



**HAL**  
open science

# Grassmanniennes, calcul de Schubert et polynômes de Schur

Marc Renaud

► **To cite this version:**

| Marc Renaud. Grassmanniennes, calcul de Schubert et polynômes de Schur. 2023. hal-04288623

**HAL Id: hal-04288623**

**<https://hal.science/hal-04288623>**

Preprint submitted on 16 Nov 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Grassmanniennes, calcul de Schubert et polynômes de Schur

Marc RENAUD

Professeur émérite INSA-Toulouse

LAAS-CNRS 7 avenue du Colonel Roche  
31077 Toulouse Cedex 4 - France  
e-mail : renaud@laas.fr

## 1 Introduction

Cet article définit et présente la grassmannienne  $G(k, n)$  sur un espace vectoriel  $V$ , de dimension  $n$  : il s'agit de l'ensemble des sous-espaces vectoriels, de dimensions  $k$ , de  $V$ .

Puis il expose le plongement de Plücker, les coordonnées de Plücker et les relations qui peuvent exister entre ces coordonnées, qualifiées de relations de Plücker.

La grassmannienne  $G(k, n)$  est une variété différentielle, irréductible, rationnelle et projective, de dimension  $k(n - k)$ .

Les notions de partition et de partition admissible dans  $G(k, n)$ , ainsi que le diagramme de Young associé, sont présentées. À une partition admissible dans  $G(k, n)$  est associée une sous-variété de la grassmannienne  $G(k, n)$  qualifiée de variété de Schubert dont les classes de cohomologie sont appelées cycles de Schubert.

Nous présentons le calcul de Schubert qui consiste à multiplier ces cycles. Ce calcul est copie conforme de celui entre polynômes de Schur, définis par la suite, qui sont des polynômes symétriques particuliers. Il fait intervenir des coefficients, qualifiés de Littlewood-Richardson, positifs ou nuls (et souvent égaux à 0 ou 1). Plusieurs formules qui permettent ce calcul sont exposées et en particulier celles de Pieri et Giambelli.

Les exemples des grassmanniennes  $G(k, n)$  ;  $k < n$  ;  $n \leq 6$ , sont présentés.  $G(2, 4)$  est le premier exemple non trivial de variété projective (i.e. qui n'est pas un espace vectoriel).

Finalement un Annexe présente un exemple de produit de 2 cycles de Schubert qui fait intervenir 4 coefficients de Littlewood-Richardson non égaux à 0 ou 1. On vérifie, sur cet exemple, que ce produit est bien commutatif.

## 2 Notations

ssi signifie si et seulement si.

$\cong$  signifie isomorphe.

$\#\{\}$  signifie nombre d'éléments de l'ensemble  $\{\}$ .

Soient :

- $\mathbb{K}$  un corps algébriquement clos (par exemple  $\mathbb{C}$ , ...).
- $k, n \in \mathbb{N}^*$  ;  $1 \leq k < n$  (et parfois  $k = n$ ) des dimensions.
- $V \triangleq \mathbb{K}^n$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  (ou  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel), de dimension  $n$  et de base  $\{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n\}$ . Soit  $v \in V$  :  
 $v = v^1 e_1 + \dots + v^i e_i + \dots + v^n e_n$  et  $[v] \triangleq (v^1 \dots v^i \dots v^n)^t$ , matrice *colonne* de dimension  $n \times 1$ .

•  $V^* \triangleq \text{Hom}(V, \mathbb{K})$  [ensemble des homomorphismes (applications linéaires) de  $V$  dans  $\mathbb{K}$ , dites formes linéaires, espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , de dimension  $n$ , dual de  $V$  et de base  $\{e^{*1}, \dots, e^{*m}, \dots, e^{*n}\}$  duale de la base  $\{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n\}$  i.e. telle que  $e^{*m}(e_i) = \delta_i^m$  ;  $i, m = 1, \dots, n$ , symbole de Kronecker égal à 1 si les 2 indices sont égaux et à 0 s'ils sont différents.

Soit  $v^* \in V^* : v^* = v_1^* e^{*1} + \dots + v_m^* e^{*m} + \dots + v_n^* e^{*n}$  et

$[v^*] \triangleq (v_1^* \dots v_m^* \dots v_n^*)$ , matrice *ligne* de dimension  $1 \times n$ . On a :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{v^*} & \mathbb{K} \\ v & \longmapsto & \langle v^*, v \rangle \triangleq v^*(v) = [v^*][v] \end{array}$$

où  $\langle , \rangle$  désigne un produit scalaire.

•  $U$  un sous-espace vectoriel de  $V$ , de dimension  $k$  et de base  $\{f_1, \dots, f_j, \dots, f_k\}$ . Soit  $u \in U$  :  
 $u = b^1 f_1 + \dots + b^j f_j + \dots + b^k f_k = u^1 e_1 + \dots + u^i e_i + \dots + u^n e_n$ .

$[b] \triangleq (b^1 \dots b^j \dots b^k)^t$ , matrice *colonne* de dimension  $k \times 1$  et

$[u] \triangleq (u^1 \dots u^i \dots u^n)^t$ , matrice *colonne* de dimension  $n \times 1$ .

On pose  $f_j = f_j^1 e_1 + \dots + f_j^i e_i + \dots + f_j^n e_n$  ;  $1 \leq j \leq k$  et :

$$[f] = (f_j^i) = \begin{pmatrix} f_1^1 & \dots & f_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_k^1 & \dots & f_k^n \end{pmatrix}, \text{ matrice rectangulaire de dimension } k \times n.$$

On a  $[u] = [f]^t [b]$ .

Les  $kn$  éléments de  $[f]$  sont appelés *coordonnées de Stiefel* de  $U$ .

Mais on peut trouver une base  $\{g_1, \dots, g_j, \dots, g_k\}$  de  $U$  telle que :

$$[g] = (g_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & g_1^{k+1} & \dots & g_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & g_k^{k+1} & \dots & g_k^n \end{pmatrix}.$$

Les  $k(n-k)$  éléments non triviaux de  $[g]$  sont appelés *coordonnées affines* de  $U$ .

•  $U^* \triangleq \text{Hom}(U, \mathbb{K})$  sous-espace vectoriel de  $V^*$ , de dimension  $k$ , dual de  $U$  et de base  $\{f^{*1}, \dots, f^{*l}, \dots, f^{*k}\}$  duale de la base  $\{f_1, \dots, f_j, \dots, f_k\}$  i.e. telle que  $f^{*l}(f_j) = \delta_j^l$ ;  $j, l = 1, \dots, k$ . Soit  $u^* \in U^*$  :

$$u^* = b_1^* f^{*1} + \dots + b_l^* f^{*l} + \dots + b_k^* f^{*k} = u_1^* e^{*1} + \dots + u_m^* e^{*m} + \dots + u_n^* e^{*n}.$$

$[b^*] \triangleq (b_1^* \dots b_l^* \dots b_k^*)$ , matrice *ligne* de dimension  $1 \times k$  et

$[u^*] \triangleq (u_1^* \dots u_m^* \dots u_n^*)$ , matrice *ligne* de dimension  $1 \times n$ .

On pose  $f^{*l} = f_1^{*l} e^{*1} + \dots + f_m^{*l} e^{*m} + \dots + f_n^{*l} e^{*n}$ ;  $1 \leq l \leq k$  et :

$$[f^*] = (f_m^{*l}) = \begin{pmatrix} f_1^{*1} & \dots & f_n^{*1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{*k} & \dots & f_n^{*k} \end{pmatrix}, \text{ matrice rectangulaire}$$

de dimension  $k \times n$ . On a  $[f^*][f]^t = I_k$  (matrice unité d'ordre  $k$ ). En effet  $\delta_j^l = f^{*l}(f_j) = (f_m^{*l} e^{*m})(f_j^i e_i) = f_m^{*l} f_j^i e^{*m}(e_i) = f_m^{*l} f_j^i \delta_i^m = f_m^{*l} f_j^m$  (nous avons utilisé la convention d'Einstein qui consiste à sommer par rapport à un indice qui apparaît en bas et en haut).

On a  $[u^*] = [b^*][f^*]$  et :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{u^*} & \mathbb{K} \\ u & \longmapsto & \langle u^*, u \rangle \triangleq u^*(u) = [u^*][u] \end{array}.$$

Mais  $[u^*][u] = [b^*][f^*][f]^t[b] = [b^*][b] = b^*(b) \triangleq \langle b^*, b \rangle$ .

•  $\bigwedge^k V$  la  $k^{\text{ème}}$  puissance extérieure de  $V$ ; espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , de dimension  $C_n^k$  [ $C_n^k \triangleq \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ] et de base canonique :

$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ .

Soit  $\omega_k \in \bigwedge^k V$  :  $\omega_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_k^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$  et

$[\omega_k] \triangleq (\omega_k^{1 \dots k} \dots \omega_k^{(n-k+1) \dots n})^t$ , matrice *colonne* de dimension  $C_n^k \times 1$ .

On remarque que  $\omega_1 = v$  car  $\bigwedge^1 V = V$ .

•  $\bigwedge V \triangleq \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^k V = \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k V$  (car  $\bigwedge^{k+1} V = \dots = 0$ ) algèbre extérieure ou algèbre alternée ou algèbre de Grassmann [29]<sup>1</sup>; c'est une algèbre graduée.

•  $(\bigwedge^k V)^* \triangleq \text{Hom}(\bigwedge^k V, \mathbb{K})$  espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , de dimension  $C_n^k$ , dual de  $\bigwedge^k V$ . On montre que  $(\bigwedge^k V)^* \cong \bigwedge^k V^*$  est donc de base canonique :  $\{e^{*i_1} \wedge \dots \wedge e^{*i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ .  
Soit  $\omega^{*k} \in \bigwedge^k V^* : \omega^{*k} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k}^{*k} e^{*i_1} \wedge \dots \wedge e^{*i_k}$  et  $[\omega^{*k}] \triangleq (\omega_{1 \dots k}^{*k} \dots \omega_{(n-k+1) \dots n}^{*k})$ , matrice *ligne* de dimension  $1 \times C_n^k$ .

On remarque que  $[\omega^{*(n-k)}] \triangleq (\omega_{1 \dots (n-k)}^{*(n-k)} \dots \omega_{(k+1) \dots n}^{*(n-k)})$  est une matrice *ligne* de même dimension que  $[\omega^{*k}]$  car  $C_n^{n-k} = C_n^k$ .

Nous allons associer à tout élément  $\omega_k$  de  $\bigwedge^k V$  un élément  $\tilde{\omega}^{*(n-k)}$  de  $\bigwedge^{n-k} V^*$  et réciproquement.

Pour cela on pourra consulter [4]<sup>2</sup> [8]<sup>3</sup> [11]<sup>4</sup> [18]<sup>5</sup> [35]<sup>6</sup> [39]<sup>7</sup>.

Pour définir cette association considérons l'application bijective :

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^k V & \longleftrightarrow & \bigwedge^{n-k} V^* \\ \omega_k & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & \tilde{\omega}^{*(n-k)} \end{array} ,$$

telle que :  $\tilde{\omega}^{*(n-k)} = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-k} \leq n} \tilde{\omega}_{j_1 \dots j_{n-k}}^{*(n-k)} e^{*j_1} \wedge \dots \wedge e^{*j_{n-k}}$ , avec :  $\tilde{\omega}_{j_1 \dots j_{n-k}}^{*(n-k)} \triangleq (-1)^{s(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k})} \omega_k^{i_1 \dots i_k}$ , où  $i_1, \dots, i_k$  sont les éléments du complément à  $1, \dots, n$  de  $j_1, \dots, j_{n-k}$  pris par ordre croissant et  $s(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k})$  la signature de la permutation de  $(1, \dots, n)$  à  $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k})$  [15]<sup>8</sup>.

Donc  $[\tilde{\omega}^{*(n-k)}] \triangleq (\tilde{\omega}_{1 \dots (n-k)}^{*(n-k)} \dots \tilde{\omega}_{(k+1) \dots n}^{*(n-k)}) = (\pm \omega_k^{(n-k+1) \dots n} \dots \omega_k^{1 \dots k})$ , matrice *ligne* de dimension  $1 \times C_n^k$ , car  $C_n^{n-k} = C_n^k$ . Cependant dans cette dernière matrice des signes - apparaissent devant certains éléments, comme le montrent les exemples suivants.

On a donc l'isomorphisme canonique  $\bigwedge^k V \cong \bigwedge^{n-k} V^*$ .

---

1. p. 733  
2. p. 6 Remark  
3. pp. 6-7 Exercice 2.1 Exemple 2.2 Exercice 2.3  
4. pp. 81-83 § 3.5 : Applications : II. Grassmanniennes et pp. 182-183 A,43 et pp. 183-184 A,44 et A, 45  
5. pp. 63-65 Exemple 6.1 : Grassmannians  
6. p. ?  
7. pp. 42-43 Exemple 1 : The grassmannian  
8. p. 94 éq. (1.6)

**Exemples :**

$$\star : \text{si } (k, n) = (1, 2) \text{ alors } [\tilde{\omega}^{*1}] = ( -\omega_1^2 \ \omega_1^1 )$$

$$\star : \text{si } (k, n) = (1, 3) \text{ alors } [\tilde{\omega}^{*2}] = ( \omega_1^3 \ -\omega_1^2 \ \omega_1^1 )$$

$$\star : \text{si } (k, n) = (1, 4) \text{ alors } [\tilde{\omega}^{*3}] = ( -\omega_1^4 \ \omega_1^3 \ -\omega_1^2 \ \omega_1^1 )$$

$$\star : \text{si } (k, n) = (1, 5) \text{ alors } [\tilde{\omega}^{*4}] = ( \omega_1^5 \ -\omega_1^4 \ \omega_1^3 \ -\omega_1^2 \ \omega_1^1 )$$

$$\star : \text{si } (k, n) = (1, 6) \text{ alors } [\tilde{\omega}^{*5}] = ( -\omega_1^6 \ \omega_1^5 \ -\omega_1^4 \ \omega_1^3 \ -\omega_1^2 \ \omega_1^1 )$$

...

$$\star : \text{si } (k, n) = (2, 3) \text{ alors } [\tilde{\omega}^{*1}] = ( \omega_2^{23} \ -\omega_2^{13} \ \omega_2^{12} )$$

$$\star : \text{si } (k, n) = (2, 4) \text{ alors } [\tilde{\omega}^{*2}] = ( \omega_2^{34} \ -\omega_2^{24} \ \omega_2^{23} \ \omega_2^{14} \ -\omega_2^{13} \ \omega_2^{12} )$$

$$\star : \text{si } (k, n) = (2, 5) \text{ alors :}$$

$$[\tilde{\omega}^{*3}] = ( \omega_2^{45} \ -\omega_2^{35} \ \omega_2^{34} \ \omega_2^{25} \ -\omega_2^{24} \ \omega_2^{23} \ -\omega_2^{15} \ \omega_2^{14} \ -\omega_2^{13} \ \omega_2^{12} )$$

$$\star : \text{si } (k, n) = (2, 6) \text{ alors :}$$

$$[\tilde{\omega}^{*4}] = ( a \ b \ c \ d \ e \ f \ g \ h \ i \ j \ k \ l \ m \ n \ o ), \text{ avec :}$$

$$a = \omega_2^{56}, b = -\omega_2^{46}, c = \omega_2^{45}, d = \omega_2^{36}, e = -\omega_2^{35}, f = \omega_2^{34}, \\ g = -\omega_2^{26}, h = \omega_2^{25}, i = -\omega_2^{24}, j = \omega_2^{23}, k = \omega_2^{16}, l = -\omega_2^{15}, m = \omega_2^{14}, \\ n = -\omega_2^{13}, o = \omega_2^{12}$$

...

$$\star : \text{si } (k, n) = (3, 4) \text{ alors } [\tilde{\omega}^{*1}] = ( -\omega_3^{234} \ \omega_3^{134} \ -\omega_3^{124} \ \omega_3^{123} )$$

$$\star : \text{si } (k, n) = (3, 5) \text{ alors :}$$

$$[\tilde{\omega}^{*2}] = ( \omega_3^{345} \ -\omega_3^{245} \ \omega_3^{235} \ -\omega_3^{234} \ \omega_3^{145} \ -\omega_3^{135} \ \omega_3^{134} \ \omega_3^{125} \ -\omega_3^{124} \ \omega_3^{123} )$$

$$\star : \text{si } (k, n) = (3, 6) \text{ alors :}$$

$$[\tilde{\omega}^{*3}] = ( a \ b \ c \ d \ e \ f \ g \ h \ i \ j \ k \ l \ m \ n \ o \ p \ q \ r \ s \ t ), \text{ avec :}$$

$$a = -\omega_3^{456}, b = \omega_3^{356}, c = -\omega_3^{346}, d = \omega_3^{345}, e = -\omega_3^{256}, f = \omega_3^{246}, \\ g = -\omega_3^{245}, h = -\omega_3^{236}, i = \omega_3^{235}, j = -\omega_3^{234}, k = \omega_3^{156}, l = -\omega_3^{146}, \\ m = \omega_3^{145}, n = \omega_3^{136}, o = -\omega_3^{135}, p = \omega_3^{134}, q = -\omega_3^{126}, r = \omega_3^{125}, s = -\omega_3^{124}, \\ t = \omega_3^{123}$$

...

$$\star : \text{si } (k, n) = (4, 5) \text{ alors } [\tilde{\omega}^{*1}] = ( \omega_4^{2345} \ -\omega_4^{1345} \ \omega_4^{1245} \ -\omega_4^{1235} \ \omega_4^{1234} )$$

$$\star : \text{si } (k, n) = (4, 6) \text{ alors :}$$

$$[\tilde{\omega}^{*2}] = ( a \ b \ c \ d \ e \ f \ g \ h \ i \ j \ k \ l \ m \ n \ o ), \text{ avec :}$$

$$a = \omega_4^{3456}, b = -\omega_4^{2456}, c = \omega_4^{2356}, d = -\omega_4^{2346}, e = \omega_4^{2345}, f = \omega_4^{1456}, \\ g = -\omega_4^{1356}, h = \omega_4^{1346}, i = -\omega_4^{1345}, j = \omega_4^{1256}, k = -\omega_4^{1246}, l = \omega_4^{1245}, \\ m = \omega_4^{1236}, n = -\omega_4^{1235}, o = \omega_4^{1234}.$$

...

$$\star : \text{si } (k, n) = (5, 6) \text{ alors :}$$
$$[\tilde{\omega}^{\star 1}] = \left( -\omega_5^{23456} \quad \omega_5^{13456} \quad -\omega_5^{12456} \quad \omega_5^{12356} \quad -\omega_5^{12346} \quad \omega_5^{12345} \right)$$

•  $\text{Mat}(k, n)$  l'ensemble des matrices  $k \times n$  à éléments dans  $\mathbb{K}$  :  
 $\dim \text{Mat}(k, n) = kn$ .

•  $S(k, n)$  la variété de Stiefel des matrices  $k \times n$  de rang plein (ou maximal) :  $S(k, n) \subset \text{Mat}(k, n)$  ;  $\dim S(k, n) = kn$ , car une matrice  $k \times n$  est généralement de rang plein ; c'est l'ensemble des matrices  $k \times n$  qui ne sont pas de rang plein qui constitue une sous-variété de  $\text{Mat}(k, n)$  de dimension strictement inférieure à  $kn$ .

On remarque que  $\dim S(k, n)$  est le nombre de coordonnées de Stiefel.

•  $GL(k) = S(k, k)$  l'ensemble des matrices d'ordre  $k$  régulières.  
 $\dim GL(k) = k^2$ .

•  $G(k, n) = S(k, n)/GL(k)$  la *grassmannienne* [15]<sup>9</sup> [33]<sup>10</sup> [39]<sup>11</sup>. Donc :  
 $\dim G(k, n) = kn - k^2 = k(n - k)$  [15]<sup>12</sup> [33]<sup>13</sup> et  $G(k, n) \cong \text{Mat}(k, n - k)$ .

On remarque que  $\dim G(k, n)$  est le nombre de coordonnées affines et que  $\dim G(n - k, n) = \dim G(k, n) = k(n - k)$  ; c'est la raison pour laquelle les grassmanniennes  $G(n - k, n)$  et  $G(k, n)$  sont qualifiées de *duales*.

**Remarque** : on peut préciser, dans la définition de  $G(k, n)$  le corps  $\mathbb{K}$  :  
 $G(k, n)(\mathbb{K})$  [26]<sup>14</sup>

•  $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^n) = \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{K})$  espace projectif, de dimension  $n - 1$ , associé au  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $V$  [3]<sup>15</sup>.

---

9. p. 92 éq. (1.2)

10. Attention  $G(k, n)$  est noté  $\mathbb{G}(k, n)$  ; il y a donc confusion avec ce qui suit

11. p. 68 Exemple 5

12. p. 92 ligne 4

13. p. 13

14. p. 6

15. p. 605





### 3 La grassmannienne $G(k, n)$

On pourra consulter [1] [7] [8] [11]<sup>16</sup> [15]<sup>17</sup> [21] [22]<sup>18</sup> [26] [30] [34] [40]<sup>19</sup> [47] [48]

$G(k, n) \triangleq \{U \mid U \text{ est un sous-espace vectoriel de } V \text{ de dimension } k\}$  [26]<sup>20</sup>.

#### 3.1 Le plongement $P$ de Plücker de $G(k, n)$ et les coordonnées de Plücker

On pourra consulter [26]<sup>21</sup> [35]<sup>22</sup>.

$$G(k, n) \xrightarrow{P} \mathbb{P}(\bigwedge^k V)$$
  

$$U \longmapsto P(U) = [[f_1 \wedge \dots \wedge f_k]]$$
, où  $\{f_1, \dots, f_k\}$  est une base de  $U$  et où  $[[\ ]]$  signifie la classe des éléments proportionnels.

$$[[f_1 \wedge \dots \wedge f_k]] = [[(f_1^1 e_1 + \dots + f_1^n e_n) \wedge \dots \wedge (f_k^1 e_1 + \dots + f_k^n e_n)]]$$

$$= [[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_k^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}]] = [[\omega_k]].$$

En effet si on change de base pour  $U$  on constate que  $P(U)$  est multiplié par le jacobien du changement de base et donc n'est défini qu'à une constante multiplicative près ; c'est donc bien un élément de l'espace *projectif*  $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$  et non de l'espace *affine*  $\bigwedge^k V$ .

Alors  $\mathbb{P}(\bigwedge^k V) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{C_n^k}) = \mathbb{P}_N(\mathbb{K})$ , avec  $N = C_n^k - 1$  (espace projectif de dimension  $N$  [22]<sup>23</sup>).

Les coordonnées homogènes  $\omega_k^{i_1 \dots i_k}$  de  $P(U)$ , dans la base canonique  $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$  de  $\bigwedge^k V$  sont les *coordonnées de Plücker* de  $U$ . Elles se calculent avec les coordonnées de Stiefel  $f_j^i$  ( $1 \leq i \leq n$ ;  $1 \leq j \leq k$ ) de  $U$  :  $\omega_k^{i_1 \dots i_k}$  est le mineur (maximal) de  $[f]$  construit avec les colonnes  $i_1 \dots i_k$ . Le nombre de coordonnées de Plücker  $\omega_k^{i_1 \dots i_k}$  de  $U$  est donc  $C_n^k = N + 1$ .

16. pp. 81-83 5. Applications : II grassmanniennes et pp. 182-184 (A.43), (A.44) et (A.45)

17. pp. 91-105 parties 1 et 2

18. p. 198

19. pp. 67-70 § 5.4 Grassmannians

20. p. 6

21. pp. 7-8 § 1.1.3

22. p. 3 § 3

23. pp. 11-12 th. 1.10

On peut calculer également les coordonnées de Plücker  $\varpi_k^{i_1 \dots i_k}$  de  $P(U)$ , dans la base canonique  $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$  de  $\bigwedge^k V$  avec les coordonnées affines  $g_j^i$  ( $k+1 \leq i \leq n$ ;  $1 \leq j \leq k$ ) de  $U$  :  $\varpi_k^{i_1 \dots i_k}$  est le mineur (maximal) de  $[g]$  construit avec les colonnes  $i_1 \dots i_k$ . En particulier  $\varpi_k^{12 \dots k} = 1$ . Le nombre de coordonnées de Plücker  $\varpi_k^{i_1 \dots i_k}$  de  $U$  non triviales est donc  $C_n^k - 1 = N$ .

### 3.2 La grassmannienne $G(k, n)$ est une variété algébrique

#### Définition

Soit  $\omega_k \in \bigwedge^k V$  et  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ . On dit que  $v$  divise  $\omega_k$  ssi il existe  $\sigma_{k-1} \in \bigwedge^{k-1} V$  tel que  $\omega_k = v \wedge \sigma_{k-1}$ .

#### Lemme 1

Soit  $\omega_k \in \bigwedge^k V$  et  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ .  $v$  divise  $\omega_k$  ssi  $v \wedge \omega_k = 0$ .

#### Démonstrations

• Si  $v$  divise  $\omega_k$  il existe  $\sigma_{k-1} \in \bigwedge^{k-1} V$  tel que  $\omega_k = v \wedge \sigma_{k-1}$  et alors  $v \wedge \omega_k = v \wedge v \wedge \sigma_{k-1} = 0$  QED.

• Si  $v \wedge \omega_k = 0$  et  $v \neq 0$  soit  $\{e_1 = v, e_2, \dots, e_n\}$  une base de  $V$ . On a  $\omega_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_k^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$  et alors  $v \wedge \omega_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_k^{i_1 \dots i_k} e_1 \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = 0$ . i.e. :  $\sum_{1 < i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_k^{i_1 \dots i_k} e_1 \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = 0$  et, par conséquent,  $\omega_k^{i_1 \dots i_k} = 0$  pour  $1 < i_1 < \dots < i_k \leq n$ . Alors  $\omega_k = e_1 \wedge \sum_{2 \leq i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_k^{1 i_2 \dots i_k} e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ , soit  $\omega_k = v \wedge \sigma_{k-1}$  avec  $v = e_1$  et  $\sigma_{k-1} = \sum_{2 \leq i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_k^{1 i_2 \dots i_k} e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$  et donc le vecteur  $v$  divise  $\omega_k$  QED.

#### Définition

On dit que  $\omega_k \in \bigwedge^k V$  est totalement décomposable ssi il existe  $k$  vecteurs linéairement indépendants :  $v_1, \dots, v_k \in V$  tels que  $\omega_k = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ .

#### Lemme 2

$\omega_k \in \bigwedge^k V$  est totalement décomposable ssi l'espace des vecteurs le divisant est de dimension  $k$ .

#### Démonstrations

• Si  $\omega_k \in \bigwedge^k V$  est totalement décomposable il existe  $k$  vecteurs linéairement indépendants :  $v_1, \dots, v_k \in V$  tels que  $\omega_k = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ . Alors d'après le premier lemme l'espace des vecteurs divisant  $\omega_k$  est l'ensemble :

$$U = \{v \in V \mid v \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_k = 0\}.$$

Ainsi  $v \in U$  ssi il est linéairement dépendant des vecteurs  $v_1, \dots, v_k$  i.e.  $U$  a pour base  $\{v_1, \dots, v_k\}$  donc est de dimension  $k$  QED.

• Soit  $U$  le sous espace de  $V$ , de dimension  $k$ , des vecteurs divisant  $\omega_k \in \bigwedge^k V$  et soit  $\{f_1, \dots, f_k\}$  une base de  $U$ . Étendons cette base à une base  $\{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n\}$  de  $V$ . On peut écrire :

$\omega_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a^{i_1 \dots i_k} f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_k}$ . Pour tout  $j = 1, \dots, k$  on a  $f_j \wedge \omega_k = 0$  et alors :

•  $f_1 \wedge \omega_k = 0 \Rightarrow a^{i_1 \dots i_k} = 0$  pour  $i_1 \neq 1$  et alors :

$$\omega_k = \sum_{2 \leq i_2 < i_3 < \dots < i_k \leq n} a^{1 i_2 \dots i_k} f_1 \wedge f_{i_2} \wedge \dots \wedge f_{i_k},$$

•  $f_2 \wedge \omega_k = 0 \Rightarrow a^{1 i_2 \dots i_k} = 0$  pour  $i_2 \neq 2$  et alors :

$$\omega_k = \sum_{3 \leq i_3 < i_4 < \dots < i_k \leq n} a^{1 2 i_3 \dots i_k} f_1 \wedge f_2 \wedge f_{i_3} \wedge \dots \wedge f_{i_k}.$$

•  $\dots$ ,

•  $f_k \wedge \omega_k = 0 \Rightarrow a_{1 2 \dots (k-1) i_k} = 0$  pour  $i_k \neq k$  et alors :

$$\omega_k = a^{1 2 \dots k} f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_k \text{ et } \omega_k \text{ est totalement décomposable QED.}$$

### Lemme 3

Soit  $\omega_k \in \bigwedge^k V$ . Considérons l'application  $\varphi_{\omega_k}$  :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi_{\omega_k}} & \bigwedge^{k+1} V \\ v & \longmapsto & \varphi_{\omega_k}(v) \triangleq \omega_k \wedge v \end{array} .$$

Donc  $\varphi_{\omega_k} \in \text{Hom}(V, \bigwedge^{k+1} V)$ .

Alors  $\omega_k$  est totalement décomposable ssi  $\ker(\varphi_{\omega_k})$  est de dimension  $k$ .

**Remarque** : il s'agit des notations de [18]<sup>24</sup> et de [26]<sup>25</sup>. De plus on peut noter que [15], avec des notations différentes, utilise un signe opposé.

