



**HAL**  
open science

## Comparaison de formes d'ondes pour radar MIMO

Hind Ait Taleb, Valentine Wasik, Abigael Taylor, Yassin El Hillali

► **To cite this version:**

Hind Ait Taleb, Valentine Wasik, Abigael Taylor, Yassin El Hillali. Comparaison de formes d'ondes pour radar MIMO. GRETSI 2023, Aug 2023, Grenoble, France. hal-04283291

**HAL Id: hal-04283291**

**<https://hal.science/hal-04283291>**

Submitted on 13 Nov 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Comparaison de formes d'ondes pour radar MIMO

Hind AIT TALEB<sup>1,3</sup> Valentine WASIK<sup>1</sup> Abigael TAYLOR<sup>2</sup> Yassin EL HILLALI<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ONERA/DEMR, Université de Toulouse, F-31055 Toulouse - France

<sup>2</sup>DEMR, ONERA, Université Paris-Saclay, F-91123 Palaiseau - France

<sup>3</sup>IEMN, UMR CNRS 8520, UPHF, 59300 Valenciennes - France

**Résumé** – Le but du radar est de détecter des cibles et de déterminer certaines de leurs caractéristiques (distance, vitesse, angle). Ce papier s'intéresse à la comparaison des signaux élémentaires utilisés avec différentes méthodes de génération de formes d'ondes pour un radar MIMO de détection et de localisation de débris spatiaux. La fonction d'ambiguïté caractéristique de chaque code est étudiée et des critères quantitatifs sont fournis pour évaluer les performances du radar.

**Abstract** – Radar is used to detect targets and to estimate some of their parameters (range, velocity and bearing angle). This article compares elementary signals used with several methods of generating waveforms for MIMO radar to detect and locate space debris. The ambiguity function is analysed for each code and quantitative criteria are given to evaluate radar performance.

## 1 Introduction

Le RADAR (Radio Detection and Ranging) est un système qui utilise des ondes électromagnétiques pour détecter des cibles ou des obstacles. Le signal réfléchi par la cible étant une copie décalée et atténuée du signal d'émission, un filtre adapté est appliqué à ce signal reçu. Il s'agit d'une comparaison dans le domaine temporel qui permet d'extraire les caractéristiques souhaitées. Dans le cas des cibles mobiles, un traitement Doppler est appliqué en plus du filtre adapté.

Les performances du radar peuvent être évaluées à l'aide de la fonction d'ambiguïté [1]. À cette fin, plusieurs critères peuvent être estimés : la résolution, le niveau des lobes secondaires. En effet, dans le contexte spatial qui nous intéresse, nous souhaitons déterminer la position en distance, en angle et en vitesse des débris spatiaux, en présence de cibles de niveau important, d'où la nécessité d'avoir des lobes secondaires bas.

En plus de l'estimation de la distance et de la vitesse, la localisation angulaire peut être assurée par une architecture MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) [2], [3], caractérisée par ses multiples antennes d'émission et de réception. Ce papier traite du radar MIMO cohérent dont les antennes sont co-localisées.

Les performances du radar dépendent de la méthode de génération de formes d'ondes. Pour optimiser les performances d'un radar MIMO, les formes d'ondes doivent être orthogonales c'est-à-dire que les signaux transmis par les différents émetteurs doivent être décorrélés. Plusieurs méthodes d'orthogonalisation, appelées techniques d'accès, adaptées au MIMO existent [4] : TDMA (Time Division Multiple Access), FDMA (Frequency Division Multiple Access), CDMA (Code Division Multiple Access). Le choix des techniques d'accès dépend des critères recherchés (résolution, niveau des lobes) ainsi que des contraintes du système (nombre d'antennes, temps d'acquisition, complexité hardware). Chaque technique d'accès utilise un signal élémentaire, généralement un chirp ou une impulsion rectangulaire pour leur facilité d'implémentation, modulé en amplitude et/ou en fréquence sur chacun des émetteurs.

Dans cet article, nous allons comparer les fonctions d'ambi-

guïté obtenues avec différents signaux élémentaires : le chirp, l'impulsion rectangulaire mais aussi la gaussienne, la monopulse gaussienne et le sinus cardinal qui présentent des propriétés spectrales intéressantes.

