré, est faiblement admissible.*

(ii) *Les seuls sous-$L_{\mathscr{L}}$-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-modules filtrés faiblement admissibles de $M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$ sont les $T^k M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$, pour $0 \leq k \leq n$.*

Démonstration. — Quitte à remplacer L par $L_{\mathscr{L}}$, et e_2 par $e_2 + z(\mathscr{L})e_1$, on peut supposer que $\mathscr{L}$ est définie sur L et que $z(\mathscr{L}) = 0$.

Les seuls sous-L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-modules de $M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$ sont les $\Lambda \otimes_L M$, où Λ est un sous-L-module de $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$. Comme la filtration n'a que deux crans, le (i) équivaut à ce que

$$\dim_L \left((\Lambda \otimes_L M_{\mathrm{dR}}) \cap \mathrm{Fil}^{-a}_{\mathscr{L},n} \right) \leq \dim_L \Lambda$$

pour tout Λ, et le (ii) à ce que les seuls Λ pour lesquels il y a égalité sont les $T^k(L[T]/T^{n+1-k})$. Comme $\mathrm{Fil}^{-a}_{\mathscr{L},n}$ est l'ensemble des $Pe_2 + TPe_1$, l'intersection ci-dessus est l'ensemble des $Pe_2 + TPe_1$ avec $P \in \Lambda$ et $TP \in \Lambda$. L'inégalité dans le (i) est donc une évidence et, s'il y a égalité, c'est que Λ est stable par $P \mapsto TP$, et donc est un idéal de $L[T]/T^{n+1-k}$, et donc de la forme $T^k(L[T]/T^{n+1-k})$, ce qui permet de conclure. □

Le (i) du lemme 5.14 fournit une représentation

$$V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n} := \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n})$$

C'est une déformation à $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$ de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$, qui est de Rham, dont la réduction modulo T^2 est non scindée (car la filtration n'est pas définie sur $L_{\mathscr{L}}$ modulo T^2), et dont, d'après le (ii) du lemme 5.14, les seuls sous-objets sont les $T^k V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ (isomorphe à $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n-k}$), pour $0 \leq k \leq n$.

petit2 ***Remarque 5.15***. — (i) En adaptant les méthodes de [**6**, § 5.1], on peut construire une déformation de Rham de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ dans un voisinage p-adique, et pas juste dans un voisinage formel.

(ii) Le th. 5.4 et le lemme 5.3 ci-dessous donnent une construction d'une déformation au-dessus de tout l'espace des représentations de Rham de type (M, a, b).

Soit $\mathscr{B}$ le bloc correspondant à la réduction de $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$. Alors $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$ définit un point de $\operatorname{Spec} R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}[\frac{1}{p}]$; notons $\widehat{R}_{\mathscr{L}}$ le complété de $R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}[\frac{1}{p}]$ en l'idéal maximal correspondant à ce point (isomorphe à $L_{\mathscr{L}}[[T_1,T_2,T_3]]$), et $\mathfrak{m}_{\mathscr{L}}$ son idéal maximal. On dispose d'une représentation $\widehat{\rho}_{\mathscr{L}} : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(\widehat{R}_{\mathscr{L}})$ universelle pour les déformations de $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$ aux $L_{\mathscr{L}}$-algèbres locales finies sur $L_{\mathscr{L}}$ de corps résiduel $L_{\mathscr{L}}$: si E est une telle algèbre et si $\rho_E : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(E)$ a pour représentation résiduelle $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$, alors il existe $\lambda : \widehat{R}_{\mathscr{L}} \to E$ tel que $\rho_E \cong E \otimes \widehat{\rho}_{\mathscr{L}}$. De plus, $\mathfrak{m}_{\mathscr{L}}/\mathfrak{m}_{\mathscr{L}}^2$ est isomorphe au groupe des extensions de $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$ par $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$ de déterminant δ (une telle extension est naturellement une $(L_{\mathscr{L}}[T]/T^2)$-représentation de dimension 2 et son déterminant est, a priori, à valeurs dans $L_{\mathscr{L}}[T]/T^2$).

On note $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}}$ le quotient de $\widehat{R}_{\mathscr{L}}$ classifiant les représentations de Rham : on a $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}} = \widehat{R}_{\mathscr{L}}/I$, où $I = \cap \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}$ parcourt les idéaux de $\widehat{R}_{\mathscr{L}}$ tels que $\widehat{R}_{\mathscr{L}}/\mathfrak{a}$ soit de dimension finie sur $L_{\mathscr{L}}$ (ce qui équivaut à $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{m}_{\mathscr{L}}^n$, pour $n \gg 0$), et $(\widehat{R}_{\mathscr{L}}/\mathfrak{a}) \otimes \widehat{\rho}_{\mathscr{L}}$ soit de Rham (comme tout sous-quotient d'une représentation de Rham est de Rham, $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$ satisfait les propriétés ci-dessus si c'est le cas de $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$).

defo5.1 ***Proposition 5.16***. — $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}} \cong L_{\mathscr{L}}[[T]]$.