### Démonstrations

Étant donné que  $v \wedge \omega_k = -\omega_k \wedge v$  alors  $\ker(\varphi_{\omega_k})$  est l'espace des vecteurs divisant  $\omega_k$ , d'après le lemme 1 et  $\omega_k$  est totalement décomposé ssi cet espace  $\ker(\varphi_{\omega_k})$  est de dimension  $k$ , d'après le lemme 2 QED.

On a  $[\varphi_{\omega_k}(v)] = [\omega_k \wedge v] = [\varphi_{\omega_k}][v]$ . Les matrices  $[\varphi_{\omega_k}(v)]$ ,  $[\varphi_{\omega_k}]$ ,  $[v]$  sont de dimensions respectives  $C_n^{k+1} \times 1$ ,  $C_n^{k+1} \times n$ ,  $n \times 1$ . Voir des exemples de calcul de  $[\varphi_{\omega_k}]$  ci-après.

---

24. p. 64

25. p. 11 et p. 13, mais avec une erreur de signe p. 13

- Considérons l'application  $\varphi_{\omega_k}^t$ , *transposée*<sup>26</sup> de l'application  $\varphi_{\omega_k}$  :

$$\begin{array}{ccc} (\bigwedge^{k+1} V)^* \cong \bigwedge^{k+1} V^* & \xrightarrow{\varphi_{\omega_k}^t} & V^* \\ \alpha^{*(k+1)} & \longmapsto & \varphi_{\omega_k}^t(\alpha^{*(k+1)}) \triangleq \alpha^{*(k+1)} \circ \varphi_{\omega_k} \end{array} .$$

Donc  $\varphi_{\omega_k}^t \in \text{Hom}(\bigwedge^{k+1} V^*, V^*)$ .

On a  $[\varphi_{\omega_k}^t(\alpha^{*(k+1)})] = [\alpha^{*(k+1)}][\varphi_{\omega_k}^t]^t = [\alpha^{*(k+1)}][\varphi_{\omega_k}]$ . Les matrices  $[\varphi_{\omega_k}^t(\alpha^{*(k+1)})]$ ,  $[\alpha^{*(k+1)}]$ ,  $[\varphi_{\omega_k}]$  sont de dimensions respectives  $1 \times n$ ,  $1 \times C_n^{k+1}$ ,  $C_n^{k+1} \times n$ .

- Considérons l'application  $\psi_{\omega_k}$  :

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xrightarrow{\psi_{\omega_k}} & \bigwedge^{n-k+1} V^* \\ v^* & \longmapsto & \psi_{\omega_k}(v^*) \triangleq \tilde{\omega}^{*(n-k)} \wedge v^* \end{array} .$$

Donc  $\psi_{\omega_k} \in \text{Hom}(V^*, \bigwedge^{n-k+1} V^*)$ .

**Remarque** : il s'agit des notations de [26]<sup>27</sup>. Par contre [18]<sup>28</sup> utilise un signe opposé. On a :

$[\psi_{\omega_k}(v^*)] = [\tilde{\omega}^{*(n-k)} \wedge v^*] = [v^*][\psi_{\omega_k}]^t$ . Les matrices  $[\psi_{\omega_k}(v^*)]$ ,  $[v^*]$ ,  $[\psi_{\omega_k}]^t$  sont de dimensions respectives  $1 \times C_n^{k-1}$ ,  $1 \times n$ ,  $n \times C_n^{k-1}$  (car  $C_n^{n-k+1} = C_n^{k-1}$ ).

La matrice  $[\psi_{\omega_k}]$  est donc de dimension  $C_n^{k-1} \times n$ . Voir des exemples de calcul de  $[\psi_{\omega_k}]$  ci-après.

- Considérons l'application  $\psi_{\omega_k}^t$ , *transposée* de l'application  $\psi_{\omega_k}$  :

$$\begin{array}{ccc} (\bigwedge^{n-k+1} V^*)^* \cong \bigwedge^{n-k+1} V & \xrightarrow{\psi_{\omega_k}^t} & (V^*)^* \cong V \\ \beta_{n-k+1} & \longmapsto & \psi_{\omega_k}^t(\beta_{n-k+1}) \triangleq \beta_{n-k+1} \circ \psi_{\omega_k} \end{array} .$$

Donc  $\psi_{\omega_k}^t \in \text{Hom}(\bigwedge^{n-k+1} V, V)$ . On a :

$[\psi_{\omega_k}^t(\beta_{n-k+1})] = [\psi_{\omega_k}^t][\beta_{n-k+1}] = [\psi_{\omega_k}]^t[\beta_{n-k+1}]$ . Les matrices  $[\psi_{\omega_k}^t(\beta_{n-k+1})]$ ,  $[\psi_{\omega_k}^t]$ ,  $[\beta_{n-k+1}]$  sont de dimensions respectives  $n \times 1$ ,  $n \times C_n^{k-1}$ ,  $C_n^{k-1} \times 1$ .

---

26. certains, comme [15] disent *duale*

27. p. 12

28. p. 64

### 3.3 Les relations de Plücker

On pourra consulter [4]<sup>29</sup> [7]<sup>30</sup> [8]<sup>31</sup> [9] [15]<sup>32</sup> [21] [24]<sup>33</sup> [30]<sup>34</sup> [39]<sup>35</sup> [41].

Soit  $\omega_k \in \bigwedge^k V$  et considérons le produit scalaire :

$$\Xi_{\alpha^{*(k+1)}, \beta_{n-k+1}}(\omega_k) \triangleq \langle \varphi_{\omega_k}^t(\alpha^{*(k+1)}), \psi_{\omega_k}^t(\beta_{n-k+1}) \rangle = [\varphi_{\omega_k}^t(\alpha^{*(k+1)})] [\psi_{\omega_k}^t(\beta_{n-k+1})] \\ = [\alpha^{*(k+1)}] [\varphi_{\omega_k}] [\psi_{\omega_k}]^t [\beta_{n-k+1}]$$

Alors  $\omega_k \in G(k, n)$  ssi  $\Xi_{\alpha^{*(k+1)}, \beta_{n-k+1}}(\omega_k) = 0$ ;  $\forall \alpha^{*(k+1)} \in \bigwedge^{k+1} V^*$  et  $\forall \beta_{n-k+1} \in \bigwedge^{n-k+1} V$  [18]<sup>36</sup> [21]<sup>37</sup>.

Finalement  $\omega_k \in G(k, n)$  ssi  $[\varphi_{\omega_k}] [\psi_{\omega_k}]^t = 0$ . Cette égalité matricielle donne  $C_n^{k+1} \times C_n^{k-1}$  égalités scalaires. Parmi elles certaines sont triviales et les autres, qui peuvent apparaître plusieurs fois, en nombre nrp  $G(k, n)$ , si elles ne sont comptées qu'une fois, sont appelées relations de Plücker.

Les nrp  $G(k, n)$  relations de Plücker peuvent elles mêmes être dépendantes ; il n'y en a que nrpi  $G(k, n)$  d'indépendantes, d'après [32] :

$$\text{nrpi } G(k, n) = \frac{1}{2} [(C_n^k)^2 + C_n^k] - \frac{1}{k+1} C_n^k C_{n+1}^k.$$

On peut expliciter les  $C_n^{k+1} \times C_n^{k-1}$  égalités scalaires précédentes par utilisation d'une contraction (ou convolution).

*Définition de l'opération  $\omega^{*l} \lrcorner$  pour  $\omega^{*l} \in \bigwedge^l V^*$*

Cette opération est appelée contraction [8]<sup>38</sup> ou convolution [39]<sup>39</sup> selon les auteurs. On peut dire que  $\omega^{*l} \lrcorner \omega_m$  est la convolution de  $\omega^{*l}$  et  $\omega_m$  [39]<sup>40</sup>. Pour [11]<sup>41</sup> l'opération  $\omega^{*l} \lrcorner$  est appelée produit intérieur par  $\omega^{*l}$ .

$$\text{Cette opération est telle que } \begin{array}{ccc} \bigwedge^m V & \xrightarrow{\omega^{*l} \lrcorner} & \bigwedge^{m-l} V \\ \omega_m & \longmapsto & \omega^{*l} \lrcorner \omega_m \end{array}, \text{ si } m \geq l$$

(et elle est nulle si  $m < l$ ).

29. pp. 5-6 The Plücker relations

30. pp. 2-5 § 2 The Plücker relations et pp. 16-18 § 5.4 The Plücker relations(bis)

31. p. 7

32. pp. 94-96 § D Plücker relations et en particulier théorème 1.3

33. pp. 1062-1066 § 2 The Grassmann manifold

34. p. 8

35. p. 42 éq. (2)

36. pp. 63-65

37. p. 9 Theorem 4.6

38. p. 7

39. p. 42

40. p. 42

41. p. 182

(i) On définit tout d'abord l'opération  $v^* \lrcorner$  pour  $v^* \in V^*$  i.e. on considère le cas  $l = 1$  pour lequel  $\bigwedge^1 V^* = V^*$  et  $\omega^{*1} = v^*$  :

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^m V & \xrightarrow{v^* \lrcorner} & \bigwedge^{m-1} V \\ \omega_m & \longmapsto & v^* \lrcorner \omega_m \end{array},$$

de telle manière que :

$$\begin{aligned} v^* \lrcorner \lambda &\triangleq 0 \text{ si } \lambda \in \bigwedge^0 V = \mathbb{K}, \\ v^* \lrcorner v_1 &\triangleq v^*(v_1) \in \bigwedge^0 V = \mathbb{K} \text{ si } v_1 \in \bigwedge^1 V = V, \\ v^* \lrcorner (v_1 \wedge v_2) &\triangleq v^*(v_1) \wedge v_2 - v_1 \wedge v^*(v_2) = v^*(v_1) v_2 - v^*(v_2) v_1 \in \bigwedge^1 V = V \\ \text{si } v_1 \wedge v_2 &\in \bigwedge^2 V, \\ \dots & \end{aligned}$$

$v^* \lrcorner (v_1 \wedge \dots \wedge v_m) \triangleq \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} v^*(v_i) v_1 \wedge \dots \wedge \widehat{v}_i \wedge \dots \wedge v_m$   
( $\widehat{v}_i$  terme omis) [8]<sup>42</sup> et on étend à tout  $\omega_m \in \bigwedge^m V$ , non nécessairement décomposable, par linéarité. On remarque qu'alors si  $\omega_m = \omega_{m-1} \wedge v_m$  on a :

$$v^* \lrcorner \omega_m = v^* \lrcorner (\omega_{m-1} \wedge v_m) = (v^* \lrcorner \omega_{m-1}) \wedge v_m + (-1)^{m-1} \omega_{m-1} \wedge (v^* \lrcorner v_m) \quad [39]^{43}.$$

(ii) Puis on pose :

$(v^{*1} \wedge v^{*2} \wedge \dots \wedge v^{*(l-1)} \wedge v^{*l}) \lrcorner \omega_m \triangleq v^{*1} \lrcorner (v^{*2} \lrcorner (\dots (v^{*(l-1)} \lrcorner (v^{*l} \lrcorner \omega_m)) \dots))$  et on étend à tout  $\omega^{*l} \in \bigwedge^l V^*$ , non nécessairement décomposable, par linéarité.

Alors  $\omega_k \in G(k, n)$  ssi  $(\omega^{*(k-1)} \lrcorner \omega_k) \wedge \omega_k = 0$  dans  $\bigwedge^{k+1} V$ ,  
 $\forall \omega^{*(k-1)} \in \bigwedge^{k-1} V^*$  [8]<sup>44</sup> [15]<sup>45</sup> [39]<sup>46</sup>.

On peut expliciter la relation précédente par spécialisation. Si on considère  $\omega^{*(k-1)} = e^{*i_1} \wedge \dots \wedge e^{*i_{k-1}}$  on montre que la relation précédente conduit à :

$\omega_k \in G(k, n)$  ssi pour  $1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n$  et  $1 \leq j_1 < \dots < j_{k+1} \leq n$  on a :

$$\sum_{p=1}^{k+1} (-1)^p \omega_k^{i_1 \dots i_{k-1} j_p} \omega_k^{j_1 \dots \widehat{j}_p \dots j_{k+1}} = 0, \quad (\widehat{j}_p \text{ indice omis}) \quad [8]^{47} \quad [15]^{48} \quad [24]^{49} \quad [39]^{50}.$$

Il s'agit bien des  $C_n^{k+1} \times C_n^{k-1}$  égalités scalaires précédentes.

---

42. p. 7

43. p. 42 éq. (1)

44. p. 7

45. p. 96 éq. (1.11)

46. p. 42 éq.(2)

47. p. 7

48. pp. 94-95 Partie D éq. (1.7)

49. pp. 1062-1066 § 2. The Grassmannian manifold et p. 1063 éq. (QR)

50. p. 42 éq. (3)

## 4 Le calcul de Schubert

On pourra consulter [8]<sup>51</sup> [26]<sup>52</sup> [30]<sup>53</sup> [34]<sup>54</sup>.

### 4.1 Partitions

On pourra consulter [2]<sup>55</sup> [5] [7].

Une partition est une suite finie faiblement décroissante de nombres entiers non-négatifs. On note  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ , avec  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$  une partition. On dit que  $|\lambda| \triangleq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$  est le *degré*, le *poids* [8] [27] ou la *taille* [57] de la partition et  $l(\lambda) \triangleq \max\{i | \lambda_i \neq 0\}$  sa *longueur*. En conséquence on note :

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{l(\lambda)})$  i.e. sans les éventuels zéros situés à droite et  $\lambda = ()$  si  $\lambda_1 = 0$ . Par exemple on écrit (5, 4, 2) et non (5, 4, 2, 0, 0).

Si  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ , avec  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$  on dit que c'est une partition en, au plus,  $k$  parties.

Soit  $d \in \mathbb{N}$ . On dit que  $\lambda$  est une partition de  $d$  ssi  $|\lambda| = d$ .

Donc  $\lambda$  est une partition de  $d$  en, au plus,  $k$  parties ssi  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  et  $|\lambda| = d$ .

#### 4.1.1 Notion de Partitions admissibles dans $G(k, n)$

On pourra consulter [7]<sup>56</sup> [8]<sup>57</sup> [34]<sup>58</sup>

Si  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  est une partition en, au plus,  $k$  parties on peut remarquer que :  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$ , avec  $n - k$  zéros.

Une partition  $\lambda$  en, au plus,  $k$  parties est admissible dans  $G(k, n)$  ssi  $n - k \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$ . Il y a donc  $C_n^k$  partitions admissibles dans  $G(k, n)$ .

---

51. à partir du bas de la p. 7

52. pp. 29-41 § 1.3

53. pp. 5-7 textsection 3

54. pp. 5-6 textsection 2.1

55. p. 0-14 et p. 0-15 mais attention une partition est définie comme une suite faiblement croissante et non décroissante comme nous la présentons ici

56. p. 8 éq. (8)

57. p. 8

58. p. 5 mais qui ne dit pas "admissible"



**Partition duale (ou complémentaire ou conjuguée) d'une partition admissible dans  $G(k, n)$**

On pourra consulter [8]<sup>59</sup> qui parle de partition duale, notée  $\lambda^*$ , (terme que nous allons utiliser) [27]<sup>60</sup> qui parle de partition complémentaire, notée  $\lambda^\vee$ , et [5] [7] [17] qui parlent de partition conjuguée.

La partition duale  $\lambda^*$ , de  $\lambda$ , partition admissible dans  $G(k, n)$  en, au plus,  $k$  parties est la partition en, au plus,  $k$  parties :

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_k^*), \text{ telle que :}$$

$$\lambda_l^* \triangleq n - k - \lambda_{k-l+1}; \quad l = 1, \dots, k \text{ [8] }^{61}.$$

On constate qu'il s'agit bien d'une partition en, au plus,  $k$  parties et qu'elle est admissible dans  $G(k, n)$ , car :

$$n - k \geq \lambda_1^* \geq \lambda_2^* \geq \dots \geq \lambda_k^* \geq 0.$$

On note que  $|\lambda^*| = k(n - k) - |\lambda|$ .

**Le symbole de Schubert  $\mathbf{j}$  dans  $G(k, n)$  [30]<sup>62</sup>**

$\mathbf{j} \triangleq (j_1, j_2, \dots, j_k) \triangleq (n - k - \lambda_1 + 1, n - k - \lambda_2 + 2, \dots, n - \lambda_k)$ .  
Donc  $j_i = n - k - \lambda_i + i; \quad i = 1, \dots, k$ .

On a  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$  et on peut dire  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\lambda)$  [34]<sup>63</sup>.

Inversement :

$\lambda \triangleq (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \triangleq (n - k - j_1 + 1, n - k - j_2 + 2, \dots, n - j_k)$  et on peut dire  $\lambda = \lambda(\mathbf{j})$ .

On a aussi  $\lambda_i = \#\{[j_i, n] \setminus \mathbf{j}\}$  pour  $i = 1, \dots, k$  où  $[j_i, n]$  représente l'ensemble des nombres de  $j_i$  à  $n$  [34]<sup>64</sup>. Voir des exemples ci-après.

**La bijection sh définissant une forme dans  $G(k, n)$  ("shape" en anglais)**

$$\mathbf{a} \triangleq \text{sh}(\mathbf{j}) \triangleq (a_1, a_2, \dots, a_k) \triangleq (j_1 - 1, j_2 - 2, \dots, j_k - k)$$

$$\triangleq (n - k - \lambda_1, n - k - \lambda_2, \dots, n - k - \lambda_k).$$

---

59. p. 12

60. p. 7

61. p. 12

62. p. 6

63. p. 5 qui note  $\mathbf{j} = I(\lambda)$

64. p. 5

**Notion de matrice de dimension  $k \times n$  en position  $\mathbf{j} \triangleq (j_1, j_2, \dots, j_k)$  où  $\mathbf{j}$  est le symbole de Schubert dans  $G(k, n)$  [2]<sup>65</sup>, [27]<sup>66</sup>, [30]<sup>67</sup>.**

Il s'agit de la matrice qui a pour élément 1 sur la ligne  $l$  et le colonne  $j_l$  ( $l = 1, \dots, k$ ) et pour éléments 0 dessus, dessous et à droite de cet élément 1. Cette matrice a donc la forme :

$$\begin{pmatrix} * & \dots & * & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & 0 & \dots & * & \dots & * & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & 0 & \dots & * & \dots & * & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle appartient donc à  $\mathbb{K}^{j_1 + \dots + j_k - \frac{k(k+1)}{2}}$ .

**Exemple :** matrice de dimension  $3 \times 10$  en position  $(3, 7, 9)$  dans  $G(3, 10)$ .

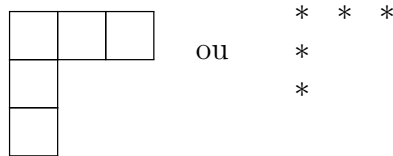
On vérifie que  $(3, 7, 9)$  est bien un symbole de Schubert dans  $G(3, 10)$ . Cette matrice est alors :

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & * & * & 0 & * & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Elle appartient à } \mathbb{K}^{13}.$$

**Diagramme de Young associé à une partition (en notation anglaise)**

On pourra consulter [2]<sup>68</sup> mais qui définit la partition de manière différente à celle exposée ici et qui, en conséquence, utilise un diagramme de Ferrers et non de Young.

Il s'agit d'un diagramme, noté également  $\lambda$ , dont les lignes sont constituées de  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  cellules (boîtes vides ou étoiles) respectivement. Par exemple le diagramme de Young associé à la partition  $\lambda = (3, 1, 1)$  est  $\lambda$  :



65. pp. 0-10-0-12

66. p. 3 (mais où les lignes sont considérées en ordre inverse)

67. pp. 12-13

68. p. 14

Alors  $l(\lambda)$  est la longueur de la première colonne du diagramme de Young  $\lambda$  et  $|\lambda|$  est le nombre de cellules de ce diagramme. Pour l'exemple précédent on a  $l(\lambda) = 3$  et  $|\lambda| = 5$ .

L'équerre associée à une cellule d'un diagramme de Young est constituée de cette cellule et des cellules situées à droite et en dessous de cette cellule. La longueur d'une cellule est le nombre de cellules de l'équerre associée à cette cellule. Pour l'exemple précédent nous avons remplacé l'étoile qui représente une cellule par la longueur de cette cellule :

$$\begin{array}{ccc} 5 & 2 & 1 \\ & 2 & \\ & & 1 \end{array}$$

### Tableau de Young associé à un diagramme de Young

On pourra consulter [54] [55] [57].

Un tableau de Young est un tableau obtenu en remplissant les boîtes d'un diagramme de Young d'entiers positifs. Ce diagramme étant lui-même associé à une partition  $\lambda$  on dit que  $\lambda$  est la *forme* du tableau de Young.

Un tableau de Young, de forme  $\lambda$ , est *semi-standard* quand ses lignes sont croissantes au sens large, ses colonnes croissantes au sens strict et quand tous les entiers qui le composent de 1 à la valeur maximale sont présents.

Par exemple :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \text{ est un tableau de Young semi-standard de forme } (3, 1, 1)$$

Un tableau de Young, de forme  $\lambda$ , est *standard* quand ses lignes et colonnes sont croissantes au sens strict et que les entiers qui le composent sont  $1, 2, \dots, |\lambda|$ .

Le nombre  $f^\lambda$  de tableaux de Young standards de forme  $\lambda$  est donné par la formule des équerres [54] [55] [57]<sup>69</sup> :

$$f^\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{1 \leq i \leq l(\lambda)} b_i}, \text{ où } b_i \text{ est la longueur de la cellule } i.$$

Par exemple :  $f^{(3,1,1)} = \frac{5!}{5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6$ . Il y a donc 6 tableaux de Young standards de forme  $(3, 1, 1)$ .

---

69. p. 1

On vérifie que c'est bien exact car ces tableaux sont :

1	2	3	1	2	4	1	2	5	1	3	4	1	3	5	1	4	5
4			3			3			2			2			2		
5			5			4			5			4			3		

## 4.2 Cellules de Schubert

On pourra consulter [2]<sup>70</sup> [8]<sup>71</sup> [27]<sup>72</sup> [30]<sup>73</sup> [34]<sup>74</sup>.

Les cellules de Schubert, notées  $\mathcal{C}_{\mathbf{j}}$  où  $\mathbf{j}$  est un symbole de Schubert ou  $\Omega_{\lambda}$  où  $\lambda$  est une partition [avec  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\lambda)$  et  $\lambda = \lambda(\mathbf{j})$ ], sont des décompositions de la grassmannienne  $G(k, n)$  de telle sorte que :

$$G(k, n) = \cup \mathcal{C}_{\mathbf{j}} = \cup \Omega_{\lambda} \quad [2]^{75}.$$

$\mathcal{C}_{\mathbf{j}}$  a pour *représentant* la matrice de dimension  $k \times n$  en position  $\mathbf{j} \triangleq (j_1, j_2, \dots, j_k)$ . Par conséquent  $\dim(\mathcal{C}_{\mathbf{j}}) = j_1 + \dots + j_k - \frac{k(k+1)}{2}$ .

Si on utilise la partition  $\lambda = \lambda(\mathbf{j})$  les cellules de Schubert sont notées  $\Omega_{\lambda}$ . Par conséquent  $\dim(\Omega_{\lambda}) = k(n - k) - |\lambda|$ .

## 4.3 Variétés de Schubert

On pourra consulter [2]<sup>76</sup> [7]<sup>77</sup> [8]<sup>78</sup> [24]<sup>79</sup> [27]<sup>80</sup> [30]<sup>81</sup> [31]<sup>82</sup>.

Les variétés de Schubert, notées  $\Xi_{\mathbf{j}}$  où  $\mathbf{j}$  est le symbole de Schubert, ou  $\Sigma_{\lambda}$  où  $\lambda = \lambda(\mathbf{j})$  sont les fermetures de  $\mathcal{C}_{\mathbf{j}}$  ou  $\Omega_{\lambda}$  avec la topologie de Zariski [2]<sup>83</sup> :

$$\Xi_{\mathbf{j}} \triangleq \overline{\mathcal{C}_{\mathbf{j}}}, \quad \Sigma_{\lambda} \triangleq \overline{\Omega_{\lambda}}.$$

---

70. p. 0-12 notées  $\mathcal{C}_{\mathbf{j}}$   
71. p. 8 notées  $\Sigma_{\lambda_1, \dots, \lambda_k}^c$   
72. p. 3 notées  $X_{i_1, \dots, i_k}^0$   
73. pp. 5-7 § 3 "Schubert cells"  
74. pp. 5-6 § 2.1 "Schubert cells" notées  $\Omega_{\lambda}$   
75. p. 0-12  
76. p. 0-13 notées  $X_{\lambda}$  peut-être par erreur à la plce de  $X_{\mathbf{j}}$   
77. p. 7 notées  $\Omega_{\underline{a}}$   
78. p. 8 notées  $\Sigma_{\lambda_1, \dots, \lambda_k}(F)$   
79. p. 1070 notées  $\Omega(A_0 \dots A_d)$   
80. p. 3 notées  $X_{i_1, \dots, i_k}$   
81. p. 8 notées  $X_{\mathbf{j}}(F)$   
82. p. 13 notées  $\Omega(\Lambda_0, \dots, \Lambda_k)$   
83. p. 0-13

## 4.4 Cycles (ou classes) de Schubert

On pourra consulter [2]<sup>84</sup> [8]<sup>85</sup> [24]<sup>86</sup> [30]<sup>87</sup> [31]<sup>88</sup>

On utilisera de préférence le terme de “cycle de Schubert”. Les cycles de Schubert, notés  $\sigma_{\lambda}$ , sont les classes de cohomologie, notées  $[\ ]$  des variétés de Schubert  $\Sigma_{\lambda}$  :

$$\sigma_{\lambda} \triangleq [\Sigma_{\lambda}].$$

Ils dépendent uniquement de la partition  $\lambda$ , du symbole de Schubert  $\mathbf{j}$  ou de la forme  $\mathbf{a}$ . Ainsi par abus de langage certains auteurs disent que  $\sigma_{\lambda}$  est égal à la matrice de dimension  $k \times n$  en position  $\mathbf{j}$ .

Lorsque  $\lambda = (\lambda_1)$  le cycle  $\sigma_{\lambda} = \sigma_{(\lambda_1)}$  est appelé spécial ou de Pieri.

### 4.4.1 Multiplication des cycles de Schubert

Il est possible de multiplier les cycles de Schubert et cette multiplication, notée  $\cdot$ , est commutative. On a alors les formules suivantes.

#### Formule de Pieri

Si  $\sigma_{\lambda} = \sigma_{(\lambda_1)}$  est un cycle spécial ou de Pieri et  $\sigma_{\mu}$  un cycle de Schubert quelconque on a :

$$\sigma_{\lambda} \cdot \sigma_{\mu} = \sigma_{(\lambda_1)} \cdot \sigma_{\mu} = \sum_{\nu} \sigma_{\nu}, \text{ avec } \mu_1 \leq \nu_1, \mu_i \leq \nu_i \leq \mu_{i-1}; i = 2, \dots, l(\mu), \nu_{l(\mu)+1} \leq \mu_{l(\mu)} \text{ et } |\nu| = \lambda_1 + |\mu|.$$

#### Formule de Giambelli

Elle exprime tout cycle de Schubert comme produits de cycles spéciaux ou de Pieri [8]<sup>89</sup>.

$$\sigma_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)} = \begin{vmatrix} \sigma_{(\lambda_1)} & \sigma_{(\lambda_1+1)} & \sigma_{(\lambda_1+2)} & \cdots & \sigma_{(\lambda_1+k-1)} \\ \sigma_{(\lambda_2-1)} & \sigma_{(\lambda_2)} & \sigma_{(\lambda_2+1)} & \cdots & \sigma_{(\lambda_2+k-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{(\lambda_k-k+1)} & \sigma_{(\lambda_k-k+2)} & \sigma_{(\lambda_k-k+3)} & \cdots & \sigma_{(\lambda_k)} \end{vmatrix},$$

avec  $\sigma_{(i)} = 0$  pour  $i < 0$  et  $\sigma_{(0)} = 1$ .

On note  $\sigma_{(j)}^i \triangleq \sigma_{(j)} \cdot \dots \cdot \sigma_{(j)}$ , avec  $i - 1$  multiplications.

84. p. 0-17 “Schubert classes” notées  $[X_j]$

85. p. 9 “classes of Schubert varieties” notées  $\sigma_{\lambda}$

86. p. 1070 “Schubert cycles” notés  $\Omega(a_0, \dots, a_d)$

87. pp. 10-15 § 5 et §6

88. p. 14 “cycle de Schubert” notés  $\Omega(l_0 \dots l_k)$

89. p. 15 Théorème 2.22

### Exemples :

avec :

□ d=2

$$\sigma_{(1,1)} = \sigma_{(1)}^2 - \sigma_{(2)}$$

□ d=3

$$\sigma_{(2,1)} = \sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}$$

$$\sigma_{(1,1,1)} = \sigma_{[1]}^3 - 2\sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}$$

□ d=4

$$\sigma_{(3,1)} = \sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(3)} - \sigma_{(4)}$$

$$\sigma_{(2,2)} = -\sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(3)} + \sigma_{(2)}^2$$

$$\sigma_{(2,1,1)} = \sigma_{(1)}^3 - \sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(2)} - \sigma_{(2)}^2 + \sigma_{(4)}$$

$$\sigma_{(1,1,1,1)} = \sigma_{(1)}^4 - 3\sigma_{(1)}^2 \cdot \sigma_{(2)} + 2\sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(3)} + \sigma_{(2)}^2 - \sigma_{(4)}$$

□ d=5

$$\sigma_{(4,1)} = \sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(4)} - \sigma_{(5)}$$

$$\sigma_{(3,2)} = -\sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(4)} + \sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3)}$$

$$\sigma_{(3,1,1)} = \sigma_{(1)}^2 \cdot \sigma_{(3)} - \sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(4)} - \sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3)} + \sigma_{(5)}$$

$$\sigma_{(2,2,1)} = -\sigma_{(1)}^2 \cdot \sigma_{(3)} + \sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(2)}^2 + \sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(4)} - \sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3)}$$

$$\sigma_{(2,1,1,1)} = \sigma_{(1)}^3 \cdot \sigma_{(2)} - \sigma_{(1)}^2 \cdot \sigma_{(3)} - 2\sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(2)}^2 + \sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(4)} + 2\sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3)} - \sigma_{(5)}$$

$$\sigma_{(1,1,1,1,1)} = \sigma_{(1)}^5 - 4\sigma_{(1)}^3 \cdot \sigma_{(2)} + 3\sigma_{(1)}^2 \cdot \sigma_{(3)} + 3\sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(2)}^2 - 2\sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(4)} - 2\sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3)} + \sigma_{(5)}$$

...