Nous allons également moduler en amplitude un signal chirp à l'aide des polynômes de Gegenbauer et d'Hermite, qui sont orthogonaux deux à deux [5], [6]. Ces polynômes, à notre connaissance, n'ont pas été utilisés jusqu'à présent pour du radar MIMO.

L'article est organisé de la façon suivante : la fonction d'ambiguïté est présentée dans la section 2 et l'expression du signal émis par les antennes dans la section 3. Les performances associées aux techniques d'accès avec différents signaux élémentaires et avec les polynômes de Gegenbauer et d'Hermite sont évaluées dans les section 4 et 5.

## 2 Fonction d'ambiguïté du radar MIMO

Nous considérons un système constitué de  $N_T$  antennes d'émissions et  $N_R$  antennes de réception.  $\mathbf{x}_{E,m}$  et  $\mathbf{x}_{R,n}$  sont, respectivement, les vecteurs coordonnées de la  $m$ -ème antenne d'émission et la  $n$ -ème antenne de réception. Par souci de simplification, nous négligeons les gains d'émission et de réception. Le réseau d'antennes d'émission envoie un signal vers toutes les directions  $\theta$  de l'espace. Il s'écrit comme :

$$s_e(t, \theta) = \sum_{m=0}^{N_T-1} e^{j\mathbf{x}_{E,m}^T \mathbf{k}(\theta)} s_m(t) \quad (1)$$

$\mathbf{k}(\theta)$  est le vecteur d'onde dans la direction  $\theta$  et  $s_m(t)$  est le signal envoyé par chaque antenne d'émission qui est différent d'une antenne à une autre.

Les antennes de réception reçoivent l'écho réfléchi sur la cible. En supposant que cette dernière a une position angulaire  $\theta_c$ , un retard  $\tau_c$  et une fréquence Doppler  $f_{dc}$ , l'expression du signal reçu par la  $n$ -ème antenne est :

$$s_{r,n}(t, \tau_c, \theta_c) = e^{j\mathbf{x}_{R,n}^T \mathbf{k}(\theta_c)} s_e(t - \tau_c, \theta_c) e^{j2\pi f_{dc} t} \quad (2)$$

La fonction d'ambiguïté consiste à comparer les signaux d'émission et de réception dans le domaine temporel à l'aide d'une intercorrélacion et de tester les hypothèses de retard  $\tau$ , de localisation angulaire  $\theta$  et de fréquence Doppler  $f_d$  :

$$\chi(\tau, \tau_c, \theta, \theta_c, f_d, f_{d_c}) = \left( \sum_{n=0}^{N_R-1} e^{j\mathbf{x}_{R,n}^T(\mathbf{k}(\theta) - \mathbf{k}(\theta_c))} \right) \left( \sum_{m=0}^{N_T-1} \sum_{m'=0}^{N_T-1} e^{j\mathbf{x}_{E,m}^T \mathbf{k}(\theta_c)} e^{j\mathbf{x}_{E,m'}^T \mathbf{k}(\theta)} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} s_m(t - \tau_c) s_{m'}^*(t - \tau) e^{-j2\pi(f_d - f_{d_c})t} dt \quad (3)$$

Dans notre contexte spatial, nous considérons des cibles lentes. Nous allons donc négliger l'effet Doppler par la suite.

### 3 Expression générique du signal émis

Dans le cadre du radar MIMO, chaque antenne d'émission transmet un signal  $s_m(t)$  identique d'impulsion en impulsion. Une impulsion est divisée en  $N_c$  chips (créneaux temporels) et chaque chip est caractérisé par sa fréquence et son amplitude. Le signal émis par la  $m$ -ème antenne s'écrit ainsi [4] :

$$s_m(t) = \sum_{p=0}^{N_c-1} W_{mp} e^{j2\pi F_{mp} t} u(t - p\Delta_t) \quad (4)$$