Démonstration. — Comme $V_{M,\mathscr{L},2}^{[a,b]}$ est, à isomorphisme près, l'unique extension non triviale de $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$ par $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$, de déterminant δ, qui est de Rham, il s'ensuit que $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}}$ est un anneau local régulier de dimension 1, et donc est un quotient de $L_{\mathscr{L}}[[T]]$. Par ailleurs, l'existence de $V_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]}$, pour tout n, fournit une suite compatible de morphismes $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}} \to L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$, pour $n \in \mathbf{N}$. Le fait que $V_{M,\mathscr{L},2}^{[a,b]}$ soit non scindée implique que cette flèche est surjective pour $n = 2$, et donc aussi pour tout n. Il s'ensuit que $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}}$ admet pour quotient $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$, pour tout n. On en déduit le résultat. □

defo5 ***Remarque 5.17***. — On déduit de la prop. 5.16 que $V_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]}$ est, à isomorphisme près, l'unique déformation de Rham de $V_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$ à $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$, dont le quotient par T^2 soit non scindé.

defo6 **5.7. Déformations infinitésimales de $\Pi_{M,\mathscr{L}}^{[a,b]}$**

En appliquant les constructions du § 5.5 à $V = V_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]}$, on construit une représentation

$$\Pi_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]} := \mathbf{\Pi}(V_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]})$$

petit3 ***Remarque 5.18***. — (i) Il résulte du th. 5.12 que $(\Pi_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]})^{\mathrm{alg}}$ est dense dans $\Pi_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]}$ et on déduit du (ii) de la rem. 5.13 que

$$(\Pi_{M,\mathscr{L},n}^{[a,b]})^{\mathrm{alg}} \cong (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \otimes \mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$$

(ii) En fait, si $\lambda \in (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1})$ est inversible, alors $\lambda \cdot \mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est déjà dense dans $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ car les seuls sous-objets stricts de $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ sont les $T^k\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ pour $1 \leq k \leq n-1$ (cela se voit en appliquant le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ et en utilisant le fait que les seuls sous-objets stricts de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ sont les $T^kV^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$, cf. lemme 5.14 et définition de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$), et $\lambda \cdot \mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ n'est inclus dans aucun. Il résulte donc de la prop. 3.2 que $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ est un quotient de $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$.

defo5.2 ***Proposition 5.19***. — *Si Π est une représentation unitaire de G munie d'un morphisme $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ d'image dense, et si les composantes de Jordan-Hölder de Π sont $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ avec multiplicité n, alors $\Pi \cong \Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$.*

Citer [**26**, cor. 6.16] au lieu du discours ci-contre.

Démonstration. — Soit $J_{\mathscr{L}}$ l'enveloppe injective de $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ dans la catégorie des limites inductives de représentations unitaires de G. Alors $\mathrm{End}\, J_{\mathscr{L}} = \widehat{R}_{\mathscr{L}}$ d'après [**23**, ? ?] et comme le bloc de $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ dans la catégorie des représentations unitaires de G n'a qu'un élément, on a

$$\Pi \cong (\mathrm{Hom}(J^*_{\mathscr{L}}, \Pi^*) \otimes_{\widehat{R}_{\mathscr{L}}} J^*_{\mathscr{L}})^*$$

L'hypothèse selon laquelle $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ est d'image dense implique a fortiori que Π^{alg} est dense dans Π. Il en résulte, d'après le th. 5.12 et la définition de $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}}$, que $\mathrm{Hom}(J^*_{\mathscr{L}}, \Pi^*)$ est en fait un $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}}$-module. La prop. 5.16 implique alors que

$$\mathrm{Hom}(J^*_{\mathscr{L}}, \Pi^*) \cong \oplus_i L_{\mathscr{L}}[[T]]/T^{n_i} \quad \text{et} \quad \Pi \cong \oplus_{i\in I}\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n_i}$$

où I est un ensemble fini. On conclut en remarquant que l'hypothèse selon laquelle $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ est d'image dense implique que I n'a qu'un seul élément : en effet, $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est dense dans le cosocle, qui est isomorphe à $L^I_{\mathscr{L}} \otimes \Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$, et dont les vecteurs localement algébriques sont $L^I_{\mathscr{L}} \otimes \mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$; la flèche $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ se factorise donc par $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \to \Lambda \otimes \mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$, avec Λ une $L_{\mathscr{L}}$-droite de $L^I_{\mathscr{L}}$, et l'adhérence de l'image de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \to L^I_{\mathscr{L}} \otimes \Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ est isomorphe à $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$. □

defo8 ***Proposition 5.20***. — *$\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ est l'unique déformation infinitésimale d'ordre n de $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ qui est complétée de ses vecteurs localement algébriques.*