On vérifie que la somme des coefficients des termes de droite est nulle.

### Lien entre les formules de Pieri et de Giambelli

On a  $(-1)^k \sigma_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k)} = \sum_{j=1}^k (-1)^j \sigma_{(\lambda_j + k - j)} \cdot \sigma_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1} - 1, \dots, \lambda_k - 1)}$  [8]<sup>90</sup>.

### Cas général

Si  $\sigma_{\lambda}$  et  $\sigma_{\mu}$  sont deux cycles de Schubert quelconques qui correspondent à des partitions  $\lambda$  et  $\mu$  on a  $\sigma_{\lambda} \cdot \sigma_{\mu} = \sum_{\nu} c_{\lambda, \mu}^{\nu} \sigma_{\nu}$ , avec des partitions  $\nu$  telles que  $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$  et des coefficients  $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$  entiers, positifs ou nuls, appelés de Littlewood-Richardson [7]<sup>91</sup> [8]<sup>92</sup>. Le calcul de  $\sigma_{\lambda} \cdot \sigma_{\mu}$  est ainsi ramené à celui de ces coefficients.

---

90. p. 14 Exercice 2.21

91. p.19 où les coefficients de L-R sont notés  $N_{\lambda\mu\nu}$

92. p. 10

**Remarque** : ces mêmes coefficients interviennent pour les produits des polynômes de Schur, définis ci-après [2].

Pour le calcul des coefficients de Littlewood-Richardson on pourra consulter [2]<sup>93</sup> [7]<sup>94</sup> [8]<sup>95</sup> [24]<sup>96</sup> [27]<sup>97</sup> [30]<sup>98</sup> [31]<sup>99</sup>.

Pour le calcul de ces coefficients nous allons exposer la méthode des  $\mu$ -extensions strictes de  $\lambda$  de [7]<sup>100</sup> qui dit que  $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$  est le nombre de  $\mu$ -extensions strictes de  $\lambda$  de forme  $\nu$ . Elle est essentiellement la même que celle de [50].

On commence par remplacer la partition  $\lambda$  par son diagramme de Young (par exemple avec des étoiles \*) également noté  $\lambda$ . Étant donné que  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$  on fabrique un tableau de Young, également noté  $\mu$  avec  $\mu_1$  chiffres 1 sur la première ligne,  $\mu_2$  chiffres 2 sur la deuxième ligne, etc. Puis on fabrique des  $\mu$ -extensions de  $\lambda$  en bordant, à droite, le diagramme de Young de  $\lambda$  par tous les chiffres qui apparaissent dans le tableau de Young de  $\mu$  et en ajoutant éventuellement d'autres lignes de telle manière que cette extension conserve la forme d'un tableau de Young et que deux chiffres identiques n'apparaissent pas dans la même colonne. La forme  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots)$  de cette extension est alors telle que  $\nu_i$  est le nombre d'éléments de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de cette extension. À toute  $\mu$ -extension de  $\lambda$  on associe un *mot* composé des chiffres de cette extension lus de droite à gauche et de haut en bas. L'extension est dite *stricte* si son *mot* est un *mot de réseau* [7]<sup>101</sup> ou *mot de Yamamouchi* [50] i.e. si toute sous-suite  $(m_1, \dots, m_p)$  du *mot*  $(m_1, \dots, m_q)$  ( $p \leq q$ ) contient un nombre de 1 supérieur ou égal au nombre de 2, un nombre de 2 supérieur ou égal au nombre de 3, un nombre de 3 supérieur ou égal au nombre de 4, etc. De très nombreux exemples sont indiqués ci-après dans l'Annexe.

On peut vérifier que la multiplication des cycles de Schubert est commutative :  $\sigma_{\mu} \cdot \sigma_{\lambda} = \sigma_{\lambda} \cdot \sigma_{\mu}$ .

On peut vérifier aussi que  $c_{\lambda, \mu}^{\nu} = \sigma_{\lambda} \cdot \sigma_{\mu} \cdot \sigma_{\nu^*}$  [8]<sup>102</sup> [27]<sup>103</sup>.

---

93. pp. 0-17 où les coefficients de Littlewood-Richardson sont définis pour les produits des polynômes de Schur

94. pp. 18-29 §6 "Intersection theory" et §7 "The intersection theory on  $G(2, 4)$ "

95. pp. 10-15

96. p. 1073

97. pp. 5-12

98. pp. 11-15

99. pp. 15-16

100. pp. 19-21 "Example 6.3"

101. p. 19 "lattice word"

102. p. 12

103. p. 7

## 5 Polynômes de Schur

On pourra consulter [49] [52]

### 5.1 Polynômes symétriques élémentaires

Ce sont les polynômes :

$e_i(x_1, \dots, x_k) \triangleq \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq k} x_{j_1} \dots x_{j_i}$  ;  $i = 1, \dots, k$ . On a donc :

$$e_1(x_1, \dots, x_k) = \sum_{1 \leq j \leq k} x_j,$$

$$e_2(x_1, \dots, x_k) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq k} x_{j_1} x_{j_2},$$

⋮

$$e_k(x_1, \dots, x_k) = x_1 \dots x_k,$$

$$e_i(x_1, \dots, x_k) = 0 \text{ si } i > k.$$

Et on pose  $e_0(x_1, \dots, x_k) \triangleq 1$ .

On a la relation :

$$\prod_{j=1}^k (x - x_j) = x^k - e_1(x_1, \dots, x_k) x^{k-1} + \dots + (-1)^k e_k(x_1, \dots, x_k).$$

Si  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  est une partition on pose :

$$e_\lambda(x_1, \dots, x_k) \triangleq e_{\lambda_1}(x_1, \dots, x_k) \dots e_{\lambda_m}(x_1, \dots, x_k).$$

#### 5.1.1 Exemples

$$e_1(x_1) = x_1$$

$$e_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$e_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

$$e_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3.$$

### 5.2 Polynômes symétriques homogènes complets

Ce sont les polynômes :

$$h_i(x_1, \dots, x_k) \triangleq \sum_{l_1 + \dots + l_k = i ; l_j \geq 0} x_1^{l_1} \dots x_k^{l_k} ; i \geq 0, k \geq 1.$$

Si  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  est une partition on pose :

$$h_\lambda(x_1, \dots, x_k) \triangleq h_{\lambda_1}(x_1, \dots, x_k) \dots h_{\lambda_m}(x_1, \dots, x_k).$$



### 5.2.1 Exemples

$$h_1(x_1) = x_1$$

$$h_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$h_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$$

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2$$

$$h_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^3 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_3^3$$

$$h_{(4)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_1^3 x_2 + x_1^3 x_3 + x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_3^2 + x_1 x_2^3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_1 x_3^3 + x_2^4 + x_2^3 x_3 + x_2^2 x_3^2 + x_2 x_3^3 + x_3^4$$

$$h_{(5)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^5 + x_1^4 x_2 + x_1^4 x_3 + x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_3^2 + x_1^2 x_2^3 + x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_3^3 + x_1 x_2^4 + x_1 x_2^3 x_3 + x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1 x_2 x_3^3 + x_1 x_3^4 + x_2^5 + x_2^4 x_3 + x_2^3 x_3^2 + x_2^2 x_3^3 + x_2 x_3^4 + x_3^5$$

## 5.3 Liens entre les polynômes symétriques élémentaires et les polynômes symétriques homogènes complets

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i e_i(x_1, \dots, x_k) h_{m-i}(x_1, \dots, x_k) = 0 \text{ ssi } m \geq 1.$$

## 5.4 Polynômes de Schur

Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  une partition de degré  $d = |\lambda|$  (rappel :  $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$ ). Donc pour  $k < n$  on a :  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n)$  avec  $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ .

$$\text{Soit } v_\lambda(x_1, \dots, x_n) \triangleq \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1} & \dots & x_n^{\lambda_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\lambda_n} & \dots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix} \text{ un polynôme de degré } d \text{ [49]}^{104}.$$

Soit  $\delta = (n-1, \dots, 1, 0)$  qui est une partition de degré  $|\delta| = \frac{n(n-1)}{2}$  et

$$v_\delta(x_1, \dots, x_n) \triangleq \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_j - x_k) \text{ le déterminant de}$$

Vandermonde qui est un polynôme de degré  $|\delta| = \frac{n(n-1)}{2}$ .

Alors  $s_\lambda(x_1, \dots, x_n) \triangleq \frac{v_{\lambda+\delta}(x_1, \dots, x_n)}{v_\delta(x_1, \dots, x_n)}$  est le polynôme de Schur. Il est de degré  $d = |\lambda|$ .

---

104. où  $v_\lambda$  est noté  $a_\lambda$

**Remarque :** Le définition précédente valable a priori pour  $k < n$  s'étend sans problème à  $k = n$ .

#### 5.4.1 Exemples de polynômes de Schur

On va considérer le cas  $n = 3$ ; donc  $k \leq 3$ . Le cas  $n = 2$  s'en déduit en faisant  $x_3 = 0$  et le cas  $n = 1$  s'en déduit en faisant  $x_3 = x_2 = 0$ .

$$\square d = 1$$

$$s_{(1)}(x_1, x_2, x_3) = h_{(1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\square d = 2$$

$$s_{(2)}(x_1, x_2, x_3) = h_{(2)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2$$

$$s_{(1,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

$$\square d = 3$$

$$s_{(3)}(x_1, x_2, x_3) = h_{(3)}(x_1, x_2, x_3) \\ = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^3 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_3^3$$

$$s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + 2 x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2$$

$$s_{(1,1,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$$

$$\square d = 4$$

$$s_{(4)}(x_1, x_2, x_3) = h_{(4)}(x_1, x_2, x_3) \\ = x_1^4 + x_1^3 x_2 + x_1^3 x_3 + x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_3^2 + x_1 x_2^3 \\ + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_1 x_3^3 + x_2^4 + x_2^3 x_3 + x_2^2 x_3^2 + x_2 x_3^3 + x_3^4$$

$$s_{(3,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 + x_1^3 x_3 + x_1^2 x_2^2 + 2 x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_3^2 + x_1 x_2^3 \\ + 2 x_1 x_2^2 x_3 + 2 x_1 x_2 x_3^2 + x_1 x_3^3 + x_2^3 x_3 + x_2^2 x_3^2 + x_2 x_3^3$$

$$s_{(2,2)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2$$

$$s_{(2,1,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2$$

$$\square d = 5$$

$$s_{(5)}(x_1, x_2, x_3) = h_{(5)}(x_1, x_2, x_3) \\ = x_1^5 + x_1^4 x_2 + x_1^4 x_3 + x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_3^2 + x_1^2 x_3^3 \\ + x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_3^3 + x_1 x_2^4 + x_1 x_2^3 x_3 + x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1 x_2 x_3^3 + x_1 x_3^4 + x_2^5 \\ + x_2^4 x_3 + x_2^3 x_3^2 + x_2^2 x_3^3 + x_2 x_3^4 + x_3^5$$

$$\begin{aligned}
s_{(4,1)}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^4 x_2 + x_1^4 x_3 + x_1^3 x_2^2 + 2 x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_3^2 + x_1^2 x_2^3 \\
&+ 2 x_1^2 x_2^2 x_3 + 2 x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_3^3 + x_1 x_2^4 + 2 x_1 x_2^3 x_3 + 2 x_1 x_2^2 x_3^2 + 2 x_1 x_2 x_3^3 \\
&+ x_1 x_3^4 + x_2^4 x_3 + x_2^3 x_3^2 + x_2^2 x_3^3 + x_2 x_3^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{(3,2)}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_3^2 + x_1^2 x_2^3 + 2 x_1^2 x_2^2 x_3 + 2 x_1^2 x_2 x_3^2 \\
&+ x_1^2 x_3^3 + x_1 x_2^3 x_3 + 2 x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1 x_2 x_3^3 + x_2^3 x_3^2 + x_2^2 x_3^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{(3,1,1)}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^3 x_2 x_3 + x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^3 x_3 + x_1 x_2^2 x_3^2 \\
&+ x_1 x_2 x_3^3
\end{aligned}$$

$$s_{(2,2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^2$$

...

### 5.4.2 Multiplication des polynômes de Schur

On a  $s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c_{\lambda, \mu}^\nu s_\nu$  de la même manière que  $\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \sum_\nu c_{\lambda, \mu}^\nu \sigma_\nu$ , avec les coefficients  $c_{\lambda, \mu}^\nu$  de Littlewood-Richardson [30]<sup>105</sup>.

---

105. p. 11

## 6 Exemples de grassmanniennes

### 6.1 La grassmannienne $G(1, n)$ ; $1 < n$

On pourra consulter [26]<sup>106</sup>.

$$C_n^1 = n.$$

$$N = n - 1.$$

$S(1, n)$  variété de Stiefel.

$$S(1, n) \subset \text{Mat}(1, n); \dim S(1, n) = n.$$

$$\bullet GL(1) = S(1, 1); \dim GL(1) = 1.$$

$$\bullet G(1, n) = S(1, n)/GL(1) \text{ la grassmannienne :}$$

$$\dim G(1, n) = n - 1 = N. G(1, n) \cong \text{Mat}(1, n - 1).$$

Nombre de coordonnées de Stiefel :  $\dim S(1, n) = n$ .

Nombre de coordonnées affines :  $\dim G(1, n) = n - 1$

Coordonnées de Plücker :  $\omega_1^{i_1}$  ( $1 \leq i_1 \leq n$ ). Il y en a  $n = N + 1$ .

La matrice  $[\varphi_{\omega_1}]$  est de dimension  $\frac{n(n-1)}{2} \times n$  et la matrice  $[\psi_{\omega_1}]$  de dimension  $1 \times n$ , telle que  $[\psi_{\omega_1}] = (\omega_1^1 \ \omega_1^2 \ \dots \ \omega_1^n)$  et on  $[\varphi_{\omega_1}][\psi_{\omega_1}]^t \equiv 0$  (matrice de dimension  $\frac{n(n-1)}{2} \times 1$ ), ce qui ne donne aucune relation de Plücker (nrp  $G(1, n) = 0$ ).

Nombre de relations de Plücker indépendantes : nrpi  $G(1, n) = 0$ .

#### 6.1.1 La grassmannienne $G(1, 2)$

On peut dire que la grassmannienne  $G(1, 2)$  est autoduale.

Coordonnées de Plücker :  $\omega_1^1, \omega_1^2$ .

Matrice  $[\varphi_{\omega_1}]$  de dimension  $1 \times 2$  :

$$[\varphi_{\omega_1}] = \begin{pmatrix} -\omega_1^2 & \omega_1^1 \end{pmatrix}.$$

**Symboles de Schubert** Il y a 2 symboles de Schubert :

$$\mathbf{j} = (j_1) = (1) \text{ et } \mathbf{j} = (j_1) = (2).$$

Pour chaque symbole de Schubert on en déduit :

$$\mathbf{a} = (a_1) = (j_1 - 1), |\mathbf{a}| = a_1 = j_1 - 1, \mathbf{\lambda} = (\lambda_1) = (2 - j_1) \text{ et } |\mathbf{\lambda}| = \lambda_1 = 2 - j_1.$$

Donc :

$$\bullet \text{ si } \mathbf{j} = (1) \text{ on a } \mathbf{a} = (0), \mathbf{\lambda} = (1) \text{ et } |\mathbf{\lambda}| = 1,$$

$$\bullet \text{ si } \mathbf{j} = (2) \text{ on a } \mathbf{a} = (1), \mathbf{\lambda} = (0) \text{ et } |\mathbf{\lambda}| = 0.$$

---

106. p. 8 exemple 1.3

**Cellules de Schubert** Il y a 2 cellules de Schubert  $\mathcal{C}_{(j_1)}$  ou  $\Omega_{(\lambda_1)}$ .

- si  $\mathbf{j} = (1)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1)$  :  $\mathcal{C}_{(1)}$  ou  $\Omega_{(1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1)} = \dim \Omega_{(1)} = 0,$$

- si  $\mathbf{j} = (2)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (0)$  :  $\mathcal{C}_{(2)}$  ou  $\Omega_{(0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2)} = \dim \Omega_{(0)} = 1.$$

$\sum \dim \mathcal{C}_{(j_1)} = \sum \dim \Omega_{(\lambda_1)} = \sum |\mathbf{a}| = 1 = \dim G(1, 2) = 1$ . Donc les cellules de Schubert sont disjointes.

**Complément** : Coordonnées de Plücker avec les coordonnées affines :

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 & g_1^2 \end{pmatrix}. \text{ On a : } \varpi_1^1 = 1, \varpi_1^2 = g_1^2.$$

### 6.1.2 La grassmannienne $G(1, 3)$

Coordonnées de Plücker :  $\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3$ .

Matrice  $[\varphi_{\omega_1}]$  de dimension  $3 \times 3$  :

$$[\varphi_{\omega_1}] = \begin{pmatrix} -\omega_1^2 & \omega_1^1 & 0 \\ -\omega_1^3 & 0 & \omega_1^1 \\ 0 & -\omega_1^3 & \omega_1^2 \end{pmatrix}.$$

**Symboles de Schubert** Il y a 3 symboles de Schubert :

$\mathbf{j} = (j_1) = (1)$ ,  $\mathbf{j} = (j_1) = (2)$  et  $\mathbf{j} = (j_1) = (3)$ .

Pour chaque symbole de Schubert on en déduit :

$\mathbf{a} = (a_1) = (j_1 - 1)$ ,  $|\mathbf{a}| = a_1 = j_1 - 1$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1) = (3 - j_1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3 - j_1$ .

Donc :

- si  $\mathbf{j} = (1)$  on a  $\mathbf{a} = (0)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2)$  on a  $\mathbf{a} = (1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 1$ ,
- si  $\mathbf{j} = (3)$  on a  $\mathbf{a} = (2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 0$ .

**Cellules de Schubert** Il y a 3 cellules de Schubert  $\mathcal{C}_{(j_1)}$  ou  $\Omega_{(\lambda_1)}$ .

- si  $\mathbf{j} = (1)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2)$  :  $\mathcal{C}_{(1)}$  ou  $\Omega_{(2)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1)} = \dim \Omega_{(2)} = 0,$$

- si  $\mathbf{j} = (2)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1)$  :  $\mathcal{C}_{(2)}$  ou  $\Omega_{(1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2)} = \dim \Omega_{(1)} = 1,$$

• si  $\mathbf{j} = (3)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (0)$  :  $\mathcal{C}_{(3)}$  ou  $\Omega_{(0)}$  a pour représentant :

$\begin{pmatrix} * & * & 1 \end{pmatrix}$  et  $\dim \mathcal{C}_{(3)} = \dim \Omega_{(0)} = 2$ .

$\sum \dim \mathcal{C}_{(j_1)} = \sum \dim \Omega_{(\lambda_1)} = \sum |\mathbf{a}| = 3 > \dim G(1, 3) = 2$ . Donc les cellules de Schubert ne sont pas disjointes.

**Complément** : Coordonnées de Plücker avec les coordonnées affines :

$[g] = \begin{pmatrix} 1 & g_1^2 & g_1^3 \end{pmatrix}$ . On a :  $\varpi_1^1 = 1$ ,  $\varpi_1^2 = g_1^2$ ,  $\varpi_1^3 = g_1^3$ .

### 6.1.3 La grassmannienne $G(1, 4)$

Coordonnées de Plücker :  $\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_1^4$ .

Matrice  $[\varphi_{\omega_1}]$  de dimension  $6 \times 4$  :

$$[\varphi_{\omega_1}] = \begin{pmatrix} -\omega_1^2 & \omega_1^1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^3 & 0 & \omega_1^1 & 0 \\ -\omega_1^4 & 0 & 0 & \omega_1^1 \\ 0 & -\omega_1^3 & \omega_1^2 & 0 \\ 0 & -\omega_1^4 & 0 & \omega_1^2 \\ 0 & 0 & -\omega_1^4 & \omega_1^3 \end{pmatrix}.$$

**Symboles de Schubert** Il y a 4 symboles de Schubert :

$\mathbf{j} = (j_1) = (1)$ ,  $\mathbf{j} = (j_1) = (2)$ ,  $\mathbf{j} = (j_1) = (3)$  et  $\mathbf{j} = (j_1) = (4)$ .

Pour chaque symbole de Schubert on en déduit :

$\mathbf{a} = (a_1) = (j_1 - 1)$ ,  $|\mathbf{a}| = a_1 = j_1 - 1$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1) = (4 - j_1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4 - j_1$ .

Donc :

- si  $\mathbf{j} = (1)$  on a  $\mathbf{a} = (0)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2)$  on a  $\mathbf{a} = (1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (3)$  on a  $\mathbf{a} = (2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 1$ ,
- si  $\mathbf{j} = (4)$  on a  $\mathbf{a} = (3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 0$ .

**Cellules de Schubert** Il y a 4 cellules de Schubert  $\mathcal{C}_{(j_1)}$  ou  $\Omega_{(\lambda_1)}$ .

• si  $\mathbf{j} = (1)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3)$  :  $\mathcal{C}_{(1)}$  ou  $\Omega_{(3)}$  a pour représentant :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\dim \mathcal{C}_{(1)} = \dim \Omega_{(3)} = 0$ ,

• si  $\mathbf{j} = (2)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2)$  :  $\mathcal{C}_{(2)}$  ou  $\Omega_{(2)}$  a pour représentant :

$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\dim \mathcal{C}_{(2)} = \dim \Omega_{(2)} = 1$ ,

• si  $\mathbf{j} = (3)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1)$  :  $\mathcal{C}_{(3)}$  ou  $\Omega_{(1)}$  a pour représentant :

$( * * 1 0 )$  et  $\dim \mathcal{C}_{(3)} = \dim \Omega_{(1)} = 2$ ,

• si  $\mathbf{j} = (4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (0)$  :  $\mathcal{C}_{(4)}$  ou  $\Omega_{(0)}$  a pour représentant :

$( * * * 1 )$  et  $\dim \mathcal{C}_{(4)} = \dim \Omega_{(0)} = 3$ .

$\sum \dim \mathcal{C}_{(j_1)} = \sum \dim \Omega_{(\lambda_1)} = \sum |\mathbf{a}| = 6 > \dim G(1, 4) = 3$ . Donc les cellules de Schubert ne sont pas disjointes.

**Complément** : Coordonnées de Plücker avec les coordonnées affines :

$[g] = ( 1 \ g_1^2 \ g_1^3 \ g_1^4 )$ . On a :  $\varpi_1^1 = 1, \varpi_1^2 = g_1^2, \varpi_1^3 = g_1^3, \varpi_1^4 = g_1^4$ .

#### 6.1.4 La grassmannienne $G(1, 5)$

Coordonnées de Plücker :  $\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_1^4, \omega_1^5$ .

Matrice  $[\varphi_{\omega_1}]$  de dimension  $10 \times 5$  :

$$[\varphi_{\omega_1}] = \begin{pmatrix} -\omega_1^2 & \omega_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_1^3 & 0 & \omega_1^1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^4 & 0 & 0 & \omega_1^1 & 0 \\ -\omega_1^5 & 0 & 0 & 0 & \omega_1^1 \\ 0 & -\omega_1^3 & \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_1^4 & 0 & \omega_1^2 & 0 \\ 0 & -\omega_1^5 & 0 & 0 & \omega_1^2 \\ 0 & 0 & -\omega_1^4 & \omega_1^3 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^5 & 0 & \omega_1^3 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^5 & \omega_1^4 \end{pmatrix}.$$

**Symboles de Schubert** Il y a 5 symboles de Schubert :

$\mathbf{j} = (j_1) = (1), \mathbf{j} = (j_1) = (2), \mathbf{j} = (j_1) = (3), \mathbf{j} = (j_1) = (4)$  et  $\mathbf{j} = (j_1) = (5)$ .

Pour chaque symbole de Schubert on en déduit :

$\mathbf{a} = (a_1) = (j_1 - 1), |\mathbf{a}| = a_1 = j_1 - 1, \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1) = (5 - j_1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 5 - j_1$ .

Donc :

- si  $\mathbf{j} = (1)$  on a  $\mathbf{a} = (0), \boldsymbol{\lambda} = (4)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2)$  on a  $\mathbf{a} = (1), \boldsymbol{\lambda} = (3)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (3)$  on a  $\mathbf{a} = (2), \boldsymbol{\lambda} = (2)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (4)$  on a  $\mathbf{a} = (3), \boldsymbol{\lambda} = (1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 1$ ,
- si  $\mathbf{j} = (5)$  on a  $\mathbf{a} = (4), \boldsymbol{\lambda} = (0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 0$ .

**Cellules de Schubert** Il y a 5 cellules de Schubert  $\mathcal{C}_{(j_1)}$  ou  $\Omega_{(\lambda_1)}$ .

- si  $\mathbf{j} = (1)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (4)$  :  $\mathcal{C}_{(1)}$  ou  $\Omega_{(4)}$  a pour représentant :  
 $( 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 )$  et  $\dim \mathcal{C}_{(1)} = \dim \Omega_{(4)} = 0$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3)$  :  $\mathcal{C}_{(2)}$  ou  $\Omega_{(3)}$  a pour représentant :  
 $( * \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 )$  et  $\dim \mathcal{C}_{(2)} = \dim \Omega_{(3)} = 1$ ,
- si  $\mathbf{j} = (3)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2)$  :  $\mathcal{C}_{(3)}$  ou  $\Omega_{(2)}$  a pour représentant :  
 $( * \ * \ 1 \ 0 \ 0 )$  et  $\dim \mathcal{C}_{(3)} = \dim \Omega_{(2)} = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1)$  :  $\mathcal{C}_{(4)}$  ou  $\Omega_{(1)}$  a pour représentant :  
 $( * \ * \ * \ 1 \ 0 )$  et  $\dim \mathcal{C}_{(4)} = \dim \Omega_{(1)} = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (0)$  :  $\mathcal{C}_{(5)}$  ou  $\Omega_{(0)}$  a pour représentant :  
 $( * \ * \ * \ * \ 1 )$  et  $\dim \mathcal{C}_{(5)} = \dim \Omega_{(0)} = 4$ .

$\sum \dim \mathcal{C}_{(j_1)} = \sum \dim \Omega_{(\lambda_1)} = \sum |\mathbf{a}| = 10 > \dim G(1, 5) = 4$ . Donc les cellules de Schubert ne sont pas disjointes.

**Complément** : Coordonnées de Plücker avec les coordonnées affines :

$[g] = ( 1 \ g_1^2 \ g_1^3 \ g_1^4 \ g_1^5 )$ . On a :  $\varpi_1^1 = 1$ ,  $\varpi_1^2 = g_1^2$ ,  $\varpi_1^3 = g_1^3$ ,  $\varpi_1^4 = g_1^4$ ,  $\varpi_1^5 = g_1^5$ .

### 6.1.5 La grassmannienne $G(1, 6)$

Coordonnées de Plücker :  $\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_1^4, \omega_1^5, \omega_1^6$ .

Matrice  $[\varphi_{\omega_1}]$  de dimension  $15 \times 6$  :



$$[\varphi_{\omega_1}] = \begin{pmatrix} -\omega_1^2 & \omega_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_1^3 & 0 & \omega_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_1^4 & 0 & 0 & \omega_1^1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^5 & 0 & 0 & 0 & \omega_1^1 & 0 \\ -\omega_1^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1^1 \\ 0 & -\omega_1^3 & \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_1^4 & 0 & \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_1^5 & 0 & 0 & \omega_1^2 & 0 \\ 0 & -\omega_1^6 & 0 & 0 & 0 & \omega_1^2 \\ 0 & 0 & -\omega_1^4 & \omega_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^5 & 0 & \omega_1^3 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^6 & 0 & 0 & \omega_1^3 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^5 & \omega_1^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^6 & 0 & \omega_1^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_1^6 & \omega_1^5 \end{pmatrix}.$$

**Symboles de Schubert** Il y a 6 symboles de Schubert :

$\mathbf{j} = (j_1) = (1)$ ,  $\mathbf{j} = (j_1) = (2)$ ,  $\mathbf{j} = (j_1) = (3)$ ,  $\mathbf{j} = (j_1) = (4)$ ,  $\mathbf{j} = (j_1) = (5)$  et  $\mathbf{j} = (j_1) = (6)$ .

Pour chaque symbole de Schubert on en déduit :

$\mathbf{a} = (a_1) = (j_1 - 1)$ ,  $|\mathbf{a}| = a_1 = j_1 - 1$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1) = (6 - j_1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 6 - j_1$ .