$W_{mp}$  et  $F_{mp}$  représentent respectivement les coefficients de la matrice d'amplitude  $\mathbf{W}$  et de fréquence  $\mathbf{F}$  associés à la  $m$ -ème antenne et au  $p$ -ème chip de durée  $\Delta_t$ . Les signaux  $u(t - p\Delta_t)$  sont des copies retardées du signal élémentaire, coefficients de  $\mathbf{u}(t)$  :

$$\mathbf{u}(t) = [u(t), \dots, u(t - N_c\Delta_t)]^T \quad (5)$$

Le vecteur  $\mathbf{s}(t)$  de taille  $N_T \times 1$  regroupant les signaux émis par les antennes d'émission, s'écrit sous forme matricielle [4] :

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_{N_T}(t)]^T = (\mathbf{W} \circ e^{j2\pi\mathbf{F}}) \mathbf{u}(t) \quad (6)$$

Dans [4], le signal élémentaire considéré est un chirp ou une impulsion rectangulaire et  $\circ$  est le produit de Hadamard. Dans cet article, nous allons nous intéresser à d'autres signaux élémentaires.

La gaussienne permet de réduire le niveau des lobes secondaires de la fonction d'ambiguïté car sa fonction d'auto-corrélacion est compacte. Le signal gaussien d'amplitude  $A$ , d'écart type  $\sigma$  et de fréquence porteuse  $f_c$  s'écrit :

$$u(t) = A e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{j2\pi f_c t} \quad (7)$$

La monopulse gaussienne est la dérivée première de la gaussienne, elle est caractérisée par une moyenne nulle :

$$u(t) = \frac{At}{\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{j2\pi f_c t} \quad (8)$$

Le sinus cardinal est caractérisé par sa bande passante rectangulaire et s'exprime ainsi :

$$u(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{\Delta_t}\right) e^{j2\pi f_c t} \quad (9)$$

Les signaux élémentaires considérés ont la même bande passante  $B$  qui est reliée à  $\sigma$  dans le cas des impulsions gaussiennes et monopulse gaussienne. Ils seront notés MPG pour la monopulse gaussienne, R pour l'impulsion rectangulaire et G pour la gaussienne.

## 4 Définition et comparaison des méthodes de génération de formes d'ondes

### 4.1 Critères

Pour comparer les performances correspondant aux méthodes de génération de formes d'ondes (TDMA, FDMA, CDMA), nous allons utiliser les critères suivants :

**Résolution temporelle** ( $\rho_t$ ) : Largeur du lobe principal exprimée en ns de la fonction d'ambiguïté dans le domaine temporel à -3dB.

**Résolution angulaire** ( $\rho_\theta$ ) : Largeur du lobe principal exprimée en radian de la fonction d'ambiguïté dans le domaine angulaire à -3dB.

**PSLR (Peak-to-Sidelobe ratio)** : Ratio en dB de l'amplitude du lobe secondaire de plus haut niveau et du lobe principal, que nous cherchons à minimiser. Son expression mathématique est  $PSLR = 10 \log\left(\frac{y_{\text{lobe secondaire}}}{y_{\text{lobe principal}}}\right)$  avec  $y$  l'amplitude du signal en sortie du filtre adapté.

**ISLR (Integrated Sidelobe ratio)** : Ratio en dB de l'énergie contenue dans les lobes secondaires et celle du lobe principal, que nous cherchons à minimiser. Son expression mathématique est  $ISLR = 10 \log\left(\frac{\sum y_{\text{lobes secondaires}}^2}{y_{\text{lobe principal}}^2}\right)$ .

**IPSLR/ $\rho_t$**  : Ce quotient permet d'évaluer le compromis entre PSLR et  $\rho_t$  puisque nous cherchons à obtenir la résolution la plus petite et le PSLR en valeur absolue le plus grand.

Par la suite, nous allons donner les critères PSLR et ISLR uniquement dans le domaine temporel où la différence entre les signaux est la plus notable.

### 4.2 TDMA

La technique TDMA consiste à transmettre une permutation cyclique du même code sur chaque antenne. Les paramètres sont définis ainsi :  $N_c = 127$ ,  $\mathbf{W} = \mathbf{C}(r)$  et  $\mathbf{F} = \mathbf{1}_{N_T \times N_c}$ ,  $r$  étant une séquence pseudo-aléatoire et  $\mathbf{C}$  la matrice circulaire réduite à la taille  $N_T \times N_c$ .