Démonstration. — Posons $\Pi = \Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ et $\Pi_n := \Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$. Nous allons prouver, par récurrence sur n, que Π_n est, à isomorphisme près, l'unique déformation d'ordre n de $\Pi = \Pi_0$ dans laquelle Π_n^{alg} est dense.

Si E est une telle déformation, une petite récurrence montre que les longueurs de E et E^{lisse} sont égales (car $(E/\Pi)^{\mathrm{lisse}}$ est dense dans E/Π), et que tout sous-objet F de E a encore des vecteurs localement algébriques denses (et $\mathrm{lg}(F^{\mathrm{lisse}}) = \mathrm{lg}(F)$). Il s'ensuit que $\mathrm{Ker}(E \to \Pi)$ et E/Π sont isomorphes à Π_n par l'hypothèse de récurrence et, si on choisit un isomorphisme $E/\Pi \cong \mathrm{Ker}(E \to \Pi)$, cela fournit un endomorphisme nilpotent $T : E \to E$, et $T^iE \cong \Pi_{n-1-i}$ si $i \geq 1$ par l'hypothèse de récurrence. En particulier, E est muni d'une structure de $L[T]$-module et on a $\mathrm{End}\, E \cong L[T]/T^{n+1}$. La construction de Π_n donne une telle structure de $L[T]$-module et $\Pi_{n+1}/T\Pi_{n+1} = \Pi$ et $T\Pi_{n+1} \cong \Pi_n$.

Notons $\mathrm{Ext}^1_g(\Pi, \Pi_n) \subset \mathrm{Ext}^1(\Pi, \Pi_n)$ l'ensemble (c'est en fait un sous-L-module comme on le voit en revenant à la définition de l'addition et de la multiplication par $\lambda \in L$) des extensions ayant des vecteurs localement algébriques denses.

Si $\alpha \in \mathrm{End}\, \Pi_n$, alors α induit une flèche $\mathrm{Ext}^1(\Pi, \Pi_n) \to \mathrm{Ext}^1(\Pi, \Pi_n)$, ce qui munit $\mathrm{Ext}^1(\Pi, \Pi_n)$ d'une structure de module sur $\mathrm{End}\, \Pi_n \cong L[T]/T^{n+1}$. La classe de Π_{n+1} n'est pas tuée par T^n comme on le voit en appliquant $\mathbf{V}$. On conclut grâce au lemme suivant. □

defo9 ***Lemme 5.21***. — $\mathrm{Ext}^1_g(\Pi, \Pi_n)$ *est un* $L[T]/T^{n+1}$*-module de rang* 1 *engendré par la classe de* Π_{n+1}

Démonstration. — La preuve se fait par récurrence sur n. Par l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{Ext}^1_g(\Pi, \Pi_{n-1})$ est un $L[T]/T^n$-module de rang 1. Par ailleurs, la classe de Π_{n+1} engendre un sous-$L[T]/T^{n+1}$-module libre de rang 1 et on a une suite exacte (la flèche de gauche vient de l'isomorphisme $\Pi_{n-1} \cong T\Pi_n$ et l'exactitude vient du fait que tout sous-objet d'une g-extension de Π par Π_n a des vecteurs localement algébriques denses et donc que $\mathrm{Ext}^1_g(\Pi, \Pi_n) \cap \mathrm{Ext}^1(\Pi, T\Pi_n) = \mathrm{Ext}^1_g(\Pi, T\Pi_n)$)

$$\mathrm{Ext}^1_g(\Pi, \Pi_{n-1}) \to \mathrm{Ext}^1_g(\Pi, \Pi_n) \to \mathrm{Ext}^1_g(\Pi, \Pi)$$

et des isomorphismes $\mathrm{Ext}^1_g(\Pi, \Pi_{n-1}) \cong L[T]/T^n$ et $\mathrm{Ext}^1_g(\Pi, \Pi) \cong L$. On en déduit le résultat. □

1er avril 2022

Pierre Colmez, CNRS, IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : pierre.colmez@imj-prg.fr

Gabriel Dospinescu, CNRS, UMPA, École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France • *E-mail :* gabriel.dospinescu@ens-lyon.fr

Wiesława Nizioł, CNRS, IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : wieslawa.niziol@imj-prg.fr