Donc :

- si  $\mathbf{j} = (1)$  on a  $\mathbf{a} = (0)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (5)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 5$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2)$  on a  $\mathbf{a} = (1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (4)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (3)$  on a  $\mathbf{a} = (2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (4)$  on a  $\mathbf{a} = (3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (5)$  on a  $\mathbf{a} = (4)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 1$ ,
- si  $\mathbf{j} = (6)$  on a  $\mathbf{a} = (5)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 0$ .

**Cellules de Schubert** Il y a 6 cellules de Schubert  $\mathcal{C}_{(j_1)}$  ou  $\Omega_{(\lambda_1)}$ .

- si  $\mathbf{j} = (1)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (5)$  :  $\mathcal{C}_{(1)}$  ou  $\Omega_{(5)}$  a pour représentant :  
 $( 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 )$  et  $\dim \mathcal{C}_{(1)} = \dim \Omega_{(5)} = 0$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (4)$  :  $\mathcal{C}_{(2)}$  ou  $\Omega_{(4)}$  a pour représentant :  
 $( * \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 )$  et  $\dim \mathcal{C}_{(2)} = \dim \Omega_{(4)} = 1$ ,

- si  $\mathbf{j} = (3)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3)$  :  $\mathcal{C}_{(3)}$  ou  $\Omega_{(3)}$  a pour représentant :  
 $( * * 1 0 0 0 )$  et  $\dim \mathcal{C}_{(3)} = \dim \Omega_{(3)} = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2)$  :  $\mathcal{C}_{(4)}$  ou  $\Omega_{(2)}$  a pour représentant :  
 $( * * * 1 0 0 )$  et  $\dim \mathcal{C}_{(4)} = \dim \Omega_{(2)} = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1)$  :  $\mathcal{C}_{(5)}$  ou  $\Omega_{(1)}$  a pour représentant :  
 $( * * * * 1 0 )$  et  $\dim \mathcal{C}_{(5)} = \dim \Omega_{(1)} = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (0)$  :  $\mathcal{C}_{(6)}$  ou  $\Omega_{(0)}$  a pour représentant :  
 $( * * * * * 1 )$  et  $\dim \mathcal{C}_{(6)} = \dim \Omega_{(0)} = 5$ .

$\sum \dim \mathcal{C}_{(j_1)} = \sum \dim \Omega_{(\lambda_1)} = \sum |\mathbf{a}| = 15 > \dim G(1, 6) = 5$ . Donc les cellules de Schubert ne sont pas disjointes.

**Complément** : Coordonnées de Plücker avec les coordonnées affines :

$[g] = ( 1 \ g_1^2 \ g_1^3 \ g_1^4 \ g_1^5 \ g_1^6 )$ . On a :  $\varpi_1^1 = 1$ ,  $\varpi_1^2 = g_1^2$ ,  $\varpi_1^3 = g_1^3$ ,  
 $\varpi_1^4 = g_1^4$ ,  $\varpi_1^5 = g_1^5$ ,  $\varpi_1^6 = g_1^6$ .

## 6.2 La grassmannienne $G(2, n)$ ; $2 < n$

On pourra consulter [39]<sup>107</sup>. [43]<sup>108</sup>

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$N = \frac{n(n-1)}{2} - 1.$$

$S(2, n)$  variété de Stiefel.

$S(2, n) \subset \text{Mat}(2, n)$  ;  $\dim S(2, n) = 2n$ .

•  $GL(2) = S(2, 2)$  ;  $\dim GL(2) = 4$ .

•  $G(2, n) = S(2, n)/GL(2)$  la grassmannienne :

$\dim G(2, n) = 2(n-2) \neq N$  (en général).  $G(2, n) \cong \text{Mat}(2, n-2)$ .

Nombre de coordonnées de Stiefel :  $\dim S(2, n) = 2n$ .

Nombre de coordonnées affines :  $\dim G(2, n) = 2(n-2)$

Coordonnées de Plücker :  $\omega_2^{i_1 i_2}$  ( $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$ ). Il y en a  $\frac{n(n-1)}{2} = N+1$ .

Relations de Plücker

Si  $1 \leq i_1 \leq n$  et  $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq n$  alors :

$$\sum_{p=1}^3 (-1)^p \omega_2^{i_1 j_p} \omega_2^{j_1 \dots \hat{j}_p \dots j_3} = 0 \quad (\hat{j}_p \text{ indice omis}), \text{ soit :}$$

107. pp. 90-91 Exemple 1. The Grassmannian

108. pp. 1-7

$$-\omega_2^{i_1 j_1} \omega_2^{j_2 j_3} + \omega_2^{i_1 j_2} \omega_2^{j_1 j_3} - \omega_2^{i_1 j_3} \omega_2^{j_1 j_2} = 0 \text{ [42]}^{109}.$$

La matrice  $[\varphi_{\omega_2}]$  est de dimension  $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times n$  et la matrice  $[\psi_{\omega_2}]$  de dimension  $n \times n$  et on  $[\varphi_{\omega_2}] [\psi_{\omega_2}]^t = 0$  (matrice de dimension  $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times n$ ).

Nombre de relations de Plücker indépendantes :  $\text{nrpi } G(2, n) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$  [32].

### 6.2.1 La grassmannienne $G(2, 3)$

On pourra consulter [30]<sup>110</sup>.

La grassmannienne  $G(2, 3)$  est duale de la grassmannienne  $G(1, 3)$ .

Coordonnées de Plücker :  $\omega_2^{12}, \omega_2^{13}, \omega_2^{23}$ .

Matrice  $[\varphi_{\omega_2}]$  de dimension  $1 \times 3$  :

$$[\varphi_{\omega_2}] = \begin{pmatrix} \omega_2^{23} & -\omega_2^{13} & \omega_2^{12} \end{pmatrix} \text{ et :}$$

matrice  $[\psi_{\omega_2}]$  de dimension  $3 \times 3$  :

$$[\psi_{\omega_2}] = \begin{pmatrix} \omega_2^{13} & \omega_2^{23} & 0 \\ -\omega_2^{12} & 0 & \omega_2^{23} \\ 0 & -\omega_2^{12} & -\omega_2^{13} \end{pmatrix} \text{ et on a :}$$

$[\varphi_{\omega_2}] [\psi_{\omega_2}]^t \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , ce qui ne donne aucune relation de Plücker ( $\text{nrp } G(2, 3) = 0$ ).

Nombre de relations de Plücker indépendantes :  $\text{nrpi } G(2, 3) = 0$  [32].

**Symboles de Schubert** Il y a 3 symboles de Schubert :

$$\mathbf{j} = (j_1, j_2) = (1, 2), \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (1, 3), \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (2, 3).$$

Pour chaque symbole de Schubert on en déduit :

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2) = (j_1 - 1, j_2 - 2), |\mathbf{a}| = a_1 + a_2 = j_1 + j_2 - 3,$$

$$\mathbf{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) = (2 - j_1, 3 - j_2) \text{ et } |\mathbf{\lambda}| = \lambda_1 + \lambda_2 = 5 - (j_1 + j_2). \text{ Donc :}$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 2)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0)$ ,  $\mathbf{\lambda} = (1, 1)$  et  $|\mathbf{\lambda}| = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 3)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 1)$ ,  $\mathbf{\lambda} = (1, 0)$  et  $|\mathbf{\lambda}| = 1$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 3)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 1)$ ,  $\mathbf{\lambda} = (0, 0)$  et  $|\mathbf{\lambda}| = 0$ .

---

109. p. 10

110. pp. 6-7 exemple

**Cellules de Schubert** Il y a 3 cellules de Schubert  $\mathcal{C}_{(j_1, j_2)}$  ou  $\Omega_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ .

- si  $\mathbf{j} = (1, 2)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2)}$  ou  $\Omega_{(1,1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2)} = \dim \Omega_{(1,1)} = 0,$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 3)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,3)}$  ou  $\Omega_{(1,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,3)} = \dim \Omega_{(1,0)} = 1,$$

- si  $\mathbf{j} = (2, 3)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(2,3)}$  ou  $\Omega_{(0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2,3)} = \dim \Omega_{(0,0)} = 2.$$

$\sum \dim \mathcal{C}_{(j_1, j_2)} = \sum \dim \Omega_{(\lambda_1, \lambda_2)} = \sum |\mathbf{a}| = 3 > \dim G(2, 3) = 2$ . Donc les cellules de Schubert ne sont pas disjointes.

**Complément** : Coordonnées de Plücker avec les coordonnées affines :

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & g_1^3 \\ 0 & 1 & g_2^3 \end{pmatrix}. \text{ On a : } \varpi_2^{12} = 1, \varpi_2^{13} = g_2^3, \varpi_2^{23} = -g_1^3.$$

### 6.2.2 La grassmannienne $G(2, 4)$

On pourra consulter [4]<sup>111</sup> [7]<sup>112</sup> [8]<sup>113</sup> [26]<sup>114</sup> [27]<sup>115</sup> [30]<sup>116</sup> [43]<sup>117</sup>.

On peut dire que la grassmannienne  $G(2, 4)$  est autoduale.

C'est le premier exemple non trivial de variété projective (i.e. qui n'est pas un espace vectoriel).

Coordonnées de Plücker :  $\omega_2^{12}, \omega_2^{13}, \omega_2^{14}, \omega_2^{23}, \omega_2^{24}, \omega_2^{34}$ .

Matrice  $[\varphi_{\omega_2}]$  de dimension  $4 \times 4$  :

---

111. p. 2 exemple et p. 3 exemple

112. pp. 23-28 § 7. The intersection theory on  $G(2, 4)$

113. p. 7 exemple 2.2, p. 9 exemple 2.8, pp. 11-12 exemple 2.8 continué

114. pp. 8-9 exemple 1.4, pp. 13-14 exemple 1.12, p. 35 exemple 1.38 et pp. 39-41 exemple 1.47

115. p. 2 Exemple 1.3, p. 3 Exemple 2.2, p. 5 Exemple 2.10, p. 7 Exemple 3.3, pp. 10-11 Exemple 4.6

116. p. 7 exemple, p. 10 exemple et p. 11 exemple

117. p. 2 exemple 5.3

$$[\varphi_{\omega_2}] = \begin{pmatrix} \omega_2^{23} & -\omega_2^{13} & \omega_2^{12} & 0 \\ \omega_2^{24} & -\omega_2^{14} & 0 & \omega_2^{12} \\ \omega_2^{34} & 0 & -\omega_2^{14} & \omega_2^{13} \\ 0 & \omega_2^{34} & -\omega_2^{24} & \omega_2^{23} \end{pmatrix} \text{ et :}$$

matrice  $[\psi_{\omega_2}]$  de dimension  $4 \times 4$  :

$$[\psi_{\omega_2}] = \begin{pmatrix} \omega_2^{14} & \omega_2^{24} & \omega_2^{34} & 0 \\ -\omega_2^{13} & -\omega_2^{23} & 0 & \omega_2^{34} \\ \omega_2^{12} & 0 & -\omega_2^{23} & -\omega_2^{24} \\ 0 & \omega_2^{12} & \omega_2^{13} & \omega_2^{14} \end{pmatrix} \text{ et on a :}$$

$$[\varphi_{\omega_2}] [\psi_{\omega_2}]^t = \begin{pmatrix} (1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1) \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$$(1) = \omega_2^{12} \omega_2^{34} - \omega_2^{13} \omega_2^{24} + \omega_2^{14} \omega_2^{23}. \text{ Alors :}$$

il y a donc une seule relation de Plücker :  $(1) = 0$  (nrp  $G(2, 4) = 1$ ).

Nombre de relations de Plücker indépendantes : nrpi  $G(2, 4) = 1$  [32].

**Symboles de Schubert** Il y a 6 symboles de Schubert :

$$\mathbf{j} = (j_1, j_2) = (1, 2), \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (1, 3), \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (1, 4), \\ \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (2, 3), \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (2, 4) \text{ et } \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (3, 4).$$

Pour chaque symbole de Schubert on en déduit :

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2) = (j_1 - 1, j_2 - 2), |\mathbf{a}| = a_1 + a_2 = j_1 + j_2 - 3,$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) = (3 - j_1, 4 - j_2) \text{ et } |\boldsymbol{\lambda}| = \lambda_1 + \lambda_2 = 7 - (j_1 + j_2). \text{ Donc :}$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 2)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 3)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 3)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 1$ ,
- si  $\mathbf{j} = (3, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (2, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 0$ .

**Cellules de Schubert** Il y a 6 cellules de Schubert  $\mathcal{C}_{(j_1, j_2)}$  ou  $\Omega_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ .

- si  $\mathbf{j} = (1, 2)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2)}$  ou  $\Omega_{(2,2)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2)} = \dim \Omega_{(2,2)} = 0,$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 3)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(1,3)}$  ou  $\Omega_{(2,1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,3)} = \dim \Omega_{(2,1)} = 1,$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,4)}$  ou  $\Omega_{(2,0)}$  a pour :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,4)} = \dim \Omega_{(2,0)} = 2,$$

- si  $\mathbf{j} = (2, 3)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(2,3)}$  ou  $\Omega_{(1,1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2,3)} = \dim \Omega_{(1,1)} = 2,$$

- si  $\mathbf{j} = (2, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(2,4)}$  ou  $\Omega_{(1,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2,4)} = \dim \Omega_{(1,0)} = 3,$$

- si  $\mathbf{j} = (3, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(3,4)}$  ou  $\Omega_{(0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 & 0 \\ * & * & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(3,4)} = \dim \Omega_{(0,0)} = 4.$$

$\sum \dim \mathcal{C}_{(j_1, j_2)} = \sum \dim \Omega_{(\lambda_1, \lambda_2)} = \sum |\mathbf{a}| = 12 > \dim G(2, 4) = 4$ . Donc les cellules de Schubert ne sont pas disjointes.

**Complément** : Coordonnées de Plücker avec les coordonnées affines :

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & g_1^3 & g_1^4 \\ 0 & 1 & g_2^3 & g_2^4 \end{pmatrix}. \text{ On a : } \varpi_2^{12} = 1, \varpi_2^{13} = g_2^3, \varpi_2^{14} = g_2^4, \varpi_2^{23} = -g_1^3, \\ \varpi_2^{24} = -g_1^4, \varpi_2^{34} = g_1^3 g_2^4 - g_2^3 g_1^4.$$

### 6.2.3 La grassmannienne $G(2, 5)$

On pourra consulter [26]<sup>118</sup> [43]<sup>119</sup>.

Coordonnées de Plücker :  $\omega_2^{12}, \omega_2^{13}, \omega_2^{14}, \omega_2^{15}, \omega_2^{23}, \omega_2^{24}, \omega_2^{25}, \omega_2^{34}, \omega_2^{35}, \omega_2^{45}$ .

118. pp. 35-36 exemple 1.39

119. p. 2 exemple 5.4

Matrice  $[\varphi_{\omega_2}]$  de dimension  $10 \times 5$  :

$$[\varphi_{\omega_2}] = \begin{pmatrix} \omega_2^{23} & -\omega_2^{13} & \omega_2^{12} & 0 & 0 \\ \omega_2^{24} & -\omega_2^{14} & 0 & \omega_2^{12} & 0 \\ \omega_2^{25} & -\omega_2^{15} & 0 & 0 & \omega_2^{12} \\ \omega_2^{34} & 0 & -\omega_2^{14} & \omega_2^{13} & 0 \\ \omega_2^{35} & 0 & -\omega_2^{15} & 0 & \omega_2^{13} \\ \omega_2^{45} & 0 & 0 & -\omega_2^{15} & \omega_2^{14} \\ 0 & \omega_2^{34} & -\omega_2^{24} & \omega_2^{23} & 0 \\ 0 & \omega_2^{35} & -\omega_2^{25} & 0 & \omega_2^{23} \\ 0 & \omega_2^{45} & 0 & -\omega_2^{25} & \omega_2^{24} \\ 0 & 0 & \omega_2^{45} & -\omega_2^{35} & \omega_2^{34} \end{pmatrix} \text{ et :}$$

matrice  $[\psi_{\omega_2}]$  de dimension  $5 \times 5$  :

$$[\psi_{\omega_2}] = \begin{pmatrix} \omega_2^{15} & \omega_2^{25} & \omega_2^{35} & \omega_2^{45} & 0 \\ -\omega_2^{14} & -\omega_2^{24} & -\omega_2^{34} & 0 & \omega_2^{45} \\ \omega_2^{13} & \omega_2^{23} & 0 & -\omega_2^{34} & -\omega_2^{35} \\ -\omega_2^{12} & 0 & \omega_2^{23} & \omega_2^{24} & \omega_2^{25} \\ 0 & -\omega_2^{12} & -\omega_2^{13} & -\omega_2^{14} & -\omega_2^{15} \end{pmatrix} \text{ et on a :}$$

$$[\varphi_{\omega_2}] [\psi_{\omega_2}]^t = \begin{pmatrix} (2) & -(1) & 0 & 0 & 0 \\ (3) & 0 & -(1) & 0 & 0 \\ 0 & (3) & -(2) & 0 & 0 \\ (4) & 0 & 0 & -(1) & 0 \\ 0 & (4) & 0 & -(2) & 0 \\ 0 & 0 & (4) & -(3) & 0 \\ (5) & 0 & 0 & 0 & -(1) \\ 0 & (5) & 0 & 0 & -(2) \\ 0 & 0 & (5) & 0 & -(3) \\ 0 & 0 & 0 & (5) & -(4) \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} (1) &= \omega_2^{12} \omega_2^{34} - \omega_2^{13} \omega_2^{24} + \omega_2^{14} \omega_2^{23}, \\ (2) &= \omega_2^{12} \omega_2^{35} - \omega_2^{13} \omega_2^{25} + \omega_2^{15} \omega_2^{23}, \\ (3) &= \omega_2^{12} \omega_2^{45} - \omega_2^{14} \omega_2^{25} + \omega_2^{15} \omega_2^{24}, \\ (4) &= \omega_2^{13} \omega_2^{45} - \omega_2^{14} \omega_2^{35} + \omega_2^{15} \omega_2^{34}, \\ (5) &= \omega_2^{23} \omega_2^{45} - \omega_2^{24} \omega_2^{35} + \omega_2^{25} \omega_2^{34}. \text{ Alors :} \end{aligned}$$

il y a donc 5 relations de Plücker :  $(1) = 0, (2) = 0, (3) = 0, (4) = 0, (5) = 0$  (nrp  $G(2, 5) = 5$ ) et elles sont indépendantes.

Nombre de relations de Plücker indépendantes : nrpi  $G(2, 5) = 5$  [32].

**Symboles de Schubert** Il y a 10 symboles de Schubert :

$\mathbf{j} = (j_1, j_2) = (1, 2)$ ,  $\mathbf{j} = (j_1, j_2) = (1, 3)$ ,  $\mathbf{j} = (j_1, j_2) = (1, 4)$ ,  
 $\mathbf{j} = (j_1, j_2) = (1, 5)$ ,  $\mathbf{j} = (j_1, j_2) = (2, 3)$ ,  $\mathbf{j} = (j_1, j_2) = (2, 4)$ ,  
 $\mathbf{j} = (j_1, j_2) = (2, 5)$ ,  $\mathbf{j} = (j_1, j_2) = (3, 4)$ ,  $\mathbf{j} = (j_1, j_2) = (3, 5)$   
 et  $\mathbf{j} = (j_1, j_2) = (4, 5)$ .

Pour chaque symbole de Schubert on en déduit :

$\mathbf{a} = (a_1, a_2) = (j_1 - 1, j_2 - 2)$ ,  $|\mathbf{a}| = a_1 + a_2 = j_1 + j_2 - 3$ ,

$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) = (4 - j_1, 5 - j_2)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = \lambda_1 + \lambda_2 = 9 - (j_1 + j_2)$ . Donc :

- si  $\mathbf{j} = (1, 2)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 3)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 6$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 3)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 2)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 5$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 3)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (3, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (2, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ .
- si  $\mathbf{j} = (3, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (2, 3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 1$ ,
- si  $\mathbf{j} = (4, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (3, 3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 0$ .

**Cellules de Schubert** Il y a 10 cellules de Schubert  $\mathcal{C}_{(j_1, j_2)}$  ou  $\Omega_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ .

- si  $\mathbf{j} = (1, 2)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 3)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2)}$  ou  $\Omega_{(3,3)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2)} = \dim \Omega_{(3,3)} = 0,$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 3)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 2)$  :  $\mathcal{C}_{(1,3)}$  ou  $\Omega_{(3,2)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,3)} = \dim \Omega_{(3,2)} = 1,$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(1,4)}$  ou  $\Omega_{(3,1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,4)} = \dim \Omega_{(3,1)} = 2,$$



- si  $\mathbf{j} = (1, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,5)}$  ou  $\Omega_{(3,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,5)} = \dim \Omega_{(3,0)} = 3,$$

- si  $\mathbf{j} = (2, 3)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2)$  :  $\mathcal{C}_{(2,3)}$  ou  $\Omega_{(2,2)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2,3)} = \dim \Omega_{(2,2)} = 2,$$

- si  $\mathbf{j} = (2, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(2,4)}$  ou  $\Omega_{(2,1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2,4)} = \dim \Omega_{(2,1)} = 3,$$

- si  $\mathbf{j} = (2, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(2,5)}$  ou  $\Omega_{(2,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2,5)} = \dim \Omega_{(2,0)} = 4,$$

- si  $\mathbf{j} = (3, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(3,4)}$  ou  $\Omega_{(1,1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(3,4)} = \dim \Omega_{(1,1)} = 4,$$

- si  $\mathbf{j} = (3, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(3,5)}$  ou  $\Omega_{(1,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(3,5)} = \dim \Omega_{(1,0)} = 5,$$

- si  $\mathbf{j} = (4, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(4,5)}$  ou  $\Omega_{(0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(4,5)} = \dim \Omega_{(0,0)} = 6.$$

$\sum \dim \mathcal{C}_{(j_1, j_2)} = \sum \dim \Omega_{(\lambda_1, \lambda_2)} = \sum |\mathbf{a}| = 30 > \dim G(2, 5) = 6$ . Donc les cellules de Schubert ne sont pas disjointes.

**Complément** : coordonnées de Plücker avec les coordonnées affines :

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & g_1^3 & g_1^4 & g_1^5 \\ 0 & 1 & g_2^3 & g_2^4 & g_2^5 \end{pmatrix}. \text{ On a : } \varpi_2^{12} = 1, \varpi_2^{13} = g_2^3, \varpi_2^{14} = g_2^4, \\ \varpi_2^{15} = g_2^5, \varpi_2^{23} = -g_1^3, \varpi_2^{24} = -g_1^4, \varpi_2^{25} = -g_1^5, \varpi_2^{34} = g_1^3 g_2^4 - g_2^3 g_1^4, \\ \varpi_2^{35} = g_1^3 g_2^5 - g_2^3 g_1^5, \varpi_2^{45} = g_1^4 g_2^5 - g_2^4 g_1^5.$$

#### 6.2.4 La grassmannienne $G(2, 6)$

Coordonnées de Plücker :  $\omega_2^{12}, \omega_2^{13}, \omega_2^{14}, \omega_2^{15}, \omega_2^{16}, \omega_2^{23}, \omega_2^{24}, \omega_2^{25}, \omega_2^{26}, \omega_2^{34}, \omega_2^{35}, \omega_2^{36}, \omega_2^{45}, \omega_2^{46}, \omega_2^{56}$ .

Matrice  $[\varphi_{\omega_2}]$  de dimension  $20 \times 6$  :

$$[\varphi_{\omega_2}] = \begin{pmatrix} \omega_2^{23} & -\omega_2^{13} & \omega_2^{12} & 0 & 0 & 0 \\ \omega_2^{24} & -\omega_2^{14} & 0 & \omega_2^{12} & 0 & 0 \\ \omega_2^{25} & -\omega_2^{15} & 0 & 0 & \omega_2^{12} & 0 \\ \omega_2^{26} & -\omega_2^{16} & 0 & 0 & 0 & \omega_2^{12} \\ \omega_2^{34} & 0 & -\omega_2^{14} & \omega_2^{13} & 0 & 0 \\ \omega_2^{35} & 0 & -\omega_2^{15} & 0 & \omega_2^{13} & 0 \\ \omega_2^{36} & 0 & -\omega_2^{16} & 0 & 0 & \omega_2^{13} \\ \omega_2^{45} & 0 & 0 & -\omega_2^{15} & \omega_2^{14} & 0 \\ \omega_2^{46} & 0 & 0 & -\omega_2^{16} & 0 & \omega_2^{14} \\ \omega_2^{56} & 0 & 0 & 0 & -\omega_2^{16} & \omega_2^{15} \\ 0 & \omega_2^{34} & -\omega_2^{24} & \omega_2^{23} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^{35} & -\omega_2^{25} & 0 & \omega_2^{23} & 0 \\ 0 & \omega_2^{36} & -\omega_2^{26} & 0 & 0 & \omega_2^{23} \\ 0 & \omega_2^{45} & 0 & -\omega_2^{25} & \omega_2^{24} & 0 \\ 0 & \omega_2^{46} & 0 & -\omega_2^{26} & 0 & \omega_2^{24} \\ 0 & \omega_2^{56} & 0 & 0 & -\omega_2^{26} & \omega_2^{25} \\ 0 & 0 & \omega_2^{45} & -\omega_2^{35} & \omega_2^{34} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2^{46} & -\omega_2^{36} & 0 & \omega_2^{34} \\ 0 & 0 & \omega_2^{56} & 0 & -\omega_2^{36} & \omega_2^{35} \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2^{56} & -\omega_2^{46} & \omega_2^{45} \end{pmatrix} \text{ et :}$$

matrice  $[\psi_{\omega_2}]$  de dimension  $6 \times 6$  :

$$[\psi_{\omega_2}] = \begin{pmatrix} \omega_2^{16} & \omega_2^{26} & \omega_2^{36} & \omega_2^{46} & \omega_2^{56} & 0 \\ -\omega_2^{15} & -\omega_2^{25} & -\omega_2^{35} & -\omega_2^{45} & 0 & \omega_2^{56} \\ \omega_2^{14} & \omega_2^{24} & \omega_2^{34} & 0 & -\omega_2^{45} & -\omega_2^{46} \\ -\omega_2^{13} & -\omega_2^{23} & 0 & \omega_2^{34} & \omega_2^{35} & \omega_2^{36} \\ \omega_2^{12} & 0 & -\omega_2^{23} & -\omega_2^{24} & -\omega_2^{25} & -\omega_2^{26} \\ 0 & \omega_2^{12} & \omega_2^{13} & \omega_2^{14} & \omega_2^{15} & \omega_2^{16} \end{pmatrix} \text{ et on a :}$$

$$[\varphi_{\omega_2}] [\psi_{\omega_2}]^t = \begin{pmatrix} (3) & -(2) & (1) & 0 & 0 & 0 \\ (5) & -(4) & 0 & (1) & 0 & 0 \\ (6) & 0 & -(4) & (2) & 0 & 0 \\ 0 & (6) & -(5) & (3) & 0 & 0 \\ (8) & -(7) & 0 & 0 & (1) & 0 \\ (9) & 0 & -(7) & 0 & (2) & 0 \\ 0 & (9) & -(8) & 0 & (3) & 0 \\ (10) & 0 & 0 & -(7) & (4) & 0 \\ 0 & (10) & 0 & -(8) & (5) & 0 \\ 0 & 0 & (10) & -(9) & (6) & 0 \\ (12) & -(11) & 0 & 0 & 0 & (1) \\ (13) & 0 & -(11) & 0 & 0 & (2) \\ 0 & (13) & -(12) & 0 & 0 & (3) \\ (14) & 0 & 0 & -(11) & 0 & (4) \\ 0 & (14) & 0 & -(12) & 0 & (5) \\ 0 & 0 & (14) & -(13) & 0 & (6) \\ (15) & 0 & 0 & 0 & -(11) & (7) \\ 0 & (15) & 0 & 0 & -(12) & (8) \\ 0 & 0 & (15) & 0 & -(13) & (9) \\ 0 & 0 & 0 & (15) & -(14) & (10) \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} (1) &= \omega_2^{12} \omega_2^{34} - \omega_2^{13} \omega_2^{24} + \omega_2^{14} \omega_2^{23}, \\ (2) &= \omega_2^{12} \omega_2^{35} - \omega_2^{13} \omega_2^{25} + \omega_2^{15} \omega_2^{23}, \\ (3) &= \omega_2^{12} \omega_2^{36} - \omega_2^{13} \omega_2^{26} + \omega_2^{16} \omega_2^{23}, \\ (4) &= \omega_2^{12} \omega_2^{45} - \omega_2^{14} \omega_2^{25} + \omega_2^{15} \omega_2^{24}, \\ (5) &= \omega_2^{12} \omega_2^{46} - \omega_2^{14} \omega_2^{26} + \omega_2^{16} \omega_2^{24}, \\ (6) &= \omega_2^{12} \omega_2^{56} - \omega_2^{15} \omega_2^{26} + \omega_2^{16} \omega_2^{25}, \\ (7) &= \omega_2^{13} \omega_2^{45} - \omega_2^{14} \omega_2^{35} + \omega_2^{15} \omega_2^{34}, \\ (8) &= \omega_2^{13} \omega_2^{46} - \omega_2^{14} \omega_2^{36} + \omega_2^{16} \omega_2^{34}, \\ (9) &= \omega_2^{13} \omega_2^{56} - \omega_2^{15} \omega_2^{36} + \omega_2^{16} \omega_2^{35}, \\ (10) &= \omega_2^{14} \omega_2^{56} - \omega_2^{15} \omega_2^{46} + \omega_2^{16} \omega_2^{45}, \\ (11) &= \omega_2^{23} \omega_2^{45} - \omega_2^{24} \omega_2^{35} + \omega_2^{25} \omega_2^{34}, \\ (12) &= \omega_2^{23} \omega_2^{46} - \omega_2^{24} \omega_2^{36} + \omega_2^{26} \omega_2^{34} = 0, \\ (13) &= \omega_2^{23} \omega_2^{56} - \omega_2^{25} \omega_2^{36} + \omega_2^{26} \omega_2^{35}, \\ (14) &= \omega_2^{24} \omega_2^{56} - \omega_2^{25} \omega_2^{46} + \omega_2^{26} \omega_2^{45}, \\ (15) &= \omega_2^{34} \omega_2^{56} - \omega_2^{35} \omega_2^{46} + \omega_2^{36} \omega_2^{45}, \text{ alors :} \end{aligned}$$

il y a donc 15 relations de Plücker :  $(1) = 0, (2) = 0, \dots, (15) = 0$  (nrp  $G(2, 6) = 15$ ) et elles sont indépendantes.