Les figures 1a et 1b représentent des coupes de la fonction d'ambiguïté pour chaque signal élémentaire dans le domaine temporel et angulaire et le tableau 1 regroupe les valeurs des critères.

À partir de la figure 1a, nous observons que le chirp a la meilleure **résolution temporelle** et une valeur de **IPSLR/ $\rho_t$**  la plus élevée, deux cibles proches à plus de  $\frac{\rho_t \times c}{2} = 79.5$  m peuvent donc être distinguées. Sur l'ensemble du domaine temporel, la MPG a des lobes secondaires bas ce qui explique sa valeur d'**ISLR** la plus petite.

Le chirp permet également d'atteindre la meilleure résolution angulaire mais le niveau des lobes secondaires est plus élevé que pour la MPG, comme le montre la figure 1b.

### 4.3 FDMA

La technique FDMA repose sur la transmission simultanée de signaux à des fréquences différentes. Les signaux sont donc orthogonaux puisque leurs domaines fréquentiels sont séparés. Les paramètres utilisés sont :  $N_c = 1$ ,  $\mathbf{W} = \mathbf{1}_{N_T \times N_c}$  et  $\mathbf{F} = [0, \Delta_f, \dots, (N_t - 1)\Delta_f]^T$  avec  $\Delta_f = B$ .

TABLE 1 : Valeurs des critères pour le TDMA

Impulsion	$\rho_t$ [ns]	PSLR [dB]	IPSLR/ $\rho_t$ [dB/ns]	ISLR [dB]	$\rho_\theta$ [rad]
MPG	2.85	-4.3	1.5	-4.86	0.156
Sinc	2.54	-4.34	1.7	-0.64	0.148
G	2.6	-4.34	1.66	0.77	0.156
R	3.06	-3.38	1.10	0.2	0.145
Chirp	0.53	-8.68	16.37	-0.29	0.144

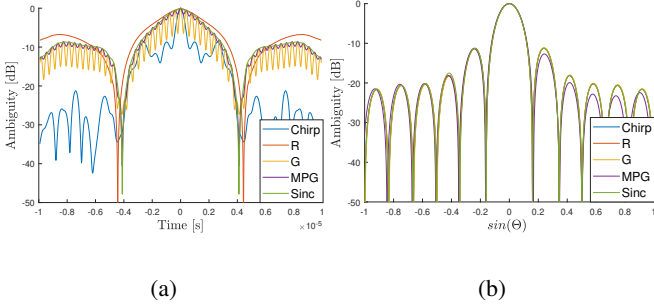


FIGURE 1 : Coupe à zéro Doppler de la fonction d'ambiguïté dans (a) le domaine temporel et (b) le domaine angulaire correspondant à différents signaux élémentaires pour le TDMA ( $B = 2.54$  MHz,  $N_T = 12$ ,  $N_R = 1$ )

La figure 2a et le tableau 2 montrent que les différents signaux élémentaires ont approximativement la même **résolution temporelle** et la même valeur de **PSLR**. L'impulsion gaussienne a cependant la meilleure valeur d'**ISLR**, ce qui s'explique par de faibles lobes secondaires sur l'ensemble du domaine temporel.

D'après la figure 2b, la monopulse gaussienne assure la meilleure résolution angulaire mais le niveau des lobes secondaires est élevé par rapport aux autres signaux.

TABLE 2 : Valeurs des critères pour le FDMA

Impulsion	$\rho_t$ [ns]	PSLR [dB]	IPSLR/ $\rho_t$ [dB/ns]	ISLR [dB]	$\rho_\theta$ [rad]
MPG	0.32	-6.16	19.25	-0.04	0.138
Sinc	0.35	-6.68	18.35	-2.01	0.152
G	0.36	-6.84	19.54	-9.26	0.148
R	0.35	-6.6	18.6	-7.84	0.145
Chirp	0.35	-6.69	19.11	-4.19	0.148

#### 4.4 CDMA

Le CDMA attribue des codes différents pour chaque antenne, caractérisés par de bonnes propriétés d'auto-corrélation pour supprimer le couplage angle-distance [4]. Les paramètres utilisés sont  $N_c = 127$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{1}_{N_T \times N_c}$  et  $\mathbf{W}$  est la matrice de MLFSR (Maximum Length Feedback Shift Register) utilisée dans [7]. Ces codes pseudo-aléatoires sont générés à partir de registres à décalage utilisant des portes « ou-exclusif ».