Nombre de relations de Plücker indépendantes : nrpi  $G(2, 6) = 15$  [32].

**Symboles de Schubert** Il y a 15 symboles de Schubert :

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (1, 2), \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (1, 3), \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (1, 4), \\ \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (1, 5), \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (1, 6), \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (2, 3), \\ \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (2, 4), \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (2, 5), \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (2, 6), \\ \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (3, 4), \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (3, 5), \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (3, 6), \\ \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (4, 5), \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (4, 6) \text{ et } \mathbf{j} = (j_1, j_2) = (5, 6). \end{aligned}$$

Pour chaque symbole de Schubert on en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = (a_1, a_2) = (j_1 - 1, j_2 - 2), |\mathbf{a}| = a_1 + a_2 = j_1 + j_2 - 3, \\ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) = (5 - j_1, 6 - j_2) \text{ et } |\boldsymbol{\lambda}| = \lambda_1 + \lambda_2 = 11 - (j_1 + j_2). \text{ Donc :} \end{aligned}$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 2)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (4, 4)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 8$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 3)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (4, 3)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 7$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (4, 2)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 6$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (4, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 5$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 4)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (4, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 3)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 3)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 6$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 2)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 5$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 4)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (3, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (2, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (3, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (2, 3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (3, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (2, 4)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (4, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (3, 3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (4, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (3, 4)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 1$ ,
- si  $\mathbf{j} = (5, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (4, 4)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 0$ .

**Cellules de Schubert** Il y a 15 cellules de Schubert  $\mathcal{C}_{(j_1, j_2)}$  ou  $\Omega_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ .

- si  $\mathbf{j} = (1, 2)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (4, 4)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2)}$  ou  $\Omega_{(4,4)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2)} = \dim \Omega_{(4,4)} = 0,$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 3)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (4, 3)$  :  $\mathcal{C}_{(1,3)}$  ou  $\Omega_{(4,3)}$  a pour représentant :  

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(1,3)} = \dim \Omega_{(4,3)} = 1$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (4, 2)$  :  $\mathcal{C}_{(1,4)}$  ou  $\Omega_{(4,2)}$  a pour représentant :  

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(1,4)} = \dim \Omega_{(4,2)} = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (4, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(1,5)}$  ou  $\Omega_{(4,1)}$  a pour représentant :  

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(1,5)} = \dim \Omega_{(4,1)} = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (4, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,6)}$  ou  $\Omega_{(4,0)}$  a pour représentant :  

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & * & 1 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(1,6)} = \dim \Omega_{(4,0)} = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 3)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 3)$  :  $\mathcal{C}_{(2,3)}$  ou  $\Omega_{(3,3)}$  a pour représentant :  

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(2,3)} = \dim \Omega_{(3,3)} = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 2)$  :  $\mathcal{C}_{(2,4)}$  ou  $\Omega_{(3,2)}$  a pour représentant :  

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(2,4)} = \dim \Omega_{(3,2)} = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(2,5)}$  ou  $\Omega_{(3,1)}$  a pour représentant :  

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & * & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(2,5)} = \dim \Omega_{(3,1)} = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(2,6)}$  ou  $\Omega_{(3,0)}$  a pour représentant :  

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & * & * & 1 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(2,6)} = \dim \Omega_{(3,0)} = 5$ ,
- si  $\mathbf{j} = (3, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2)$  :  $\mathcal{C}_{(3,4)}$  ou  $\Omega_{(2,2)}$  a pour représentant :  

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(3,4)} = \dim \Omega_{(2,2)} = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (3, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(3,5)}$  ou  $\Omega_{(2,1)}$  a pour représentant :  

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(3,5)} = \dim \Omega_{(2,1)} = 5$ ,

- si  $\mathbf{j} = (3, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(3,6)}$  ou  $\Omega_{(2,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(3,6)} = \dim \Omega_{(2,0)} = 6,$$

- si  $\mathbf{j} = (4, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(4,5)}$  ou  $\Omega_{(1,1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(4,5)} = \dim \Omega_{(1,1)} = 6,$$

- si  $\mathbf{j} = (4, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(4,6)}$  ou  $\Omega_{(1,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(4,6)} = \dim \Omega_{(1,0)} = 7,$$

- si  $\mathbf{j} = (5, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(5,6)}$  ou  $\Omega_{(0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(5,6)} = \dim \Omega_{(0,0)} = 8.$$

$\sum \dim \mathcal{C}_{(j_1, j_2)} = \sum \dim \Omega_{(\lambda_1, \lambda_2)} = \sum |\mathbf{a}| = 60 > \dim G(2, 6) = 8$ . Donc les cellules de Schubert ne sont pas disjointes.

**Complément** : coordonnées de Plücker avec les coordonnées affines :

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & g_1^3 & g_1^4 & g_1^5 & g_1^6 \\ 0 & 1 & g_2^3 & g_2^4 & g_2^5 & g_2^6 \end{pmatrix}. \text{ On a : } \varpi_2^{12} = 1, \varpi_2^{13} = g_2^3, \varpi_2^{14} = g_2^4, \\ \varpi_2^{15} = g_2^5, \varpi_2^{16} = g_2^6, \varpi_2^{23} = -g_1^3, \varpi_2^{24} = -g_1^4, \varpi_2^{25} = -g_1^5, \varpi_2^{26} = -g_1^6, \\ \varpi_2^{34} = g_1^3 g_2^4 - g_2^3 g_1^4, \varpi_2^{35} = g_1^3 g_2^5 - g_2^3 g_1^5, \varpi_2^{36} = g_1^3 g_2^6 - g_2^3 g_1^6, \\ \varpi_2^{45} = g_1^4 g_2^5 - g_2^4 g_1^5, \varpi_2^{46} = g_1^4 g_2^6 - g_2^4 g_1^6, \varpi_2^{56} = g_1^5 g_2^6 - g_2^5 g_1^6.$$

### 6.3 La grassmannienne $G(3, n)$ ; $3 < n$

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

$$N = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - 1.$$

$S(3, n)$  variété de Stiefel.

$$S(3, n) \subset \text{Mat}(3, n); \dim S(3, n) = 3n.$$

- $GL(3) = S(3, 3)$  ;  $\dim GL(3) = 9$ .

- $G(3, n) = S(3, n)/GL(3)$  la grassmannienne :

$$\dim G(3, n) = 3(n-3) \neq N \text{ (en général)}. G(3, n) \cong \text{Mat}(3, n-3).$$

Nombre de coordonnées de Stiefel :  $\dim S(3, n) = 3n$ .

Nombre de coordonnées affines :  $\dim G(3, n) = 3(n-3)$

Coordonnées de Plücker :  $\omega_3^{i_1 i_2 i_3}$  ( $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n$ ). Il y en a  $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = N + 1$ .

Relations de Plücker

Si  $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$  et  $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < j_4 \leq n$  alors :

$$\sum_{k=1}^4 (-1)^k \omega_3^{i_1 i_2 j_k} \omega_3^{j_1 \dots \hat{j}_k \dots j_4} = 0, \text{ soit :}$$

$$-\omega_3^{i_1 i_2 j_1} \omega_3^{j_2 j_3 j_4} + \omega_3^{i_1 i_2 j_2} \omega_3^{j_1 j_3 j_4} - \omega_3^{i_1 i_2 j_3} \omega_3^{j_1 j_2 j_4} + \omega_3^{i_1 i_2 j_4} \omega_3^{j_1 j_2 j_3} = 0$$

La matrice  $[\varphi_{\omega_3}]$  est de dimension  $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \times n$  et la matrice  $[\psi_{\omega_3}]$  de dimension  $\frac{n(n-1)}{2} \times n$  et on  $[\varphi_{\omega_3}][\psi_{\omega_3}]^t = 0$  (matrice de dimension  $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \times \frac{n(n-1)}{2}$ ).

Nombre de relations de Plücker indépendantes :

$$\text{nrpi } G(3, n) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{144} [32].$$

### 6.3.1 La grassmannienne $G(3, 4)$

La grassmannienne  $G(3, 4)$  est duale de la grassmannienne  $G(1, 4)$ .

Coordonnées de Plücker :  $\omega_3^{123}, \omega_3^{124}, \omega_3^{134}, \omega_3^{234}$ .

Matrice  $[\varphi_{\omega_3}]$  de dimension  $1 \times 4$  :

$$[\varphi_{\omega_3}] = \begin{pmatrix} -\omega_3^{234} & \omega_3^{134} & -\omega_3^{124} & \omega_3^{123} \end{pmatrix} \text{ et :}$$

matrice  $[\psi_{\omega_3}]$  de dimension  $6 \times 4$  :

$$[\psi_{\omega_3}] = \begin{pmatrix} -\omega_3^{134} & -\omega_3^{234} & 0 & 0 \\ \omega_3^{124} & 0 & -\omega_3^{234} & 0 \\ -\omega_3^{123} & 0 & 0 & -\omega_3^{234} \\ 0 & \omega_3^{124} & \omega_3^{134} & 0 \\ 0 & -\omega_3^{123} & 0 & \omega_3^{134} \\ 0 & 0 & -\omega_3^{123} & -\omega_3^{124} \end{pmatrix} \text{ et on a :}$$

$[\varphi_{\omega_3}][\psi_{\omega_3}]^t \equiv (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ , ce qui ne donne aucune relation de Plücker (nrp  $G(3, 4) = 0$ ).

Nombre de relations de Plücker indépendantes : nrpi  $G(3, 4) = 0$ .

**Symboles de Schubert** Il y a 4 symboles de Schubert :

$$\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (1, 2, 3), \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (1, 2, 4),$$

$$\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (1, 3, 4) \text{ et } \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (2, 3, 4).$$

Pour chaque symbole de Schubert on en déduit :

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (j_1 - 1, j_2 - 2, j_3 - 3), |\mathbf{a}| = a_1 + a_2 + a_3 = j_1 + j_2 + j_3 - 6,$$

$$\mathbf{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2 - j_1, 3 - j_2, 4 - j_3) \text{ et } |\mathbf{\lambda}| = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 9 - j_1 - j_2 - j_3.$$

Donc :

- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 3, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 1$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 3, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 0$ .

**Cellules de Schubert** Il y a 4 cellules de Schubert  $\mathcal{C}_{(j_1, j_2, j_3)}$  ou  $\Omega_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}$ .

- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(1, 2, 3)}$  ou  $\Omega_{(1, 1, 1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1, 2, 3)} = \dim \Omega_{(1, 1, 1)} = 0,$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1, 2, 4)}$  ou  $\Omega_{(1, 1, 0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1, 2, 4)} = \dim \Omega_{(1, 1, 0)} = 1,$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 3, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1, 3, 4)}$  ou  $\Omega_{(1, 0, 0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & 0 \\ 0 & * & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1, 3, 4)} = \dim \Omega_{(1, 0, 0)} = 2,$$

- si  $\mathbf{j} = (2, 3, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (0)$  :  $\mathcal{C}_{(2, 3, 4)}$  ou  $\Omega_{(0, 0, 0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2, 3, 4)} = \dim \Omega_{(0, 0, 0)} = 3.$$

$\sum \dim \mathcal{C}_{(j_1, j_2, j_3)} = \sum \dim \Omega_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} = \sum |\mathbf{a}| = 6 > \dim G(3, 4) = 3$ .  
Donc les cellules de Schubert ne sont pas disjointes.

**Complément** : coordonnées de Plücker avec les coordonnées affines :

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & g_1^4 \\ 0 & 1 & 0 & g_2^4 \\ 0 & 0 & 1 & g_3^4 \end{pmatrix}. \text{ On a : } \varpi_3^{123} = 1, \varpi_3^{124} = g_3^4, \varpi_3^{134} = -g_2^4, \\ \varpi_3^{234} = g_1^4.$$

### 6.3.2 La grassmannienne $G(3, 5)$

La grassmannienne  $G(3, 5)$  est duale de la grassmannienne  $G(2, 5)$ .



Coordonnées de Plücker :  $\omega_3^{123}, \omega_3^{124}, \omega_3^{125}, \omega_3^{134}, \omega_3^{135}, \omega_3^{145}, \omega_3^{234}, \omega_3^{235}, \omega_3^{245}, \omega_3^{345}$ .

Matrice  $[\varphi_{\omega_3}]$  de dimension  $5 \times 5$  :

$$[\varphi_{\omega_3}] = \begin{pmatrix} -\omega_3^{234} & \omega_3^{134} & -\omega_3^{124} & \omega_3^{123} & 0 \\ -\omega_3^{235} & \omega_3^{135} & -\omega_3^{125} & 0 & \omega_3^{123} \\ -\omega_3^{245} & \omega_3^{145} & 0 & -\omega_3^{125} & \omega_3^{124} \\ -\omega_3^{345} & 0 & \omega_3^{145} & -\omega_3^{135} & \omega_3^{134} \\ 0 & -\omega_3^{345} & \omega_3^{245} & -\omega_3^{235} & \omega_3^{234} \end{pmatrix} \text{ et :}$$

matrice  $[\psi_{\omega_3}]$  de dimension  $10 \times 5$  :

$$[\psi_{\omega_3}] = \begin{pmatrix} \omega_3^{145} & \omega_3^{245} & \omega_3^{345} & 0 & 0 \\ -\omega_3^{135} & -\omega_3^{235} & 0 & \omega_3^{345} & 0 \\ \omega_3^{134} & \omega_3^{234} & 0 & 0 & \omega_3^{345} \\ \omega_3^{125} & 0 & -\omega_3^{235} & -\omega_3^{245} & 0 \\ -\omega_3^{124} & 0 & \omega_3^{234} & 0 & -\omega_3^{245} \\ \omega_3^{123} & 0 & 0 & \omega_3^{234} & \omega_3^{235} \\ 0 & \omega_3^{125} & \omega_3^{135} & \omega_3^{145} & 0 \\ 0 & -\omega_3^{124} & -\omega_3^{134} & 0 & \omega_3^{145} \\ 0 & \omega_3^{123} & 0 & -\omega_3^{134} & -\omega_3^{135} \\ 0 & 0 & \omega_3^{123} & \omega_3^{124} & \omega_3^{125} \end{pmatrix} \text{ et on a :}$$

$$[\varphi_{\omega_3}] [\psi_{\omega_3}]^t = \begin{pmatrix} (2) & (3) & 0 & (4) & 0 & 0 & (5) & 0 & 0 & 0 \\ -(1) & 0 & (3) & 0 & (4) & 0 & 0 & (5) & 0 & 0 \\ 0 & -(1) & -(2) & 0 & 0 & (4) & 0 & 0 & (5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1) & -(2) & -(3) & 0 & 0 & 0 & (5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1) & -(2) & -(3) & -(4) \end{pmatrix},$$

avec :

$$\begin{aligned} (1) &= \omega_3^{125} \omega_3^{345} - \omega_3^{135} \omega_3^{245} + \omega_3^{145} \omega_3^{235} = 0, \\ (2) &= -\omega_3^{124} \omega_3^{345} + \omega_3^{134} \omega_3^{245} - \omega_3^{145} \omega_3^{234} = 0, \\ (3) &= \omega_3^{123} \omega_3^{345} - \omega_3^{134} \omega_3^{235} + \omega_3^{135} \omega_3^{234} = 0, \\ (4) &= -\omega_3^{123} \omega_3^{245} + \omega_3^{124} \omega_3^{235} - \omega_3^{125} \omega_3^{234} = 0, \\ (5) &= \omega_3^{123} \omega_3^{145} - \omega_3^{124} \omega_3^{135} + \omega_3^{125} \omega_3^{134} = 0. \text{ Alors :} \end{aligned}$$

il y a donc 5 relations de Plücker :  $(1) = 0, (2) = 0, (3) = 0, (4) = 0, (5) = 0$  (nrp  $G(2, 5) = 5$ ) et elles sont indépendantes.

Nombre de relations de Plücker indépendantes : nrpi  $G(3, 5) = 5$  [32].

**Symboles de Schubert** Il y a 10 symboles de Schubert :

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3) = (1, 2, 3), \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (1, 2, 4), \\ \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3) = (1, 2, 5), \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (1, 3, 4), \\ \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3) = (1, 3, 5), \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (1, 4, 5), \end{aligned}$$

$$\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (2, 3, 4), \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (2, 3, 5),$$

$$\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (2, 4, 5) \text{ et } \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (3, 4, 5).$$

Pour chaque symbole de Schubert on en déduit :

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (j_1 - 1, j_2 - 2, j_3 - 3), |\mathbf{a}| = a_1 + a_2 + a_3 = j_1 + j_2 + j_3 - 6,$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (3 - j_1, 4 - j_2, 5 - j_3) \text{ et } |\boldsymbol{\lambda}| = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 12 - j_1 - j_2 - j_3.$$

Donc :

- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 2)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 6$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 5$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 3, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 3, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 1, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 4, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 2, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 3, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 3, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 4, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 2, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 1$ ,
- si  $\mathbf{j} = (3, 4, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (2, 2, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 0$ .

**Cellules de Schubert** Il y a 10 cellules de Schubert  $\mathcal{C}_{(j_1, j_2, j_3)}$  ou  $\Omega_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}$ .

- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 2)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,3)}$  ou  $\Omega_{(2,2,2)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,3)} = \dim \Omega_{(2,2,2)} = 0,$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,4)}$  ou  $\Omega_{(2,2,1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,4)} = \dim \Omega_{(2,2,1)} = 1,$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,5)}$  ou  $\Omega_{(2,2,0)}$  a pour représentant :  

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 1 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(1,2,5)} = \dim \Omega_{(2,2,0)} = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 3, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(1,3,4)}$  ou  $\Omega_{(2,1,1)}$  a pour représentant :  

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(1,3,4)} = \dim \Omega_{(2,1,1)} = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 3, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,3,5)}$  ou  $\Omega_{(2,1,0)}$  a pour représentant :  

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 1 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(1,3,5)} = \dim \Omega_{(2,1,0)} = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 4, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,4,5)}$  ou  $\Omega_{(2,0,0)}$  a pour représentant :  

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 1 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(1,4,5)} = \dim \Omega_{(2,0,0)} = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 3, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(2,3,4)}$  ou  $\Omega_{(1,1,1)}$  a pour représentant :  

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(2,3,4)} = \dim \Omega_{(1,1,1)} = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 3, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(2,3,5)}$  ou  $\Omega_{(1,1,0)}$  a pour représentant :  

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & * & 1 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(2,3,5)} = \dim \Omega_{(1,1,0)} = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 4, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(2,4,5)}$  ou  $\Omega_{(1,0,0)}$  a pour représentant :  

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 & * & 1 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(2,4,5)} = \dim \Omega_{(1,0,0)} = 5$ ,
- si  $\mathbf{j} = (3, 4, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(3,4,5)}$  ou  $\Omega_{(0,0,0)}$  a pour représentant :  

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 1 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(3,4,5)} = \dim \Omega_{(0,0,0)} = 6$ .

$\sum \dim \mathcal{C}_{(j_1, j_2, j_3)} = \sum \dim \Omega_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} = \sum |\mathbf{a}| = 30 > \dim G(3, 5) = 6$ .  
Donc les cellules de Schubert ne sont pas disjointes.

**Complément** : coordonnées de Plücker avec les coordonnées affines :

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & g_1^4 & g_1^5 \\ 0 & 1 & 0 & g_2^4 & g_2^5 \\ 0 & 0 & 1 & g_3^4 & g_3^5 \end{pmatrix}. \text{ On a : } \varpi_3^{123} = 1, \varpi_3^{124} = g_3^4, \varpi_3^{125} = g_3^5,$$

$$\varpi_3^{134} = -g_2^4, \varpi_3^{135} = -g_2^5, \varpi_3^{145} = g_2^4 g_3^5 - g_3^4 g_2^5, \varpi_3^{234} = g_1^4, \varpi_3^{235} = g_1^5,$$

$$\varpi_3^{245} = -g_1^4 g_3^5 + g_3^4 g_1^5, \varpi_3^{345} = g_1^4 g_2^5 - g_2^4 g_1^5.$$

### 6.3.3 La grassmannienne $G(3, 6)$

On pourra consulter [7]<sup>120</sup> [26]<sup>121</sup> [33] [43]<sup>122</sup>.

On peut dire que la grassmannienne  $G(3, 6)$  est autoduale.

Coordonnées de Plücker :  $\omega_3^{123}, \omega_3^{124}, \omega_3^{125}, \omega_3^{126}, \omega_3^{134}, \omega_3^{135}, \omega_3^{136}, \omega_3^{145}, \omega_3^{146}, \omega_3^{156},$   
 $\omega_3^{234}, \omega_3^{235}, \omega_3^{236}, \omega_3^{245}, \omega_3^{246}, \omega_3^{256}, \omega_3^{345}, \omega_3^{346}, \omega_3^{356}, \omega_3^{456}$ .

Matrice  $[\varphi_{\omega_3}]$  de dimension  $15 \times 6$  :

$$[\varphi_{\omega_3}] = \begin{pmatrix} -\omega_3^{234} & \omega_3^{134} & -\omega_3^{124} & \omega_3^{123} & 0 & 0 \\ -\omega_3^{235} & \omega_3^{135} & -\omega_3^{125} & 0 & \omega_3^{123} & 0 \\ -\omega_3^{236} & \omega_3^{136} & -\omega_3^{126} & 0 & 0 & \omega_3^{123} \\ -\omega_3^{245} & \omega_3^{145} & 0 & -\omega_3^{125} & \omega_3^{124} & 0 \\ -\omega_3^{246} & \omega_3^{146} & 0 & -\omega_3^{126} & 0 & \omega_3^{124} \\ -\omega_3^{256} & \omega_3^{156} & 0 & 0 & -\omega_3^{126} & \omega_3^{125} \\ -\omega_3^{345} & 0 & \omega_3^{145} & -\omega_3^{135} & \omega_3^{134} & 0 \\ -\omega_3^{346} & 0 & \omega_3^{146} & -\omega_3^{136} & 0 & \omega_3^{134} \\ -\omega_3^{356} & 0 & \omega_3^{156} & 0 & -\omega_3^{136} & \omega_3^{135} \\ -\omega_3^{456} & 0 & 0 & \omega_3^{156} & -\omega_3^{146} & \omega_3^{145} \\ 0 & -\omega_3^{345} & \omega_3^{245} & -\omega_3^{235} & \omega_3^{234} & 0 \\ 0 & -\omega_3^{346} & \omega_3^{246} & -\omega_3^{236} & 0 & \omega_3^{234} \\ 0 & -\omega_3^{356} & \omega_3^{256} & 0 & -\omega_3^{236} & \omega_3^{235} \\ 0 & -\omega_3^{456} & 0 & \omega_3^{256} & -\omega_3^{246} & \omega_3^{245} \\ 0 & 0 & -\omega_3^{456} & \omega_3^{356} & -\omega_3^{346} & \omega_3^{345} \end{pmatrix} \text{ et :}$$

matrice  $[\psi_{\omega_3}]$  de dimension  $15 \times 6$  :

120. pp. 2-4

121. p. 36 exemple 1.40

122. pp. 7-9

$$[\psi_{\omega_3}] = \begin{pmatrix} -\omega_3^{156} & -\omega_3^{256} & -\omega_3^{236} & -\omega_3^{436} & 0 & 0 \\ \omega_3^{146} & \omega_3^{246} & \omega_3^{346} & 0 & -\omega_3^{456} & 0 \\ -\omega_3^{145} & -\omega_3^{245} & -\omega_3^{345} & 0 & 0 & -\omega_3^{456} \\ -\omega_3^{136} & -\omega_3^{236} & 0 & \omega_3^{346} & \omega_3^{356} & 0 \\ \omega_3^{135} & \omega_3^{235} & 0 & -\omega_3^{345} & 0 & \omega_3^{356} \\ -\omega_3^{134} & -\omega_3^{234} & 0 & 0 & -\omega_3^{345} & -\omega_3^{346} \\ \omega_3^{126} & 0 & -\omega_3^{236} & -\omega_3^{246} & -\omega_3^{256} & 0 \\ -\omega_3^{125} & 0 & \omega_3^{235} & \omega_3^{245} & 0 & -\omega_3^{256} \\ \omega_3^{124} & 0 & -\omega_3^{234} & 0 & \omega_3^{245} & \omega_3^{246} \\ -\omega_3^{123} & 0 & 0 & -\omega_3^{234} & -\omega_3^{235} & -\omega_3^{236} \\ 0 & \omega_3^{126} & \omega_3^{136} & \omega_3^{146} & \omega_3^{156} & 0 \\ 0 & -\omega_3^{125} & -\omega_3^{135} & -\omega_3^{145} & 0 & \omega_3^{156} \\ 0 & \omega_3^{124} & \omega_3^{134} & 0 & -\omega_3^{145} & -\omega_3^{146} \\ 0 & -\omega_3^{123} & 0 & \omega_3^{134} & \omega_3^{135} & \omega_3^{136} \\ 0 & 0 & -\omega_3^{123} & -\omega_3^{124} & -\omega_3^{125} & -\omega_3^{126} \end{pmatrix} \text{ et on a :}$$