Le CDMA, comme le TDMA atteint la meilleure **résolution temporelle** et la meilleure valeur du **IPSLR/ $\rho_t$**  en utilisant un chirp, d'après le tableau 3, même si la meilleure valeur de **PSLR** est obtenue pour l'impulsion rectangulaire comme nous pouvons le voir dans la figure 3a. Le chirp a également

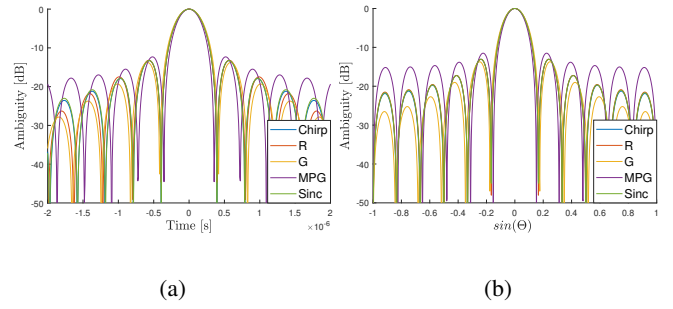


FIGURE 2 : Coupe à zéro Doppler de la fonction d'ambiguïté dans (a) le domaine temporel et (b) le domaine angulaire correspondant à différents signaux élémentaires pour le FDMA ( $B = 211.66$  kHz,  $N_T = 12$ ,  $N_R = 1$ ,  $B_{tot} = N_T \times B = 2.54$  MHz)

la valeur la plus basse d'**ISLR**.

Les performances angulaires sont similaires pour les signaux utilisés, comme le montre la figure 3b.

TABLE 3 : Valeurs des critères pour le CDMA

Impulsion	$\rho_t$ [ns]	PSLR [dB]	IPSLR/ $\rho_t$ [dB/ns]	ISLR [dB]	$\rho_\theta$ [rad]
MPG	0.28	-3.25	11.52	2.45	0.144
Sinc	0.35	-5.5	14.59	0.96	0.144
G	0.24	-8.47	35.31	-0.01	0.144
R	0.24	-9.28	38.68	0.36	0.144
Chirp	0.16	-8.63	54.62	-1.46	0.144

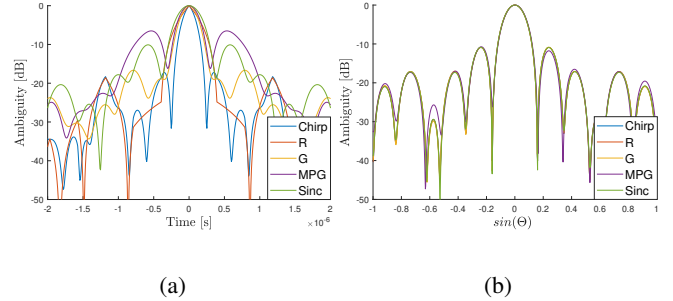


FIGURE 3 : Coupe à zéro Doppler de la fonction d'ambiguïté dans (a) le domaine temporel et (b) le domaine angulaire correspondant à différents signaux élémentaires pour le CDMA ( $B = 2.54$  MHz,  $N_T = 12$ ,  $N_R = 1$ )

## 5 Polynômes Hermite et Gegenbauer

Les polynômes orthogonaux d'Hermite et Gegenbauer possèdent de bonnes propriétés d'auto-corrélation. Ils sont également reliés par des relations de récurrence et ne sont donc pas limités en nombre à l'inverse des codes MLFSR, ce qui est avantageux pour du radar MIMO. Dans cette section, nous avons adapté ces polynômes au MIMO et comparé leurs performances avec un code MLFSR classiquement utilisé en CDMA.