$$[\varphi_{\omega_3}] [\psi_{\omega_3}]^t = \begin{pmatrix} -(15) & -(28) & (27) & (23) & -(22) & 0 & -(20) & (19) & 0 & 0 & (17) & -(16) & 0 & 0 & 0 \\ (31) & (14) & (30) & (24) & 0 & -(22) & -(21) & 0 & (19) & 0 & (18) & 0 & -(16) & 0 & 0 \\ (34) & -(35) & -(13) & 0 & (24) & -(23) & 0 & -(21) & (20) & 0 & 0 & (18) & -(17) & 0 & 0 \\ (32) & -(29) & 0 & -(12) & (30) & -(27) & -(26) & 0 & 0 & (19) & (25) & 0 & 0 & -(16) & 0 \\ (33) & 0 & -(29) & -(35) & (11) & -(28) & 0 & (26) & 0 & (20) & 0 & (25) & 0 & -(17) & 0 \\ 0 & (33) & -(32) & -(34) & (31) & -(10) & 0 & 0 & -(26) & (21) & 0 & 0 & (25) & -(18) & 0 \\ (39) & -(37) & 0 & (36) & 0 & 0 & (9) & (30) & -(27) & (22) & (38) & 0 & 0 & 0 & -(16) \\ (40) & 0 & -(37) & 0 & (36) & 0 & -(35) & -(8) & -(28) & (23) & 0 & (38) & 0 & 0 & -(17) \\ 0 & (40) & -(39) & 0 & 0 & (36) & -(34) & (31) & (7) & (24) & 0 & 0 & (38) & 0 & -(18) \\ 0 & 0 & 0 & (40) & -(39) & (37) & -(33) & (32) & -(29) & -(6) & 0 & 0 & 0 & (38) & -(25) \\ (44) & -(42) & 0 & (41) & 0 & 0 & -(43) & 0 & 0 & 0 & -(5) & (30) & -(27) & (22) & -(19) \\ (45) & 0 & -(42) & 0 & (41) & 0 & 0 & -(43) & 0 & 0 & -(35) & (4) & -(28) & (23) & -(20) \\ 0 & (45) & -(44) & 0 & 0 & (41) & 0 & 0 & -(43) & 0 & -(34) & (31) & -(3) & (24) & -(21) \\ 0 & 0 & 0 & (45) & -(44) & (42) & 0 & 0 & 0 & -(43) & -(33) & (32) & -(29) & (2) & -(26) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (45) & -(44) & (42) & -(41) & -(40) & (39) & -(37) & (36) & -(1) \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} (1) &= -\omega_3^{123} \omega_3^{456} + \omega_3^{124} \omega_3^{356} - \omega_3^{125} \omega_3^{346} + \omega_3^{126} \omega_3^{345}, \\ (2) &= \omega_3^{123} \omega_3^{456} + \omega_3^{134} \omega_3^{256} - \omega_3^{135} \omega_3^{246} + \omega_3^{136} \omega_3^{245}, \\ (3) &= \omega_3^{124} \omega_3^{356} - \omega_3^{134} \omega_3^{256} - \omega_3^{145} \omega_3^{236} + \omega_3^{146} \omega_3^{235}, \\ (4) &= \omega_3^{125} \omega_3^{346} - \omega_3^{135} \omega_3^{246} + \omega_3^{145} \omega_3^{236} + \omega_3^{156} \omega_3^{234}, \\ (5) &= \omega_3^{126} \omega_3^{345} - \omega_3^{136} \omega_3^{245} + \omega_3^{146} \omega_3^{235} - \omega_3^{156} \omega_3^{234}, \\ (6) &= -\omega_3^{123} \omega_3^{456} + \omega_3^{234} \omega_3^{156} - \omega_3^{235} \omega_3^{146} + \omega_3^{236} \omega_3^{145}, \\ (7) &= -\omega_3^{124} \omega_3^{356} - \omega_3^{234} \omega_3^{156} - \omega_3^{245} \omega_3^{136} + \omega_3^{246} \omega_3^{135}, \\ (8) &= -\omega_3^{125} \omega_3^{346} - \omega_3^{235} \omega_3^{146} + \omega_3^{245} \omega_3^{136} + \omega_3^{256} \omega_3^{134}, \\ (9) &= -\omega_3^{126} \omega_3^{345} - \omega_3^{236} \omega_3^{145} + \omega_3^{246} \omega_3^{135} - \omega_3^{256} \omega_3^{134}, \\ (10) &= -\omega_3^{134} \omega_3^{256} + \omega_3^{234} \omega_3^{156} - \omega_3^{345} \omega_3^{126} + \omega_3^{346} \omega_3^{125}, \\ (11) &= -\omega_3^{135} \omega_3^{246} + \omega_3^{235} \omega_3^{146} + \omega_3^{345} \omega_3^{126} + \omega_3^{356} \omega_3^{124}, \\ (12) &= -\omega_3^{136} \omega_3^{245} + \omega_3^{236} \omega_3^{145} + \omega_3^{346} \omega_3^{125} - \omega_3^{356} \omega_3^{124}, \\ (13) &= -\omega_3^{145} \omega_3^{236} + \omega_3^{245} \omega_3^{136} - \omega_3^{345} \omega_3^{126} + \omega_3^{456} \omega_3^{123}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(14) &= -\omega_3^{146} \omega_3^{235} + \omega_3^{246} \omega_3^{135} - \omega_3^{346} \omega_3^{125} - \omega_3^{456} \omega_3^{123}, \\
(15) &= -\omega_3^{156} \omega_3^{234} + \omega_3^{256} \omega_3^{134} - \omega_3^{356} \omega_3^{124} + \omega_3^{456} \omega_3^{123}, \\
(16) &= \omega_3^{123} \omega_3^{145} - \omega_3^{124} \omega_3^{135} + \omega_3^{125} \omega_3^{134}, \\
(17) &= \omega_3^{123} \omega_3^{146} - \omega_3^{124} \omega_3^{136} + \omega_3^{126} \omega_3^{134}, \\
(18) &= \omega_3^{123} \omega_3^{156} - \omega_3^{125} \omega_3^{136} + \omega_3^{126} \omega_3^{135}, \\
(19) &= \omega_3^{123} \omega_3^{245} - \omega_3^{124} \omega_3^{235} + \omega_3^{125} \omega_3^{234}, \\
(20) &= \omega_3^{123} \omega_3^{246} - \omega_3^{124} \omega_3^{236} + \omega_3^{126} \omega_3^{234}, \\
(21) &= \omega_3^{123} \omega_3^{256} - \omega_3^{125} \omega_3^{236} + \omega_3^{126} \omega_3^{235}, \\
(22) &= \omega_3^{123} \omega_3^{345} - \omega_3^{134} \omega_3^{235} + \omega_3^{135} \omega_3^{234}, \\
(23) &= \omega_3^{123} \omega_3^{346} - \omega_3^{134} \omega_3^{236} + \omega_3^{136} \omega_3^{234}, \\
(24) &= \omega_3^{123} \omega_3^{356} - \omega_3^{135} \omega_3^{236} + \omega_3^{136} \omega_3^{235}, \\
(25) &= \omega_3^{124} \omega_3^{156} - \omega_3^{125} \omega_3^{146} + \omega_3^{126} \omega_3^{145}, \\
(26) &= \omega_3^{124} \omega_3^{256} - \omega_3^{125} \omega_3^{246} + \omega_3^{126} \omega_3^{245}, \\
(27) &= \omega_3^{124} \omega_3^{345} - \omega_3^{134} \omega_3^{245} + \omega_3^{145} \omega_3^{234}, \\
(28) &= \omega_3^{124} \omega_3^{346} - \omega_3^{134} \omega_3^{246} + \omega_3^{146} \omega_3^{234}, \\
(29) &= \omega_3^{124} \omega_3^{456} - \omega_3^{145} \omega_3^{246} + \omega_3^{146} \omega_3^{245}, \\
(30) &= \omega_3^{125} \omega_3^{345} - \omega_3^{135} \omega_3^{245} + \omega_3^{145} \omega_3^{235}, \\
(31) &= \omega_3^{125} \omega_3^{356} - \omega_3^{135} \omega_3^{256} + \omega_3^{156} \omega_3^{235}, \\
(32) &= \omega_3^{125} \omega_3^{456} - \omega_3^{145} \omega_3^{256} + \omega_3^{156} \omega_3^{245}, \\
(33) &= \omega_3^{126} \omega_3^{456} - \omega_3^{146} \omega_3^{256} + \omega_3^{156} \omega_3^{246}, \\
(34) &= \omega_3^{126} \omega_3^{356} - \omega_3^{136} \omega_3^{256} + \omega_3^{156} \omega_3^{236}, \\
(35) &= \omega_3^{126} \omega_3^{346} - \omega_3^{136} \omega_3^{246} + \omega_3^{146} \omega_3^{236}, \\
(36) &= \omega_3^{134} \omega_3^{356} - \omega_3^{135} \omega_3^{346} + \omega_3^{136} \omega_3^{345}, \\
(37) &= \omega_3^{134} \omega_3^{456} - \omega_3^{145} \omega_3^{346} + \omega_3^{146} \omega_3^{345}, \\
(38) &= \omega_3^{134} \omega_3^{156} - \omega_3^{135} \omega_3^{146} + \omega_3^{136} \omega_3^{145}, \\
(39) &= \omega_3^{135} \omega_3^{456} - \omega_3^{145} \omega_3^{356} + \omega_3^{156} \omega_3^{345}, \\
(40) &= \omega_3^{136} \omega_3^{456} - \omega_3^{146} \omega_3^{356} + \omega_3^{156} \omega_3^{346}, \\
(41) &= \omega_3^{234} \omega_3^{356} - \omega_3^{235} \omega_3^{346} + \omega_3^{236} \omega_3^{345}, \\
(42) &= \omega_3^{234} \omega_3^{456} - \omega_3^{245} \omega_3^{346} + \omega_3^{246} \omega_3^{345}, \\
(43) &= \omega_3^{234} \omega_3^{256} - \omega_3^{235} \omega_3^{246} + \omega_3^{236} \omega_3^{245}, \\
(44) &= \omega_3^{235} \omega_3^{456} - \omega_3^{245} \omega_3^{356} + \omega_3^{256} \omega_3^{345}, \\
(45) &= \omega_3^{236} \omega_3^{456} - \omega_3^{246} \omega_3^{356} + \omega_3^{256} \omega_3^{346}. \text{ Alors :}
\end{aligned}$$

il y a donc 45 relations de Plücker : (1) = 0, (2) = 0, ..., (45) = 0 (nrp  $G(3, 6) = 45$ ), mais elles sont dépendantes. En effet les relations (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14) et (15) sont inutiles car elles se déduisent de (1), (2), (3), (4) et (5) :

$$\begin{aligned}
2 \times (6) &= (1) - (2) - (3) + (4) - (5), \\
2 \times (7) &= -(1) - (2) - (3) - (4) + (5), \\
2 \times (8) &= (1) + (2) - (3) - (4) - (5),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \times (9) &= -(1) - (2) + (3) - (4) - (5), \\
2 \times (10) &= -(1) - (2) + (3) + (4) - (5), \\
2 \times (11) &= (1) + (2) + (3) + (4) + (5), \\
2 \times (12) &= -(1) - (2) - (3) + (4) + (5), \\
2 \times (13) &= -(1) + (2) + (3) - (4) - (5), \\
2 \times (14) &= (1) - (2) - (3) - (4) - (5), \\
2 \times (15) &= -(1) + (2) - (3) - (4) + (5).
\end{aligned}$$

Et il n'y a donc que  $45-10=35$  relations de Plücker indépendantes  
(nrpi  $G(3, 6) = 35$ ) [32] [42]<sup>123</sup>.

**Symboles de Schubert** Il y a 20 symboles de Schubert :

$$\begin{aligned}
\mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3) = (1, 2, 3), \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (1, 2, 4), \\
\mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3) = (1, 2, 5), \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (1, 2, 6), \\
\mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3) = (1, 3, 4), \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (1, 3, 5), \\
\mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3) = (1, 3, 6), \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (1, 4, 5), \\
\mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3) = (1, 4, 6), \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (1, 5, 6), \\
\mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3) = (2, 3, 4), \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (2, 3, 5), \\
\mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3) = (2, 3, 6), \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (2, 4, 5), \\
\mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3) = (2, 4, 6), \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (2, 5, 6), \\
\mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3) = (3, 4, 5), \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (3, 4, 6), \\
\mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3) = (3, 5, 6) \text{ et } \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) = (4, 5, 6).
\end{aligned}$$

Pour chaque symbole de Schubert on en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3) = (j_1 - 1, j_2 - 2, j_3 - 3), |\mathbf{a}| = a_1 + a_2 + a_3 = j_1 + j_2 + j_3 - 6, \\
\boldsymbol{\lambda} &= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (4 - j_1, 5 - j_2, 6 - j_3) \text{ et } |\boldsymbol{\lambda}| = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 15 - j_1 - j_2 - j_3.
\end{aligned}$$

Donc :

- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 3, 3)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 9$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 3, 2)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 8$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 3, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 7$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 3, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 6$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 3, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 2, 2)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 7$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 3, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 1, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 2, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 6$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 3, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 1, 3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 2, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 5$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 4, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 2, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 1, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 5$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 4, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 2, 3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 1, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4$ ,

---

123. p. 13

- si  $\mathbf{j} = (1, 5, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 3, 3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 3, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 2)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 6$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 3, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 5$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 3, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 1, 3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 4, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 2, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 4, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 5, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 3, 3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (3, 4, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (2, 2, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (3, 4, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (2, 2, 3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (3, 5, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (2, 3, 3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 1$ ,
- si  $\mathbf{j} = (4, 5, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (3, 3, 3)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 0$ .

**Cellules de Schubert** Il y a 20 cellules de Schubert  $\mathcal{C}_{(j_1, j_2, j_3)}$  ou  $\Omega_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}$ .

- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 3, 3)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,3)}$  ou  $\Omega_{(3,3,3)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,3)} = \dim \Omega_{(3,3,3)} = 0,$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 3, 2)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,4)}$  ou  $\Omega_{(3,3,2)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,4)} = \dim \Omega_{(3,3,2)} = 1,$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 3, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,5)}$  ou  $\Omega_{(3,3,1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,5)} = \dim \Omega_{(3,3,1)} = 2,$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 3, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,6)}$  ou  $\Omega_{(3,3,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,6)} = \dim \Omega_{(3,3,0)} = 3,$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 3, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 2, 2)$  :  $\mathcal{C}_{(1,3,4)}$  ou  $\Omega_{(3,2,2)}$  a pour représentant :



- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\dim \mathcal{C}_{(1,3,4)} = \dim \Omega_{(3,2,2)} = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 3, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 2, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(1,3,5)}$  ou  $\Omega_{(3,2,1)}$  a pour représentant :
 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(1,3,5)} = \dim \Omega_{(3,2,1)} = 3$ ,
  - si  $\mathbf{j} = (1, 3, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 2, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,3,6)}$  ou  $\Omega_{(3,2,0)}$  a pour représentant :
 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & * & 1 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(1,3,6)} = \dim \Omega_{(3,2,0)} = 4$ ,
  - si  $\mathbf{j} = (1, 4, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 1, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(1,4,5)}$  ou  $\Omega_{(3,1,1)}$  a pour représentant :
 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(1,4,5)} = \dim \Omega_{(3,1,1)} = 4$ ,
  - si  $\mathbf{j} = (1, 4, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 1, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,4,6)}$  ou  $\Omega_{(3,1,0)}$  a pour représentant :
 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & * & 1 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(1,4,6)} = \dim \Omega_{(3,1,0)} = 5$ ,
  - si  $\mathbf{j} = (1, 5, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (3, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,5,6)}$  ou  $\Omega_{(3,0,0)}$  a pour représentant :
 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 1 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(1,5,6)} = \dim \Omega_{(3,0,0)} = 6$ ,
  - si  $\mathbf{j} = (2, 3, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 2)$  :  $\mathcal{C}_{(2,3,4)}$  ou  $\Omega_{(2,2,2)}$  a pour représentant :
 
$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(2,3,4)} = \dim \Omega_{(2,2,2)} = 3$ ,
  - si  $\mathbf{j} = (2, 3, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(2,3,5)}$  ou  $\Omega_{(2,2,1)}$  a pour représentant :
 
$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & * & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 et  $\dim \mathcal{C}_{(2,3,5)} = \dim \Omega_{(2,2,1)} = 4$ ,
  - si  $\mathbf{j} = (2, 3, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(2,3,6)}$  ou  $\Omega_{(2,2,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & * & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2,3,6)} = \dim \Omega_{(2,2,0)} = 5,$$

- si  $\mathbf{j} = (2, 4, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(2,4,5)}$  ou  $\Omega_{(2,1,1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & * & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2,4,5)} = \dim \Omega_{(2,1,1)} = 5,$$

- si  $\mathbf{j} = (2, 4, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(2,4,6)}$  ou  $\Omega_{(2,1,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2,4,6)} = \dim \Omega_{(2,1,0)} = 6,$$

- si  $\mathbf{j} = (2, 5, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(2,5,6)}$  ou  $\Omega_{(2,0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & * & 1 & 0 \\ * & 0 & * & * & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2,5,6)} = \dim \Omega_{(2,0,0)} = 7,$$

- si  $\mathbf{j} = (3, 4, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(3,4,5)}$  ou  $\Omega_{(1,1,1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(3,4,5)} = \dim \Omega_{(1,1,1)} = 6,$$

- si  $\mathbf{j} = (3, 4, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(3,4,6)}$  ou  $\Omega_{(1,1,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(3,4,6)} = \dim \Omega_{(1,1,0)} = 7,$$

- si  $\mathbf{j} = (3, 5, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(3,5,6)}$  ou  $\Omega_{(1,0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & 1 & 0 \\ * & * & 0 & * & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(3,5,6)} = \dim \Omega_{(1,0,0)} = 8,$$

- si  $\mathbf{j} = (4, 5, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(4,5,6)}$  ou  $\Omega_{(0,0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 1 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(4,5,6)} = \dim \Omega_{(0,0,0)} = 9.$$

$\sum \dim \mathcal{C}_{(j_1, j_2, j_3)} = \sum \dim \Omega_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} = \sum |\mathbf{a}| = 90 > \dim G(3, 6) = 9.$   
Donc les cellules de Schubert ne sont pas disjointes.

**Complément** : coordonnées de Plücker avec les coordonnées affines :

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & g_1^4 & g_1^5 & g_1^6 \\ 0 & 1 & 0 & g_2^4 & g_2^5 & g_2^6 \\ 0 & 0 & 1 & g_3^4 & g_3^5 & g_3^6 \end{pmatrix}. \text{ On a : } \varpi_3^{123} = 1, \varpi_3^{124} = g_3^4, \varpi_3^{125} = g_3^5,$$

$$\varpi_3^{126} = g_3^6, \varpi_3^{134} = -g_2^4, \varpi_3^{135} = -g_2^5, \varpi_3^{136} = -g_2^6, \varpi_3^{145} = g_2^4 g_3^5 - g_3^4 g_2^5,$$

$$\varpi_3^{146} = g_2^4 g_3^6 - g_3^4 g_2^6, \varpi_3^{156} = a_2^5 g_3^6 - g_3^5 g_2^6, \varpi_3^{234} = g_1^4, \varpi_3^{235} = g_1^5, \varpi_3^{236} = g_1^6,$$

$$\varpi_3^{245} = -g_1^4 g_3^5 + g_3^4 g_1^5, \varpi_3^{246} = -g_1^4 g_3^6 + g_3^4 g_1^6, \varpi_3^{256} = -g_1^5 g_3^6 + g_3^5 g_1^6,$$

$$\varpi_3^{345} = g_1^4 g_2^5 - g_2^4 g_1^5, \varpi_3^{346} = g_1^4 g_2^6 - g_2^4 g_1^6, \varpi_3^{356} = g_1^5 g_2^6 - g_2^5 g_1^6,$$

$$\varpi_3^{456} = \begin{vmatrix} g_1^4 & g_1^5 & g_1^6 \\ g_2^4 & g_2^5 & g_2^6 \\ g_3^4 & g_3^5 & g_3^6 \end{vmatrix}.$$

## 6.4 La grassmannienne $G(4, n)$ ; $4 < n$

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

$$N = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} - 1.$$

$S(4, n)$  variété de Stiefel.

$S(4, n) \subset \text{Mat}(4, n)$  ;  $\dim S(4, n) = 4n$ .

•  $GL(4) = S(4, 4)$  ;  $\dim GL(4) = 16$ .

•  $G(4, n) = S(4, n)/GL(4)$  la grassmannienne :

$\dim G(4, n) = 4(n-4) \neq N$  (en général).  $G(4, n) \cong \text{Mat}(4, n-4)$ .

Nombre de coordonnées de Stiefel :  $\dim S(4, n) = 4n$ .

Nombre de coordonnées affines :  $\dim G(4, n) = 4(n-4)$

Coordonnées de Plücker :  $\omega_4^{i_1 i_2 i_3 i_4}$  ( $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n$ ). Il y en a  $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = N + 1$ .

Relations de Plücker

Si  $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n$  et  $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < j_4 < j_5 \leq n$  alors :

$$\sum_{k=1}^5 (-1)^k \omega_4^{i_1 i_2 i_3 j_k} \omega_4^{j_1 \dots \hat{j}_k \dots j_5} = 0, \text{ soit :}$$

$$-\omega_4^{i_1 i_2 i_3 j_1} \omega_4^{j_2 j_3 j_4 j_5} + \omega_4^{i_1 i_2 i_3 j_2} \omega_4^{j_1 j_3 j_4 j_5} - \omega_4^{i_1 i_2 i_3 j_3} \omega_4^{j_1 j_2 j_4 j_5} + \omega_4^{i_1 i_2 i_3 j_4} \omega_4^{j_1 j_2 j_3 j_5}$$

$$- \omega_4^{i_1 i_2 i_3 j_5} \omega_4^{j_1 j_2 j_3 j_4} = 0.$$

La matrice  $[\varphi_{\omega_4}]$  est de dimension  $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120} \times n$  et la matrice  $[\psi_{\omega_4}]$  de dimension  $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times n$  et on  $[\varphi_{\omega_4}] [\psi_{\omega_4}]^t = 0$   
(matrice de dimension  $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120} \times \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ ).

Nombre de relations de Plücker indépendantes :

$$\text{nrpi } G(4, n) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(3n^2+n+6)}{5760} \quad [32].$$

### 6.4.1 La grassmannienne $G(4, 5)$

La grassmannienne  $G(4, 5)$  est duale de la grassmannienne  $G(1, 5)$ .

Coordonnées de Plücker :  $\omega_4^{1234}, \omega_4^{1235}, \omega_4^{1245}, \omega_4^{1345}, \omega_4^{2345}$ .

Matrice  $[\varphi_{\omega_4}]$  de dimension  $1 \times 5$  :

$$[\varphi_{\omega_4}] = \left( \begin{array}{ccccc} \omega_4^{2345} & -\omega_4^{1345} & \omega_4^{1245} & -\omega_4^{1235} & \omega_4^{1234} \end{array} \right) \text{ et :}$$

matrice  $[\psi_{\omega_4}]$  de dimension  $10 \times 5$  :

$$[\psi_{\omega_4}] = \left( \begin{array}{ccccc} \omega_4^{1345} & \omega_4^{2345} & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_4^{1245} & 0 & \omega_4^{2345} & 0 & 0 \\ \omega_4^{1235} & 0 & 0 & \omega_4^{2345} & 0 \\ -\omega_4^{1234} & 0 & 0 & 0 & \omega_4^{2345} \\ 0 & -\omega_4^{1245} & -\omega_4^{1345} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_4^{1235} & 0 & -\omega_4^{1345} & 0 \\ 0 & -\omega_4^{1234} & 0 & 0 & -\omega_4^{1345} \\ 0 & 0 & \omega_4^{1235} & \omega_4^{1245} & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_4^{1234} & 0 & \omega_4^{1245} \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_4^{1234} & -\omega_4^{1245} \end{array} \right) \text{ et on a :}$$

$[\varphi_{\omega_4}] [\psi_{\omega_4}]^t \equiv (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$  ce qui ne donne aucune relation de Plücker (nrp  $G(4, 5) = 0$ ).

Nombre de relations de Plücker indépendantes : nrpi  $G(4, 5) = 0$ .

**Symboles de Schubert** Il y a 5 symboles de Schubert :

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 2, 3, 4), \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 2, 3, 5), \\ \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 2, 4, 5), \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 3, 4, 5), \\ \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4) = (2, 3, 4, 5). \end{aligned}$$

Pour chaque symbole de Schubert on en déduit :

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4) = (j_1 - 1, j_2 - 2, j_3 - 3, j_4 - 4),$$

$$|\mathbf{a}| = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = j_1 + j_2 + j_3 + j_4 - 10,$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (2 - j_1, 3 - j_2, 4 - j_3, 5 - j_4)$$

et  $|\boldsymbol{\lambda}| = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 14 - j_1 - j_2 - j_3 - j_4$ . Donc :

- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 0, 0)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 0, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 4, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 3, 4, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 1, 1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 1$ ,

- si  $\mathbf{j} = (2, 3, 4, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 0$ .

**Cellules de Schubert** Il y a 5 cellules de Schubert  $\mathcal{C}_{(j_1, j_2, j_3, j_4)}$  ou  $\Omega_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)}$ .

- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,3,4)}$  ou  $\Omega_{(1,1,1,1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,3,4)} = \dim \Omega_{(1,1,1,1)} = 0,$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,3,5)}$  ou  $\Omega_{(1,1,1,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,3,5)} = \dim \Omega_{(1,1,1,0)} = 1.$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 4, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,4,5)}$  ou  $\Omega_{(1,1,0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,4,5)} = \dim \Omega_{(1,1,0,0)} = 2,$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 3, 4, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,3,4,5)}$  ou  $\Omega_{(1,0,0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 1 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,3,4,5)} = \dim \Omega_{(1,0,0,0)} = 3,$$

- si  $\mathbf{j} = (2, 3, 4, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(2,3,4,5)}$  ou  $\Omega_{(0,0,0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2,3,4,5)} = \dim \Omega_{(0,0,0,0)} = 4.$$

$\sum \dim \mathcal{C}_{(j_1, j_2, j_3, j_4)} = \sum \dim \Omega_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)} = \sum |\mathbf{a}| = 10 > \dim G(4, 5) = 4$ .  
Donc les cellules de Schubert ne sont pas disjointes.

**Complément** : coordonnées de Plücker avec les coordonnées affines :

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & g_1^5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & g_2^5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & g_3^5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & g_4^5 \end{pmatrix}. \text{ On a : } \varpi_4^{1234} = 1, \varpi_4^{1235} = g_4^5, \varpi_4^{1245} = -g_3^5, \\ \varpi_4^{1345} = g_2^5, \varpi_4^{2345} = -g_1^5.$$

### 6.4.2 La grassmannienne $G(4, 6)$

La grassmannienne  $G(4, 6)$  est duale de la grassmannienne  $G(2, 6)$ .

Coordonnées de Plücker :  $\omega_4^{1234}, \omega_4^{1235}, \omega_4^{1236}, \omega_4^{1245}, \omega_4^{1246}, \omega_4^{1256}, \omega_4^{1345}, \omega_4^{1346}, \omega_4^{1356}, \omega_4^{1456}, \omega_4^{2345}, \omega_4^{2346}, \omega_4^{2356}, \omega_4^{2456}, \omega_4^{3456}$ .

Matrice  $[\varphi_{\omega_4}]$  de dimension  $6 \times 6$  :

$$[\varphi_{\omega_4}] = \begin{pmatrix} \omega_4^{2345} & -\omega_4^{1345} & \omega_4^{1245} & -\omega_4^{1235} & \omega_4^{1234} & 0 \\ \omega_4^{2346} & -\omega_4^{1346} & \omega_4^{1246} & -\omega_4^{1236} & 0 & \omega_4^{1234} \\ \omega_4^{2356} & -\omega_4^{1356} & \omega_4^{1256} & 0 & -\omega_4^{1236} & \omega_4^{1235} \\ \omega_4^{2456} & -\omega_4^{1456} & 0 & \omega_4^{1256} & -\omega_4^{1246} & \omega_4^{1245} \\ \omega_4^{3456} & 0 & -\omega_4^{1456} & \omega_4^{1356} & -\omega_4^{1346} & \omega_4^{1345} \\ 0 & \omega_4^{3456} & -\omega_4^{2456} & \omega_4^{2356} & -\omega_4^{2346} & \omega_4^{2345} \end{pmatrix} \text{ et :}$$

matrice  $[\psi_{\omega_4}]$  de dimension  $20 \times 6$  :

$$[\psi_{\omega_4}] = \begin{pmatrix} \omega_4^{1456} & \omega_4^{2456} & \omega_4^{3456} & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_4^{1356} & -\omega_4^{2356} & 0 & \omega_4^{3456} & 0 & 0 \\ \omega_4^{1346} & \omega_4^{2346} & 0 & 0 & \omega_4^{3456} & 0 \\ -\omega_4^{1345} & -\omega_4^{2345} & 0 & 0 & 0 & \omega_4^{3456} \\ \omega_4^{1256} & 0 & -\omega_4^{2356} & -\omega_4^{2456} & 0 & 0 \\ -\omega_4^{1246} & 0 & \omega_4^{2346} & 0 & -\omega_4^{2456} & 0 \\ \omega_4^{1245} & 0 & -\omega_4^{2345} & 0 & 0 & -\omega_4^{2456} \\ \omega_4^{1236} & 0 & 0 & \omega_4^{2346} & \omega_4^{2356} & 0 \\ -\omega_4^{1235} & 0 & 0 & -\omega_4^{2345} & 0 & \omega_4^{2356} \\ \omega_4^{1234} & 0 & 0 & 0 & -\omega_4^{2345} & -\omega_4^{2346} \\ 0 & \omega_4^{1256} & \omega_4^{1356} & \omega_4^{1456} & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_4^{1246} & -\omega_4^{1346} & 0 & \omega_4^{1456} & 0 \\ 0 & \omega_4^{1245} & \omega_4^{1345} & 0 & 0 & \omega_4^{1456} \\ 0 & \omega_4^{1236} & 0 & -\omega_4^{1346} & -\omega_4^{1356} & 0 \\ 0 & -\omega_4^{1235} & 0 & \omega_4^{1345} & 0 & -\omega_4^{1356} \\ 0 & \omega_4^{1234} & 0 & 0 & \omega_4^{1345} & \omega_4^{1346} \\ 0 & 0 & \omega_4^{1236} & \omega_4^{1246} & \omega_4^{1256} & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_4^{1235} & -\omega_4^{1245} & 0 & \omega_4^{1256} \\ 0 & 0 & \omega_4^{1234} & 0 & -\omega_4^{1245} & -\omega_4^{1246} \\ 0 & 0 & 0 & \omega_4^{1234} & \omega_4^{1235} & \omega_4^{1236} \end{pmatrix} \text{ et on a :}$$

$$[\varphi_{\omega_4}] [\psi_{\omega_4}]^t = \begin{pmatrix} (3) & (5) & (6) & 0 & (8) & (9) & 0 & (10) & 0 & 0 & (12) & (13) & 0 & (14) & 0 & 0 & (15) & 0 & 0 & 0 \\ -(2) & -(4) & 0 & (6) & -(7) & 0 & (9) & 0 & (10) & 0 & -(11) & 0 & (13) & (0) & (14) & 0 & 0 & (15) & 0 & 0 \\ (1) & 0 & -(4) & -(5) & 0 & -(7) & -(8) & 0 & (10) & 0 & 0 & -(11) & -(12) & (0) & (0) & (14) & 0 & (15) & 0 \\ 0 & (1) & (2) & (3) & 0 & 0 & 0 & -(7) & -(8) & -(9) & 0 & 0 & 0 & -(11) & -(12) & -(13) & 0 & 0 & (15) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(11) & -(12) & -(13) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) & (8) & (9) & (10) \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} (1) &= \omega_4^{3456} \omega_4^{1256} - \omega_4^{2456} \omega_4^{1356} + \omega_4^{2356} \omega_4^{1456}, \\ (2) &= -\omega_4^{3456} \omega_4^{1246} + \omega_4^{2456} \omega_4^{1346} - \omega_4^{2346} \omega_4^{1456}, \\ (3) &= \omega_4^{3456} \omega_4^{1245} - \omega_4^{2456} \omega_4^{1345} + \omega_4^{2345} \omega_4^{1456}, \\ (4) &= \omega_4^{3456} \omega_4^{1236} - \omega_4^{2356} \omega_4^{1346} + \omega_4^{2346} \omega_4^{1356}, \\ (5) &= -\omega_4^{3456} \omega_4^{1235} + \omega_4^{2356} \omega_4^{1345} - \omega_4^{2345} \omega_4^{1356}, \\ (6) &= \omega_4^{3456} \omega_4^{1234} - \omega_4^{2346} \omega_4^{1345} + \omega_4^{2345} \omega_4^{1346}, \\ (7) &= -\omega_4^{2456} \omega_4^{1236} + \omega_4^{2356} \omega_4^{1246} - \omega_4^{2346} \omega_4^{1256}, \\ (8) &= \omega_4^{2456} \omega_4^{1235} - \omega_4^{2356} \omega_4^{1245} + \omega_4^{2345} \omega_4^{1256}, \\ (9) &= -\omega_4^{2456} \omega_4^{1234} + \omega_4^{2346} \omega_4^{1245} - \omega_4^{2345} \omega_4^{1246}, \\ (10) &= \omega_4^{2356} \omega_4^{1234} - \omega_4^{2346} \omega_4^{1235} + \omega_4^{2345} \omega_4^{1236}, \\ (11) &= \omega_4^{1456} \omega_4^{1236} - \omega_4^{1366} \omega_4^{1246} + \omega_4^{1346} \omega_4^{1256}, \\ (12) &= -\omega_4^{1456} \omega_4^{1235} + \omega_4^{1356} \omega_4^{1245} - \omega_4^{1345} \omega_4^{1256}, \\ (13) &= \omega_4^{1456} \omega_4^{1234} - \omega_4^{1346} \omega_4^{1245} + \omega_4^{1345} \omega_4^{1246}, \\ (14) &= -\omega_4^{1356} \omega_4^{1234} + \omega_4^{1346} \omega_4^{1235} - \omega_4^{1345} \omega_4^{1236}, \end{aligned}$$

$(15) = \omega_4^{1256} \omega_4^{1234} - \omega_4^{1246} \omega_4^{1235} + \omega_4^{1245} \omega_4^{1236}$ . Alors :

il y a donc 15 relations de Plücker :  $(1) = 0, (2) = 0, \dots, (15) = 0$  et elles sont indépendantes (nrp  $G(4, 6) = 15$ ).

Nombre de relations de Plücker indépendantes : nrpi  $G(4, 6) = 15$  [32].

**Symboles de Schubert** Il y a 15 symboles de Schubert :

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 2, 3, 4), & \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 2, 3, 5), \\ \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 2, 3, 6), & \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 2, 4, 5), \\ \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 2, 4, 6), & \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 2, 5, 6), \\ \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 3, 4, 5), & \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 3, 4, 6), \\ \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 3, 5, 6), & \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 4, 5, 6), \\ \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4) = (2, 3, 4, 5), & \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4) = (2, 3, 4, 6), \\ \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4) = (2, 3, 5, 6), & \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4) = (2, 4, 5, 6), \\ \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4) = (3, 4, 5, 6). \end{aligned}$$

Pour chaque symbole de Schubert on en déduit :

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4) = (j_1 - 1, j_2 - 2, j_3 - 3, j_4 - 4),$$

$$|\mathbf{a}| = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = j_1 + j_2 + j_3 + j_4 - 10,$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (3 - j_1, 4 - j_2, 5 - j_3, 6 - j_4) \text{ et}$$

$$|\boldsymbol{\lambda}| = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 18 - j_1 - j_2 - j_3 - j_4. \text{ Donc :}$$

- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3, 4)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 0, 0)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 2, 2)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 8$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 0, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 2, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 7$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 0, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 2, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 6$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 4, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 1, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 6$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 4, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 1, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 1, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 5$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 5, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 2, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 3, 4, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 1, 1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1, 1, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 5$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 3, 4, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 1, 1, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1, 1, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 3, 5, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 1, 2, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 4, 5, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 2, 2, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 0, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 3, 4, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 3, 4, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 3, 5, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 1, 2, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ ,



- si  $\mathbf{j} = (2, 4, 5, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 2, 2, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 1$ ,
- si  $\mathbf{j} = (3, 4, 5, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (2, 2, 2, 2)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 0$ .

**Cellules de Schubert** Il y a 15 cellules de Schubert  $\mathcal{C}_{(j_1, j_2, j_3, j_4)}$  ou  $\Omega_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)}$ .

• si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3, 4)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 2, 2)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,3,4)}$  ou  $\Omega_{(2,2,2,2)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,3,4)} = \dim \Omega_{(2,2,2,2)} = 0,$$

• si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 2, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,3,5)}$  ou  $\Omega_{(2,2,2,1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,3,5)} = \dim \Omega_{(2,2,2,1)} = 1,$$

• si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 2, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,3,6)}$  ou  $\Omega_{(2,2,2,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,3,6)} = \dim \Omega_{(2,2,2,0)} = 2,$$

• si  $\mathbf{j} = (1, 2, 4, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 1, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,4,5)}$  ou  $\Omega_{(2,2,1,1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,4,5)} = \dim \Omega_{(2,2,1,1)} = 2,$$

• si  $\mathbf{j} = (1, 2, 4, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 1, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,4,6)}$  ou  $\Omega_{(2,2,1,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,4,6)} = \dim \Omega_{(2,2,1,0)} = 3,$$

• si  $\mathbf{j} = (1, 2, 5, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 2, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,5,6)}$  ou  $\Omega_{(2,2,0,0)}$  a pour

représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,5,6)} = \dim \Omega_{(2,2,0,0)} = 4,$$

• si  $\mathbf{j} = (1, 3, 4, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1, 1, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(1,3,4,5)}$  ou  $\Omega_{(2,1,1,1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,3,4,5)} = \dim \Omega_{(2,1,1,1)} = 3,$$

• si  $\mathbf{j} = (1, 3, 4, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1, 1, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,3,4,6)}$  ou  $\Omega_{(2,1,1,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,3,4,6)} = \dim \Omega_{(2,1,1,0)} = 4,$$

• si  $\mathbf{j} = (1, 3, 5, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 1, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,3,5,6)}$  ou  $\Omega_{(2,1,0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 1 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,3,5,6)} = \dim \Omega_{(2,1,0,0)} = 5,$$

• si  $\mathbf{j} = (1, 4, 5, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (2, 0, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,4,5,6)}$  ou  $\Omega_{(2,0,0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 1 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,4,5,6)} = \dim \Omega_{(2,0,0,0)} = 6,$$

• si  $\mathbf{j} = (2, 3, 4, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(2,3,4,5)}$  ou  $\Omega_{(1,1,1,1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2,3,4,5)} = \dim \Omega_{(1,1,1,1)} = 4,$$

• si  $\mathbf{j} = (2, 3, 4, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(2,3,4,6)}$  ou  $\Omega_{(1,1,1,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2,3,4,6)} = \dim \Omega_{(1,1,1,0)} = 5,$$

• si  $\mathbf{j} = (2, 3, 5, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(2,3,5,6)}$  ou  $\Omega_{(1,1,0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & * & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2,3,5,6)} = \dim \Omega_{(1,1,0,0)} = 6,$$

• si  $\mathbf{j} = (2, 4, 5, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(2,4,5,6)}$  ou  $\Omega_{(1,0,0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2,4,5,6)} = \dim \Omega_{(1,0,0,0)} = 7,$$

• si  $\mathbf{j} = (3, 4, 5, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(3,4,5,6)}$  ou  $\Omega_{(0,0,0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 1 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(3,4,5,6)} = \dim \Omega_{(0,0,0,0)} = 8.$$

$\sum \dim \mathcal{C}_{(j_1, j_2, j_3, j_4)} = \sum \dim \Omega_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)} = \sum |\mathbf{a}| = 60 > \dim G(4, 6) = 8$ .  
Donc les cellules de Schubert ne sont pas disjointes.

**Complément** : coordonnées de Plücker avec les coordonnées affines :

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & g_1^5 & g_1^6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & g_2^5 & g_2^6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & g_3^5 & g_3^6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & g_4^5 & g_4^6 \end{pmatrix}. \text{ On a : } \varpi_4^{1234} = 1, \varpi_4^{1235} = g_4^5, \varpi_4^{1236} = g_4^6,$$

$$\varpi_4^{1245} = -g_3^5, \varpi_4^{1246} = -g_3^6, \varpi_4^{1256} = g_3^5 g_4^6 - g_4^5 g_3^6, \varpi_4^{1345} = g_2^5, \varpi_4^{1346} = g_2^6,$$

$$\varpi_4^{1356} = -g_2^5 g_4^6 + g_4^5 g_2^6, \varpi_4^{1456} = g_2^5 g_3^6 - g_3^5 g_2^6, \varpi_4^{2345} = -g_1^5, \varpi_4^{2346} = -g_1^6,$$

$$\varpi_4^{2356} = g_1^5 g_4^6 - g_4^5 g_1^6, \varpi_4^{2456} = -g_1^5 g_3^6 + g_3^5 g_1^6, \varpi_4^{3456} = g_1^5 g_2^6 - g_2^5 g_1^6.$$

### 6.4.3 La grassmannienne $G(5, 6)$

La grassmannienne  $G(5, 6)$  est duale de la grassmannienne  $G(1, 6)$ .

Coordonnées de Plücker :  $\omega_5^{12345}$ ,  $\omega_5^{12346}$ ,  $\omega_5^{12356}$ ,  $\omega_5^{12456}$ ,  $\omega_5^{13456}$ ,  $\omega_5^{23456}$ .

Matrice  $[\varphi_{\omega_5}]$  de dimension  $1 \times 6$  :

$$[\varphi_{\omega_5}] = \left( -\omega_5^{23456} \quad \omega_5^{13456} \quad -\omega_5^{12456} \quad -\omega_5^{12356} \quad -\omega_5^{12346} \quad \omega_5^{12345} \right) \text{ et :}$$

matrice  $[\psi_{\omega_5}]$  de dimension  $15 \times 6$  :

$$[\psi_{\omega_5}] = \begin{pmatrix} -\omega_5^{13456} & -\omega_5^{23456} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_5^{12456} & 0 & -\omega_5^{23456} & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_5^{12356} & 0 & 0 & -\omega_5^{23456} & 0 & 0 \\ \omega_5^{12346} & 0 & 0 & 0 & -\omega_5^{23456} & 0 \\ -\omega_5^{12345} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_5^{23456} \\ 0 & \omega_5^{12456} & \omega_5^{13456} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_5^{12356} & 0 & \omega_5^{13456} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_5^{12346} & 0 & 0 & \omega_5^{13456} & 0 \\ 0 & -\omega_5^{12345} & 0 & 0 & 0 & \omega_5^{13456} \\ 0 & 0 & -\omega_5^{12356} & -\omega_5^{12456} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_5^{12346} & 0 & -\omega_5^{12456} & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_5^{12345} & 0 & 0 & -\omega_5^{12456} \\ 0 & 0 & 0 & \omega_5^{12346} & \omega_5^{12356} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_5^{12345} & 0 & \omega_5^{12356} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_5^{12345} & -\omega_5^{12346} \end{pmatrix} \text{ et}$$

on a :

$[\varphi_{\omega_4}] [\psi_{\omega_4}]^t \equiv (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ , ce qui ne donne aucune relation de Plücker (nrp  $G(5, 6) = 0$ ).

Nombre de relations de Plücker indépendantes : nrpi  $G(5, 6) = 0$ .

**Symboles de Schubert** Il y a 6 symboles de Schubert :

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4, j_5) = (1, 2, 3, 4, 5), \\ \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4, j_5) = (1, 2, 3, 4, 6), \\ \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4, j_5) = (1, 2, 3, 5, 6), \\ \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4, j_5) = (1, 2, 4, 5, 6), \\ \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4, j_5) = (1, 3, 4, 5, 6), \\ \mathbf{j} &= (j_1, j_2, j_3, j_4, j_5) = (2, 3, 4, 5, 6). \end{aligned}$$

Pour chaque symbole de Schubert on en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (j_1 - 1, j_2 - 2, j_3 - 3, j_4 - 4, j_5 - 5), \\ |\mathbf{a}| &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + j_5 - 15, \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = (2 - j_1, 3 - j_2, 4 - j_3, 5 - j_4, 6 - j_5)$  et  
 $|\boldsymbol{\lambda}| = 20 - j_1 - j_2 - j_3 - j_4 - j_5$ . Donc :

- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3, 4, 5)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 0, 0, 0)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1, 1, 1)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 5$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3, 4, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 0, 0, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1, 1, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 4$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3, 5, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 0, 1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 3$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 2, 4, 5, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 0, 1, 1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 0, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 2$ ,
- si  $\mathbf{j} = (1, 3, 4, 5, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (0, 1, 1, 1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0, 0, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 1$ ,
- si  $\mathbf{j} = (2, 3, 4, 5, 6)$  on a  $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0, 0, 0, 0)$  et  $|\boldsymbol{\lambda}| = 0$ .

**Cellules de Schubert** Il y a 6 cellules de Schubert  $\mathcal{C}_{(j_1, j_2, j_3, j_4, j_5)}$  ou  $\Omega_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)}$ .

• si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3, 4, 5)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1, 1, 1)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,3,4,5)}$  ou  $\Omega_{(1,1,1,1,1)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,3,4,5)} = \dim \Omega_{(1,1,1,1,1)} = 0,$$

• si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3, 4, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1, 1, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,3,4,6)}$  ou  $\Omega_{(1,1,1,1,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,3,4,6)} = \dim \Omega_{(1,1,1,1,0)} = 1,$$

• si  $\mathbf{j} = (1, 2, 3, 5, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 1, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,3,5,6)}$  ou  $\Omega_{(1,1,1,0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,3,5,6)} = \dim \Omega_{(1,1,1,0,0)} = 2,$$

• si  $\mathbf{j} = (1, 2, 4, 5, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 1, 0, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,2,4,5,6)}$  ou  $\Omega_{(1,1,0,0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,2,4,5,6)} = \dim \Omega_{(1,1,0,0,0)} = 3,$$

• si  $\mathbf{j} = (1, 3, 4, 5, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0, 0, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(1,3,4,5,6)}$  ou  $\Omega_{(1,0,0,0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(1,3,4,5,6)} = \dim \Omega_{(1,0,0,0,0)} = 4,$$

• si  $\mathbf{j} = (2, 3, 4, 5, 6)$  ou  $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0, 0, 0, 0)$  :  $\mathcal{C}_{(2,3,4,5,6)}$  ou  $\Omega_{(0,0,0,0,0)}$  a pour représentant :

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \mathcal{C}_{(2,3,4,5,6)} = \dim \Omega_{(0,0,0,0,0)} = 5.$$

$\sum \dim \mathcal{C}_{(j_1, j_2, j_3, j_4, j_5)} = \sum \dim \Omega_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)} = \sum |\mathbf{a}| = 15 > \dim G(5, 6) = 5$ .  
Donc les cellules de Schubert ne sont pas disjointes.

**Complément** : coordonnées de Plücker avec les coordonnées affines :

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_1^6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & g_2^6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & g_3^6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & g_4^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & g_5^6 \end{pmatrix}. \text{ On a : } \varpi_5^{12345} = 1, \varpi_5^{12346} = g_5^6,$$

$$\varpi_5^{12356} = -g_4^6, \varpi_5^{12456} = g_3^6, \varpi_5^{13456} = -g_2^6, \varpi_5^{23456} = g_1^6.$$

## 6.5 La grassmannienne $G(n - 1, n)$

$C_n^{n-1} = n$  et  $N = n - 1$ .

$G(n - 1, n) \cong \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{K})$ .

Voir  $G(1, 2)$ ,  $G(2, 3)$ ,  $G(3, 4)$ ,  $G(4, 5)$ ,  $G(5, 6)$  ci-devant.

## 7 Remarque

$\text{nrpi } G(n - k, n) = \text{nrpi } G(k, n)$ ; par exemple :

$\text{nrpi } G(2, 3) = \text{nrpi } G(1, 3) = 0$ ,  $\text{nrpi } G(3, 4) = \text{nrpi } G(1, 4) = 0$ ,

$\text{nrpi } G(4, 5) = \text{nrpi } G(1, 5) = 0$ ,  $\text{nrpi } G(3, 5) = \text{nrpi } G(2, 5) = 5$ ,

$\text{nrpi } G(5, 6) = \text{nrpi } G(1, 6) = 0$ ,  $\text{nrpi } G(4, 6) = \text{nrpi } G(2, 6) = 15, \dots$

## Annexe : un exemple de calcul de produit de cycles de Schubert

Soient  $\lambda = (2, 1, 1)$  et  $\mu = (3, 2, 1)$ .

**A : calcul de  $\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \sigma_{(2,1,1)} \cdot \sigma_{(3,2,1)} \in H^*(G(6, 11), \mathbb{Z})$ .**

### 1 - Utilisation de la formule de Giambelli pour calculer

$$\sigma_\lambda = \sigma_{(2,1,1)}$$

$$\sigma_{(2,1,1)} = \begin{vmatrix} \sigma_{(2)} & \sigma_{(3)} & \sigma_{(4)} \\ 1 & \sigma_{(1)} & \sigma_{(2)} \\ 0 & 1 & \sigma_{(1)} \end{vmatrix} = \sigma_{(1)}^2 \cdot \sigma_{(2)} - \sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(3)} - \sigma_{(2)}^2 + \sigma_{(4)}.$$

### 2 - Donc :

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu &= \sigma_{(2,1,1)} \cdot \sigma_{(3,2,1)} = (\sigma_{(1)}^2 \cdot \sigma_{(2)} - \sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(3)} - \sigma_{(2)}^2 + \sigma_{(4)}) \cdot \sigma_{(3,2,1)} \\ &= \sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3,2,1)})) - \sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(3)} \cdot \sigma_{(3,2,1)}) - \sigma_{(2)} \cdot (\sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3,2,1)}) + \sigma_{(4)} \cdot \sigma_{(3,2,1)}. \end{aligned}$$

Et on va utiliser la formule de Pieri pour calculer :

**2.1**  $\sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3,2,1)}$ , avec  $|\nu| = 8$

**2.2**  $\sigma_{(3)} \cdot \sigma_{(3,2,1)}$ , avec  $|\nu| = 9$

**2.3**  $\sigma_{(4)} \cdot \sigma_{(3,2,1)}$ , avec  $|\nu| = 10$

**2.4**  $\sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3,2,1)})$ , avec  $|\nu| = 9$

**2.5**  $\sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(3)} \cdot \sigma_{(3,2,1)})$ , avec  $|\nu| = 10$

**2.6**  $\sigma_{(2)} \cdot (\sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3,2,1)})$ , avec  $|\nu| = 10$

**2.7**  $\sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3,2,1)}))$ , avec  $|\nu| = 10$ .

**On trouve, tous calculs faits :**

**2.1**  $\sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3,2,1)} = \sigma_{(5,2,1)} + \sigma_{(4,3,1)} + \sigma_{(4,2,2)} + \sigma_{(4,2,1,1)} + \sigma_{(3,3,2)} + \sigma_{(3,3,1,1)} + \sigma_{(3,2,2,1)}$

**2.2**  $\sigma_{(3)} \cdot \sigma_{(3,2,1)} = \sigma_{(6,2,1)} + \sigma_{(5,3,1)} + \sigma_{(5,2,2)} + \sigma_{(5,2,1,1)} + \sigma_{(4,3,2)} + \sigma_{(4,3,1,1)} + \sigma_{(4,2,2,1)} + \sigma_{(3,3,2,1)}$

**2.3**  $\sigma_{(4)} \cdot \sigma_{(3,2,1)} = \sigma_{(7,2,1)} + \sigma_{(6,3,1)} + \sigma_{(6,2,2)} + \sigma_{(6,2,1,1)} + \sigma_{(5,3,2)} + \sigma_{(5,3,1,1)} + \sigma_{(5,2,2,1)} + \sigma_{(4,3,2,1)}$

**2.4**  $\sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3,2,1)}) = \sigma_{(6,2,1)} + 2\sigma_{(5,3,1)} + 2\sigma_{(5,2,2)} + 2\sigma_{(5,2,1,1)} + \sigma_{(4,4,1)} + 3\sigma_{(4,3,2)} + 3\sigma_{(4,3,1,1)} + 3\sigma_{(4,2,2,1)} + \sigma_{(4,2,1,1,1)} + \sigma_{(3,3,3)} + 3\sigma_{(3,3,2,1)} + \sigma_{(3,3,1,1,1)} + \sigma_{(3,2,2,2)} + \sigma_{(3,2,2,1,1)}$ ,

**2.5**  $\sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(3)} \cdot \sigma_{(3,2,1)}) = \sigma_{(7,2,1)} + 2\sigma_{(6,3,1)} + 2\sigma_{(6,2,2)} + 2\sigma_{(6,2,1,1)} + \sigma_{(5,4,1)} + 3\sigma_{(5,3,2)} + 3\sigma_{(5,3,1,1)} + 3\sigma_{(5,2,2,1)} + \sigma_{(5,2,1,1,1)} + \sigma_{(4,4,2)} + \sigma_{(4,4,1,1)} + \sigma_{(4,3,3)} + 4\sigma_{(4,3,2,1)} + \sigma_{(4,3,1,1,1)} + \sigma_{(4,2,2,2)} + \sigma_{(4,2,2,1,1)} + \sigma_{(3,3,3,1)} + \sigma_{(3,3,2,2)} + \sigma_{(3,3,2,1,1)}$



$$\begin{aligned}
\mathbf{2.6} \quad \sigma_{(2)} \cdot (\sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3,2,1)}) &= \sigma_{(7,2,1)} + 2\sigma_{(6,3,1)} + 2\sigma_{(6,2,2)} + 2\sigma_{(6,2,1,1)} + 2\sigma_{(5,4,1)} \\
&+ 4\sigma_{(5,3,2)} + 4\sigma_{(5,3,1,1)} + 4\sigma_{(5,2,2,1)} + \sigma_{(5,2,1,1,1)} + 2\sigma_{(4,4,2)} + 2\sigma_{(4,4,1,1)} \\
&+ 2\sigma_{(4,3,3)} + 6\sigma_{(4,3,2,1)} + 2\sigma_{(4,3,1,1,1)} + 2\sigma_{(4,2,2,2)} + 2\sigma_{(4,2,2,1,1)} + 2\sigma_{(3,3,3,1)} \\
&+ 2\sigma_{(3,3,2,2)} + 2\sigma_{(3,3,2,1,1)} + \sigma_{(3,2,2,2,1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{2.7} \quad \sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3,2,1)})) &= \sigma_{(7,2,1)} + 3\sigma_{(6,3,1)} + 3\sigma_{(6,2,2)} + 3\sigma_{(6,2,1,1)} \\
&+ 3\sigma_{(5,4,1)} + 7\sigma_{(5,3,2)} + 7\sigma_{(5,3,1,1)} + 7\sigma_{(5,2,2,1)} + 3\sigma_{(5,2,1,1,1)} + 4\sigma_{(4,4,2)} \\
&+ 4\sigma_{(4,4,1,1)} + 4\sigma_{(4,3,3)} + 12\sigma_{(4,3,2,1)} + 5\sigma_{(4,3,1,1,1)} + 4\sigma_{(4,2,2,2)} + 5\sigma_{(4,2,2,1,1)} \\
&+ \sigma_{(4,2,1,1,1,1)} + 4\sigma_{(3,3,3,1)} + 4\sigma_{(3,3,2,2)} + 5\sigma_{(3,3,2,1,1)} + \sigma_{(3,3,1,1,1,1)} + 2\sigma_{(3,2,2,2,1)} \\
&+ \sigma_{(3,2,2,1,1,1)}.
\end{aligned}$$

### 3 - Finalement :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\lambda} \cdot \sigma_{\mu} &= \sigma_{(2,1,1)} \cdot \sigma_{(3,2,1)} \\
&= \sigma_{(5,3,2)} + \sigma_{(5,3,1,1)} + \sigma_{(5,2,2,1)} + \sigma_{(5,2,1,1,1)} + \sigma_{(4,4,2)} + \sigma_{(4,4,1,1)} + \sigma_{(4,3,3)} \\
&+ 3\sigma_{(4,3,2,1)} + 2\sigma_{(4,3,1,1,1)} + \sigma_{(4,2,2,2)} + 2\sigma_{(4,2,2,1,1)} + \sigma_{(4,2,1,1,1,1)} + \sigma_{(3,3,3,1)} \\
&+ \sigma_{(3,3,2,2)} + 2\sigma_{(3,3,2,1,1)} + \sigma_{(3,3,1,1,1,1)} + \sigma_{(3,2,2,2,1)} + \sigma_{(3,2,2,1,1,1)}
\end{aligned}$$

### 4 - Utilisation des coefficients $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$ de Littlewood-Richardson

On a  $\sigma_{\lambda} \cdot \sigma_{\mu} = \sum_{\nu} c_{\lambda, \mu}^{\nu} \sigma_{\nu}$ , avec :  $|\nu| = |\lambda| + |\mu| = 10$  et le calcul de  $\sigma_{\lambda} \cdot \sigma_{\mu}$  est ramené à celui des coefficients de Littlewood-Richardson  $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$ .

Comme  $\lambda = (2, 1, 1)$  et  $\mu = (3, 2, 1)$  on remplace  $\lambda$  par son diagramme de Young, également noté  $\lambda$  :

$$\begin{array}{c}
* \quad * \\
\lambda : * \quad \text{et } \mu \text{ par le tableau de Young, également noté } \mu : \\
*
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1 \quad 1 \quad 1 \\
\mu : 2 \quad 2 \quad , \text{ avec trois fois 1 sur la première ligne car } \mu_1 = 3, \text{ deux fois} \\
3 \\
2 \text{ sur le deuxième ligne car } \mu_2 = 2 \text{ et une fois 3 sur le troisième ligne car} \\
\mu_3 = 1.
\end{array}$$

Les  $\mu$ -extensions de  $\lambda$  sont obtenues en bordant à droite les lignes du diagramme de Young de  $\lambda$  par les 6 chiffres  $(1, 1, 1, 2, 2, 3)$  du tableau de Young de  $\mu$ .

Par exemple :

$$\begin{array}{c}
* \quad * \quad 1 \quad 1 \\
* \quad 1 \quad 2 \\
* \quad 3 \\
2
\end{array}
\quad \text{est une } \mu\text{-extension de de } \lambda \text{ de forme } \lambda = (4, 3, 2, 1) \text{ car}$$

4 est le nombre d'éléments de la première ligne, 3 de la deuxième, 2 de la troisième et 1 de la quatrième.

Le *mot* de l'extension précédente est  $(1, 1, 2, 1, 3, 2)$  et c'est un *mot de réseau* et la  $\mu$ -extension de  $\lambda$  précédente est stricte.

Finalement on obtient les 23 extensions strictes suivantes :

**Une de forme  $(5, 3, 2)$**

\* \* 1 1 1  
 \* 2 2 , de *mot de réseau*  $(1, 1, 1, 2, 2, 3)$   
 \* 3

Donc  $c_{(2,1,1),(3,2,1)}^{(5,3,2)} = 1$

**Une de forme  $(5, 3, 1, 1)$**

\* \* 1 1 1  
 \* 2 2 , de *mot de réseau*  $(1, 1, 1, 2, 2, 3)$   
 \*  
 3

Donc  $c_{(2,1,1),(3,2,1)}^{(5,3,1,1)} = 1$

**Une de forme  $(5, 2, 2, 1)$**

\* \* 1 1 1  
 \* 2  
 \* 3 , de *mot de réseau*  $(1, 1, 1, 2, 3, 2)$   
 2

Donc  $c_{(2,1,1),(3,2,1)}^{(5,2,2,1)} = 1$

**Une de forme  $(5, 2, 1, 1, 1)$**

\* \* 1 1 1  
 \* 2  
 \* , de *mot de réseau*  $(1, 1, 1, 2, 2, 3)$   
 2  
 3

Donc  $c_{(2,1,1),(3,2,1)}^{(5,2,1,1,1)} = 1$

**Une de forme  $(4, 4, 2)$**

\* \* 1 1  
 \* 1 2 2 , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 2, 1, 3)  
 \* 3

Donc  $c_{(2,1,1),(3,2,1)}^{(4,4,2)} = 1$

**Une de forme (4, 4, 1, 1)**

\* \* 1 1  
 \* 1 2 2 , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 2, 1, 3)  
 \*  
 3

Donc  $c_{(2,1,1),(3,2,1)}^{(4,4,1,1)} = 1$

**Une de forme (4, 3, 3)**

\* \* 1 1  
 \* 1 2 , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 1, 3, 2)  
 \* 2 3

Donc  $c_{(2,1,1),(3,2,1)}^{(4,3,3)} = 1$

**Trois de forme (4, 3, 2, 1)**

\* \* 1 1  
 \* 1 2 , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 1, 2, 3),  
 \* 2  
 3  
 \* \* 1 1  
 \* 1 2 , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 1, 3, 2),  
 \* 3  
 2  
 \* \* 1 1  
 \* 2 2 , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 2, 3, 1)  
 \* 3  
 1

Donc  $c_{(2,1,1),(3,2,1)}^{(4,3,2,1)} = 3$

**Deux de forme (4, 3, 1, 1, 1)**

\* \* 1 1  
 \* 1 2  
 \* , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 1, 2, 3),  
 2  
 3  
 \* \* 1 1  
 \* 2 2  
 \* , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 2, 1, 3)  
 1  
 3

Donc  $c_{(2,1,1),(3,2,1)}^{(4,3,1,1,1)} = 2$

**Une de forme (4, 2, 2, 2)**

\* \* 1 1  
 \* 1  
 \* 2 , de *mot de réseau* (1, 1, 1, 2, 3, 2)  
 2 3

Donc  $c_{(2,1,1),(3,2,1)}^{(4,2,2,2)} = 1$

**Deux de forme (4, 2, 2, 1, 1)**

\* \* 1 1  
 \* 1  
 \* 2 , de *mot de réseau* (1, 1, 1, 2, 2, 3),  
 2  
 3  
 \* \* 1 1  
 \* 2  
 \* 3 , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 3, 1, 2)  
 1  
 2

Donc  $c_{(2,1,1),(3,2,1)}^{(4,2,2,1,1)} = 2$

**Une de forme (4, 2, 1, 1, 1, 1)**

\* \* 1 1  
 \* 2  
 \* , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 1, 2, 3)  
 1  
 2  
 3

Donc  $c_{(2,1,1),(3,2,1)}^{(4,2,1,1,1,1)} = 1$

**Une de forme (3, 3, 3, 1)**

\* \* 1  
\* 1 2  
\* 2 3 , de *mot de réseau* (1, 2, 1, 3, 2, 1)  
1

Donc  $c_{(2,1,1),(3,2,1)}^{(3,3,3,1)} = 1$

**Une de forme (3, 3, 2, 2)**

\* \* 1  
\* 1 2  
\* 2 , de *mot de réseau* (1, 2, 1, 2, 3, 1)  
1 3

Donc  $c_{(2,1,1),(3,2,1)}^{(3,3,2,2)} = 1$

**Deux de forme (3, 3, 2, 1, 1)**

\* \* 1  
\* 1 2  
\* 2 , de *mot de réseau* (1, 2, 1, 2, 1, 3),  
1  
3  
\* \* 1  
\* 1 2  
\* 3 , de *mot de réseau* (1, 2, 1, 3, 1, 2)  
1  
2

Donc  $c_{(2,1,1),(3,2,1)}^{(3,3,2,1,1)} = 2$

**Une de forme (3, 3, 1, 1, 1, 1)**

\* \* 1  
\* 1 2  
\* , de *mot de réseau* (1, 2, 1, 1, 2, 3)  
1  
2  
3

Donc  $c_{(2,1,1),(3,2,1)}^{(3,3,1,1,1,1)} = 1$

Une de forme **(3, 2, 2, 2, 1)**

\* \* 1  
 \* 1  
 \* 2 , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 3, 1, 2)  
 1 3  
 2

Donc  $c_{(2,1,1),(3,2,1)}^{(3,2,2,2,1)} = 1$

Une de forme **(3, 2, 2, 1, 1, 1)**

\* \* 1  
 \* 1  
 \* 2 , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 1, 2, 3)  
 1  
 2  
 3

Donc  $c_{(2,1,1),(3,2,1)}^{(3,2,2,1,1,1)} = 1$

Et donc on retrouve que :

$$\begin{aligned} & \sigma_{(2,1,1)} \cdot \sigma_{(3,2,1)} = \\ & \sigma_{(5,3,2)} + \sigma_{(5,3,1,1)} + \sigma_{(5,2,2,1)} + \sigma_{(5,2,1,1,1)} + \sigma_{(4,4,2)} + \sigma_{(4,4,1,1)} + \sigma_{(4,3,3)} \\ & + 3\sigma_{(4,3,2,1)} + 2\sigma_{(4,3,1,1,1)} + \sigma_{(4,2,2,2)} + 2\sigma_{(4,2,2,1,1)} + \sigma_{(4,2,1,1,1,1)} + \sigma_{(3,3,3,1)} \\ & + \sigma_{(3,3,2,2)} + 2\sigma_{(3,3,2,1,1)} + \sigma_{(3,3,1,1,1,1)} + \sigma_{(3,2,2,2,1)} + \sigma_{(3,2,2,1,1,1)}. \end{aligned}$$



**B** : calcul de  $\sigma_\mu \cdot \sigma_\lambda = \sigma_{(3,2,1)} \cdot \sigma_{(2,1,1)} \in H^*(G(6, 11), \mathbb{Z})$ .

**1 - Utilisation de la formule de Giambelli pour calculer**

$$\sigma_\mu = \sigma_{(3,2,1)}$$

$$\sigma_{(3,2,1)} = \begin{vmatrix} \sigma_{(3)} & \sigma_{(4)} & \sigma_{(5)} \\ \sigma_{(1)} & \sigma_{(2)} & \sigma_{(3)} \\ 0 & 1 & \sigma_{(1)} \end{vmatrix} = -\sigma_{(1)}^2 \cdot \sigma_{(4)} + \sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3)} + \sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(5)} - \sigma_{(3)}^2.$$

**2 - Donc :**

$$\begin{aligned} \sigma_{(3,2,1)} \cdot \sigma_{(2,1,1)} &= (-\sigma_{(1)}^2 \cdot \sigma_{(4)} + \sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3)} + \sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(5)} - \sigma_{(3)}^2) \cdot \sigma_{(2,1,1)} \\ &= -\sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(4)} \cdot \sigma_{(2,1,1)})) + \sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(2)} \cdot (\sigma_{(3)} \cdot \sigma_{(2,1,1)})) + \sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(5)} \cdot \sigma_{(2,1,1)}) \\ &\quad - \sigma_{(3)} \cdot (\sigma_{(3)} \cdot \sigma_{(2,1,1)}) \end{aligned}$$

Et on va utiliser la formule de Pieri pour calculer :

**2.1**  $\sigma_{(3)} \cdot \sigma_{(2,1,1)}$  ; avec  $|\nu| = 7$

**2.2**  $\sigma_{(4)} \cdot \sigma_{(2,1,1)}$  ; avec  $|\nu| = 8$

**2.3**  $\sigma_{(5)} \cdot \sigma_{(2,1,1)}$  ; avec  $|\nu| = 9$

**2.4**  $\sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(4)} \cdot \sigma_{(2,1,1)})$  ; avec  $|\nu| = 9$

**2.5**  $\sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(5)} \cdot \sigma_{(2,1,1)})$  ; avec  $|\nu| = 10$

**2.6**  $\sigma_{(2)} \cdot (\sigma_{(3)} \cdot \sigma_{(2,1,1)})$  ; avec  $|\nu| = 9$

**2.7**  $\sigma_{(3)} \cdot (\sigma_{(3)} \cdot \sigma_{(2,1,1)})$  ; avec  $|\nu| = 10$

**2.8**  $\sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(4)} \cdot \sigma_{(2,1,1)}))$  ; avec  $|\nu| = 10$

**2.9**  $\sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(2)} \cdot (\sigma_{(3)} \cdot \sigma_{(2,1,1)}))$  ; avec  $|\nu| = 10$

**On trouve, tous calculs faits :**

**2.1**  $\sigma_{(3)} \cdot \sigma_{(2,1,1)} = \sigma_{(5,1,1)} + \sigma_{(4,2,1)} + \sigma_{(4,1,1,1)} + \sigma_{(3,2,1,1)}$

**2.2**  $\sigma_{(4)} \cdot \sigma_{(2,1,1)} = \sigma_{(6,1,1)} + \sigma_{(5,2,1)} + \sigma_{(5,1,1,1)} + \sigma_{(4,2,1,1)}$

**2.3**  $\sigma_{(5)} \cdot \sigma_{(2,1,1)} = \sigma_{(7,1,1)} + \sigma_{(6,2,1)} + \sigma_{(6,1,1,1)} + \sigma_{(5,2,1,1)}$

**2.4**  $\sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(4)} \cdot \sigma_{(2,1,1)}) = \sigma_{(7,1,1)} + 2\sigma_{(6,2,1)} + 2\sigma_{(6,1,1,1)} + \sigma_{(5,3,1)} + \sigma_{(5,2,2)}$   
 $+ 3\sigma_{(5,2,1,1)} + \sigma_{(5,1,1,1,1)} + \sigma_{(4,3,1,1)} + \sigma_{(4,2,2,1)} + \sigma_{(4,2,1,1,1)}$

**2.5**  $\sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(5)} \cdot \sigma_{(2,1,1)}) = \sigma_{(8,1,1)} + 2\sigma_{(7,2,1)} + 2\sigma_{(7,1,1,1)} + \sigma_{(6,3,1)} + \sigma_{(6,2,2)}$   
 $+ 3\sigma_{(6,2,1,1)} + \sigma_{(6,1,1,1,1)} + \sigma_{(5,3,1,1)} + \sigma_{(5,2,2,1)} + \sigma_{(5,2,1,1,1)}$

**2.6**  $\sigma_{(2)} \cdot (\sigma_{(3)} \cdot \sigma_{(2,1,1)}) = \sigma_{(7,1,1)} + 2\sigma_{(6,2,1)} + 2\sigma_{(6,1,1,1)} + 2\sigma_{(5,3,1)}$   
 $+ \sigma_{(5,2,2)} + 4\sigma_{(5,2,1,1)} + \sigma_{(5,1,1,1,1)} + \sigma_{(4,4,1)} + \sigma_{(4,3,2)} + 3\sigma_{(4,3,1,1)}$   
 $+ 2\sigma_{(4,2,2,1)} + 2\sigma_{(4,2,1,1,1)} + \sigma_{(3,3,2,1)} + \sigma_{(3,3,1,1,1)} + \sigma_{(3,2,2,1,1)}$

**2.7**  $\sigma_{(3)} \cdot (\sigma_{(3)} \cdot \sigma_{(2,1,1)}) = \sigma_{(8,1,1)} + 2\sigma_{(7,2,1)} + 2\sigma_{(7,1,1,1)} + 2\sigma_{(6,3,1)} + \sigma_{(6,2,2)}$   
 $+ 4\sigma_{(6,2,1,1)} + \sigma_{(6,1,1,1,1)} + 2\sigma_{(5,4,1)} + \sigma_{(5,3,2)} + 4\sigma_{(5,3,1,1)} + 2\sigma_{(5,2,2,1)}$   
 $+ 2\sigma_{(5,2,1,1,1)} + \sigma_{(4,4,2)} + 2\sigma_{(4,4,1,1)} + 2\sigma_{(4,3,2,1)} + 2\sigma_{(4,3,1,1,1)} + \sigma_{(4,2,2,1,1)}$   
 $+ \sigma_{(3,3,2,1,1)}$



$$\begin{aligned}
\mathbf{2.8} \quad & \sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(4)} \cdot \sigma_{(2,1,1)})) = \sigma_{(8,1,1)} + 3\sigma_{(7,2,1)} + 4\sigma_{(7,1,1,1)} + 3\sigma_{(6,3,1)} \\
& + 3\sigma_{(6,2,2)} + 8\sigma_{(6,2,1,1)} + 3\sigma_{(6,1,1,1,1)} + \sigma_{(5,4,1)} + 2\sigma_{(5,3,2)} + 6\sigma_{(5,3,1,1)} \\
& + 5\sigma_{(5,2,2,1)} + 5\sigma_{(5,2,1,1,1)} + \sigma_{(4,4,1,1)} + 2\sigma_{(4,3,2,1)} + 2\sigma_{(4,3,1,1,1)} + \sigma_{(4,2,2,2)} \\
& + 2\sigma_{(4,2,2,1,1)} + \sigma_{(4,2,1,1,1,1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{2.9} \quad & \sigma_{(1)} \cdot (\sigma_{(2)} \cdot (\sigma_{(3)} \cdot \sigma_{(2,1,1)})) = \sigma_{(8,1,1)} + 3\sigma_{(7,2,1)} + 4\sigma_{(7,1,1,1)} + 4\sigma_{(6,3,1)} \\
& + 3\sigma_{(6,2,2)} + 9\sigma_{(6,2,1,1)} + 3\sigma_{(6,1,1,1,1)} + 3\sigma_{(5,4,1)} + 4\sigma_{(5,3,2)} + 10\sigma_{(5,3,1,1)} \\
& + 7\sigma_{(5,2,2,1)} + 7\sigma_{(5,2,1,1,1)} + 2\sigma_{(4,4,2)} + 4\sigma_{(4,4,1,1)} + \sigma_{(4,3,3)} + 7\sigma_{(4,3,2,1)} \\
& + 6\sigma_{(4,3,1,1,1)} + 2\sigma_{(4,2,2,2)} + 5\sigma_{(4,2,2,1,1)} + 2\sigma_{(4,2,1,1,1,1)} + \sigma_{(3,3,3,1)} + \sigma_{(3,3,2,2)} \\
& + 3\sigma_{(3,3,2,1,1)} + \sigma_{(3,3,1,1,1,1)} + \sigma_{(3,2,2,2,1)} + \sigma_{(3,2,2,1,1,1)}
\end{aligned}$$

- **Finalement :**

$$\begin{aligned}
& \sigma_{\mu} \cdot \sigma_{\lambda} = \sigma_{(3,2,1)} \cdot \sigma_{(2,1,1)} \\
& = \sigma_{(5,3,2)} + \sigma_{(5,3,1,1)} + \sigma_{(5,2,2,1)} + \sigma_{(5,2,1,1,1)} + \sigma_{(4,4,2)} + \sigma_{(4,4,1,1)} + \sigma_{(4,3,3)} \\
& + 3\sigma_{(4,3,2,1)} + 2\sigma_{(4,3,1,1,1)} + \sigma_{(4,2,2,2)} + 2\sigma_{(4,2,2,1,1)} + \sigma_{(4,2,1,1,1,1)} + \sigma_{(3,3,3,1)} \\
& + \sigma_{(3,3,2,2)} + 2\sigma_{(3,3,2,1,1)} + \sigma_{(3,3,1,1,1,1)} + \sigma_{(3,2,2,2,1)} + \sigma_{(3,2,2,1,1,1)}
\end{aligned}$$

#### 4 - Utilisation des coefficients $c_{\mu,\lambda}^{\nu}$ de Littlewood-Richardson

On a  $\sigma_{\mu} \cdot \sigma_{\lambda} = \sum_{\nu} c_{\mu,\lambda}^{\nu} \sigma_{\nu}$ , avec :  $|\nu| = |\mu| + |\lambda| = 10$  et le calcul de  $\sigma_{\mu} \cdot \sigma_{\lambda}$  est ramené à celui des coefficients de Littlewood-Richardson  $c_{\mu,\lambda}^{\nu}$ .

Comme  $\mu = (3, 2, 1)$  et  $\lambda = (2, 1, 1)$  on remplace  $\mu$  par son diagramme de Young, également noté  $\mu$  :

$$\begin{array}{c}
* \quad * \quad * \\
\mu : * \quad * \quad \text{et } \lambda \text{ par le tableau de Young, également noté } \lambda : \\
*
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1 \quad 1 \\
\lambda : 2 \quad \quad , \text{ avec deux fois 1 sur la première ligne car } \lambda_1 = \mathbf{2}, \text{ une fois 2 sur} \\
3
\end{array}$$

le deuxième ligne car  $\lambda_2 = \mathbf{1}$  et une fois 3 sur le troisième ligne car  $\lambda_3 = \mathbf{1}$ .

Les  $\lambda$ -extensions de  $\mu$  sont obtenues en bordant à droite les lignes du diagramme de Young de  $\mu$  par les 4 chiffres (1, 1, 2, 3) du tableau de Young de  $\lambda$ .

On obtient les 23 extensions strictes suivantes :

**Une de forme (5, 3, 2)**

\* \* \* 1 1  
\* \* 2 , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 3)  
\* 3

Donc  $c_{(3,2,1),(2,1,1)}^{(5,3,2)} = 1$

**Une de forme (5, 3, 1, 1)**

\* \* \* 1 1  
\* \* 2 , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 3)  
\*  
3

Donc  $c_{(3,2,1),(2,1,1)}^{(5,3,1,1)} = 1$

**Une de forme (5, 2, 2, 1)**

\* \* \* 1 1  
\* \*  
\* 2 , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 3)  
3

Donc  $c_{(3,2,1),(2,1,1)}^{(5,2,2,1)} = 1$

**Une de forme (5, 2, 1, 1, 1)**

\* \* \* 1 1  
\* \*  
\* , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 3)  
2  
3

Donc  $c_{(3,2,1),(2,1,1)}^{(5,2,1,1,1)} = 1$

**Une de forme (4, 4, 2)**

\* \* \* 1  
\* \* 1 2 , de *mot de réseau* (1, 2, 1, 3)  
\* 3

Donc  $c_{(3,2,1),(2,1,1)}^{(4,4,2)} = 1$

**Une de forme (4, 4, 1, 1)**

\* \* \* 1  
 \* \* 1 2 , de *mot de réseau* (1, 2, 1, 3)  
 \*  
 3

Donc  $c_{(3,2,1),(2,1,1)}^{(4,4,1,1)} = 1$

**Une de forme (4, 3, 3)**

\* \* \* 1  
 \* \* 2 , de *mot de réseau* (1, 2, 3, 1)  
 \* 1 3

Donc  $c_{(3,2,1),(2,1,1)}^{(4,3,3)} = 1$

**Trois de forme (4, 3, 2, 1)**

\* \* \* 1  
 \* \* 1 , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 3),  
 \* 2  
 3

\* \* \* 1  
 \* \* 2 , de *mot de réseau* (1, 2, 1, 3),  
 \* 1  
 3

\* \* \* 1  
 \* \* 2 , de *mot de réseau* (1, 2, 3, 1)  
 \* 3  
 1

Donc  $c_{(3,2,1),(2,1,1)}^{(4,3,2,1)} = 3$

**Deux de forme (4, 3, 1, 1, 1)**

\* \* \* 1  
 \* \* 1 , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 3),  
 \*  
 2  
 3

\* \* \* 1  
 \* \* 2 , de *mot de réseau* (1, 2, 1, 3)  
 \*  
 1  
 3

Donc  $c_{(3,2,1),(2,1,1)}^{(4,3,1,1,1)} = 2$

**Une de forme (4, 2, 2, 2)**

\* \* \* 1  
\* \*  
\* 2 , de *mot de réseau* (1, 2, 3, 1)  
1 3

Donc  $c_{(3,2,1),(2,1,1)}^{(4,2,2,2)} = 1$

**Deux de forme (4, 2, 2, 1, 1)**

\* \* \* 1  
\* \*  
\* 1 , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 3),  
2  
3  
\* \* \* 1  
\* \*  
\* 2 , de *mot de réseau* (1, 2, 1, 3)  
1  
3

Donc  $c_{(3,2,1),(2,1,1)}^{(4,2,2,1,1)} = 2$

**Une de forme (4, 2, 1, 1, 1, 1)**

\* \* \* 1  
\* \*  
\* , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 3)  
1  
2  
3

Donc  $c_{(3,2,1),(2,1,1)}^{(4,2,1,1,1,1)} = 1$

**Une de forme (3, 3, 3, 1)**

\* \* \*  
\* \* 1  
\* 1 2 , de *mot de réseau* (1, 2, 1, 3)  
3

Donc  $c_{(3,2,1),(2,1,1)}^{(3,3,3,1)} = 1$

**Une de forme (3, 3, 2, 2)**

\* \* \*  
 \* \* 1  
 \* 2 , de *mot de réseau* (1, 2, 3, 1)  
 1 3

Donc  $c_{(3,2,1),(2,1,1)}^{(3,3,2,2)} = 1$

**Deux de forme (3, 3, 2, 1, 1)**

\* \* \*  
 \* \* 1  
 \* 1 , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 3),  
 2  
 3  
 \* \* \*  
 \* \* 1  
 \* 2 , de *mot de réseau* (1, 2, 1, 3)  
 1  
 3

Donc  $c_{(3,2,1),(2,1,1)}^{(3,3,2,1,1)} = 2$

**Une de forme (3, 3, 1, 1, 1, 1)**

\* \* \*  
 \* \* 1  
 \* , de *mot de réseau* (1, 1, 2, 3)  
 1  
 2  
 3

Donc  $c_{(3,2,1),(2,1,1)}^{(3,3,1,1,1,1)} = 1$

**Une de forme (3, 2, 2, 2, 1)**

\* \* \*  
 \* \*  
 \* 1 , de *mot de réseau* (1, 2, 1, 3)  
 1 2  
 3

Donc  $c_{(3,2,1),(2,1,1)}^{(3,2,2,2,1)} = 1$

**Une de forme (3, 2, 2, 1, 1, 1)**

\* \* \*  
 \* \*  
 \* 1 , de mot de réseau (1, 1, 2, 3)  
 1  
 2  
 3

Donc  $c_{(3,2,1),(2,1,1)}^{(3,2,2,1,1,1)} = 1$

Et donc on retrouve que :

$$\begin{aligned} & \sigma_{(3,2,1)} \cdot \sigma_{(2,1,1)} = \\ & \sigma_{(5,3,2)} + \sigma_{(5,3,1,1)} + \sigma_{(5,2,2,1)} + \sigma_{(5,2,1,1,1)} + \sigma_{(4,4,2)} + \sigma_{(4,4,1,1)} + \sigma_{(4,3,3)} \\ & + 3\sigma_{(4,3,2,1)} + 2\sigma_{(4,3,1,1,1)} + \sigma_{(4,2,2,2)} + 2\sigma_{(4,2,2,1,1)} + \sigma_{(4,2,1,1,1,1)} + \sigma_{(3,3,3,1)} \\ & + \sigma_{(3,3,2,2)} + 2\sigma_{(3,3,2,1,1)} + \sigma_{(3,3,1,1,1,1)} + \sigma_{(3,2,2,2,1)} + \sigma_{(3,2,2,1,1,1)}. \end{aligned}$$

**- 5 On constate que :**

$$\sigma_{(3,2,1)} \cdot \sigma_{(2,1,1)} = \sigma_{(2,1,1)} \cdot \sigma_{(3,2,1)}$$



## Références

- [1] D. Baralić *How to understand Grassmannians ?* The teaching of mathematics. Vol. XIV, 2, pp. 147-157. 2011.
- [2] S. Billey. *Introduction to affine Grassmannians*.  
<http://www.math.washington.edu/billey>.
- [3] A. Bouvier et M. George sous la direction de F. Le Lionnais. *Dictionnaire des mathématiques*. PUF. 1983.
- [4] E. Bullock. *MATH 465/565 : Grassmannians Notes*.  
[math465Grassmannians.pdf](#).
- [5] D. Bump. *Lie groups*. Graduate Texts in Mathematics GTM, vol. 225, the Jacobi-Trudy Identity, pp. 297-307. Springer. 2004.
- [6] F. Catanese. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants by I. M. Gelfand, M.M. Kapranov and A. V. Zelevinsky*. Birkhäuser. Boston. 1994. Bulletin (New Series) of the american mathematical society. Vol. 27. No. 2. pp. 183-198. 21 décembre 1999.
- [7] J. V. Chipalkatti. *Notes on Grassmannians and Schubert calculus*. Queen's papers in pure and applied mathematics. 2000.
- [8] I. Coskun. *Grassmannians : the first example of a moduli space*. MITOpenCourseWare. 2006.  
<http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Mathematics/18-727Spring-2006>.
- [9] M. Cretin. *Les relations de Plücker*. Préparation à l'agrégation de mathématiques. Université Claude Bernard. Lyon 1.
- [10] J. Dieudonné. *Cours de géométrie algébrique*. Tome 1. PUF. 1974.
- [11] J. Dieudonné. *Cours de géométrie algébrique*. Tome 2. PUF. 1974.
- [12] I. Dimitrić. *A note on equivariant embeddings of Grassmannians*. Publications de l'Institut Mathématique. Nouvelle série, tome 59 (73), pp. 131-137. 1996.
- [13] D. Eisenbud. *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*. Springer-Verlag New York, Inc. 1995.
- [14] W. Fulton. *Young tableaux*. London Mathematical Society Student Texts 35. Cambridge University Press. 1997. Bibliothèque de Mathématiques Université Paul Sabatier Toulouse-IMT. BM 17891.
- [15] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov et A.V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*. Birkhäuser Boston. 1994.
- [16] R. Godement. *Cours d'algèbre*. Enseignement des sciences. Hermann, Paris. 1966.



- [17] J. Harnad et E. Lee. *Symmetric polynomials, generalized Jacobi-Trudi identities and  $\tau$ -functions*. arXiv : 1304.0020v5 [math-ph]. 3à avril 2013.
- [18] J. Harris. *Algebraic geometry. A first course*. pp. 63-71. Lecture 6. Grassmannians and Related Varieties. Graduate Texts in Mathematics 133. Springer-Verlag New York, Inc. 1992.
- [19] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag New York, Inc. 1977.
- [20] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press. 2001. (13ème impression 2010).  
<http://www.math.cornell.edu/hatcher/>. 2001.
- [21] D. A. Hudec. *The Grassmannian as a Projective Variety*. University of Chicago. REU. 2007.
- [22] K. Hulek. *Elementary algebraic geometry*. Student mathematical library. Vol. 20. AMS. 2003.
- [23] A. Khetan. *Determinantal formula for the Chow form of a toric surface*. ISSAC 2002. Lille. France. 7-10 juillet 2002.
- [24] S.L. Kleiman et D. Laksov. *Schubert calculus*. The American Mathematical Monthly. Vol 79. No. 10. pp. 1061-1082. Décembre 1972.
- [25] D.E. Knuth. *Permutations, matrices and generalized Young tableaux*. Pacific Journal of Mathematics. Vol. 34. No. 3. pp. 709-727. 1970.
- [26] R. Kolhatkar. *Grassmann varieties*. Master of science. McGill university, Montréal, Québec, Canada. Août 2004.
- [27] A. Kresch. *Flag varieties and Schubert calculus*. Göttingen. 27-30 Juin 2005.
- [28] Lakshmibai et Gonciulea *Flag Varieties*. Hermann. 2001.
- [29] S. Lang. *Algebra. Third edition*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1993.
- [30] V. Ledoux et J.A. Malham. *Introductory Schubert calculus*. 20 septembre 2010.
- [31] J. Liu. *Variétés Grassmanniennes et calcul de Schubert*. Université de Rennes 1. 14 janvier 2015.
- [32] mathoverflow. *Number of Plücker relations for a Grassmannian*. septembre 2019.  
<https://mathoverflow.net/questions/230710/num...>
- [33] F. Meyer. *Degenerations of the Grassmannian  $G(3,6)$* . Thesis for the degree of master in mathematics. Faculty of mathematics and natural sciences. Université d'Oslo. Norvège. Mai 2013.

- [34] A. Postnikov. *Total positivity, Grassmannians, and networks*.  
arXiv :math/0609764v1. 27 septembre 2006.
- [35] D. Ranganathan. *A gentle introduction to Grassmannians*.  
www.math.hmc.edu/ ursula/teaching/.../dhruv.pdf. 8 décembre 2010.
- [36] M. Renaud. *Considérations sur les polynômes et les formes : symétrie, alternance, polarisation, invariance ....*  
https ://hal.laas.fr/hal-02160238.
- [37] F. Ronga. *Le calcul de Schubert selon Schubert*. arXiv :math/0409281v1 [Math.AG]. 16 Sep. 2004.
- [38] G. Salmon. *Leçons d'algèbre supérieure*. Gauthier-Villars et fils. Paris. 1890.
- [39] I. R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. Varieties in projective space*. Graduate Texts in Mathematics. Tome 1. Seconde édition. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. 1994.
- [40] K.E. Smith, L. Kahanpää, P. Kekäläinen et W. Traves. *An invitation to algebraic geometry*. Springer-Verlag New York, Inc. 2000.
- [41] G. Sobczyk. *Notes on Plücker relations in geometric algebra*.  
arXiv :1809.09706v1 [math.GM] 22 septembre 2018.
- [42] D. Speyer et B. Sturmfels. *The tropical Grassmannian*.  
arXiv :math/0304218v3 [math.AG] 17 octobre 2003.
- [43] B. Sturmfels. *5. Grassmannians and the space of trees*.  
math.berkeley.edu/ bernd/tropical/sec5.pdf.
- [44] R. Vakil. *A geometric Littlewood-Richardson rule*.  
arXiv :math/0302294v1 [math.AG] 24 février 2004. Aussi Annals of Mathematics 164. pp. 371-422. 2006.
- [45] B.L. van der Waerden. *Algebra. Volume 2*. Springer-Verlag. New York Inc. 1991.
- [46] E. W. Weisstein. *CRC Concise encyclopedia of mathematics*. CRC Press LLC. 1999.
- [47] Wikipedia. *Grassmannienne*. [http ://fr.wikipedia.org/w/index.php ? title=Grassmannienne&oldid=95167520](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Grassmannienne&oldid=95167520). 2013.
- [48] Wikipedia. *Grassmannian*. [http ://en.wikipedia.org/w/index.php ? title=Grassmannian&oldid=580770654](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Grassmannian&oldid=580770654). 2013.
- [49] Wikipedia. *Polynôme de Schur*. [http ://fr.wikipedia.org/wiki/Polynôme\\_de\\_Schur ?](http://fr.wikipedia.org/wiki/Polynôme_de_Schur)

- [50] Wikipedia. *Règle de Littlewood-Richardson*.  
[https://fr.wikipedia.org/w/index.php?  
title=Règle\\_de\\_Littlewood-Richardson &oldid=149295122](https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Règle_de_Littlewood-Richardson&oldid=149295122). 2018.
- [51] Wikipedia. *Schubert calculus*. [http://en.wikipedia.org/w/index.php?  
title=Schubert\\_calculus&oldid=545063821](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Schubert_calculus&oldid=545063821). 2013.
- [52] Wikipedia. *Schur polynomial*. [http://en.wikipedia.org/wiki/Schur\\_polynomial?](http://en.wikipedia.org/wiki/Schur_polynomial?)
- [53] Wikipedia. *Schubert variety*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?  
title=Schubert\\_variety&oldid=841449556](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Schubert_variety&oldid=841449556). 2018.
- [54] Wikipedia. *Tableau de Young*. [https://fr.wikipedia.org/w/index.php?  
title=Tableau\\_de\\_Young&oldid=147929259](https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Tableau_de_Young&oldid=147929259). 2018.
- [55] Wikipedia. *Young tableau*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?  
title=Young\\_tableau&oldid=833057672](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Young_tableau&oldid=833057672). 2018.
- [56] WolframMathWorld. *Grassmannian*. 2013.
- [57] A. Yong. *What is a Young tableau?* arXiv :math/0611030v1[math.CO].  
2 novembre 2006.