## 5.1 Polynômes d’Hermite

Les polynômes d’Hermite sont définis pour  $t \in ]-\infty, +\infty[$ . Le polynôme d’ordre  $n$  s’écrit :

$$H(n, t/\sigma) = (-1)^n \sigma^n e^{t^2/\sigma^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2/\sigma^2}) \quad (10)$$

$\sigma$  étant l’écart type de la gaussienne. La fonction modifiée d’Hermite, proposée dans [5], qui satisfait le critère d’orthogonalité s’exprime ainsi :

$$H_{n,\sigma}(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma 2^n n! \sqrt{\pi}}} H(n, t/\sigma) \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \quad (11)$$

Pour définir le signal, les paramètres utilisés dans (6) sont  $N_c = 1$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{1}_{N_T \times N_c}$ ,  $\mathbf{W} = [H_{1,\sigma}(t), \dots, H_{N_T,\sigma}(t)]^T$ .

Le signal élémentaire choisi est un chirp. Contrairement aux codes classiques du CDMA (MLFSR, Gold), la modulation se fait continuellement sur le domaine temporel.

## 5.2 Polynômes de Gegenbauer

Les polynômes de Gegenbauer sont définis pour  $t \in [-1, 1]$  et sont reliés par la relation de récurrence suivante :

$$G(n, \alpha, t) = 2t \frac{n + \alpha - 1}{n} G(n - 1, \alpha, t) - \frac{n + 2\alpha - 2}{n} G(n - 2, \alpha, t) \quad (12)$$

Nous écrivons la fonction modifiée de Gegenbauer qui respecte le critère d’orthogonalité [6] :

$$G_{n,\alpha}(t) = \frac{\sqrt{n!(n + \alpha)\Gamma(\alpha)^2}}{\sqrt{\pi 2^{1-2\alpha}\Gamma(n + 2\alpha)}} G(n, t) \quad (13)$$

où  $\Gamma$  est la fonction gamma. Les paramètres utilisés sont  $N_c = 1$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{1}_{N_T \times N_c}$  et  $\mathbf{W} = [G_{1,\alpha}(t), \dots, G_{N_T,\alpha}(t)]^T$ .

## 5.3 Comparaison des codes

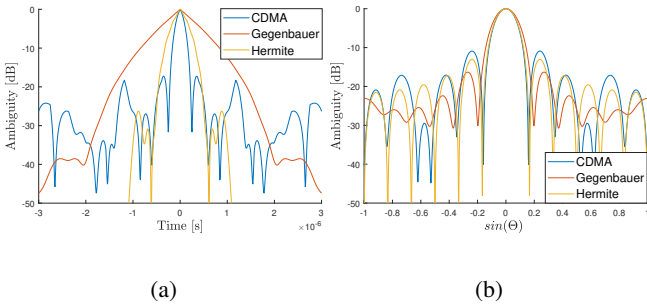


FIGURE 4 : Coupe à zéro Doppler de la fonction d’ambiguïté dans (a) le domaine temporel et (b) le domaine angulaire pour le CDMA et les polynômes de Gegenbauer et d’Hermite ( $B = 2.54$  MHz,  $N_T = 12$ ,  $N_R = 1$ ,  $\alpha = 0.5$ )

La figure 4a ainsi que la valeur du  $\text{IPSLR}/\rho_t$  du tableau 4 montrent que les polynômes d’Hermite permettent d’obtenir le meilleur compromis entre la résolution et le niveau du lobe secondaire. Les polynômes de Gegenbauer présentent des propriétés intéressantes en terme de lobes secondaires mais entraînent une dégradation de la résolution temporelle.

Les deux polynômes permettent d’obtenir des lobes secondaires plus bas que le CDMA dans le domaine angulaire, comme nous pouvons le voir sur la figure 4b.

TABLE 4 : Comparaison des critères pour le CDMA et les polynômes de Gegenbauer (Gegen) et d’Hermite (Herm)

Code	$\rho_t$ [ns]	PSLR [dB]	IPSLR/ $\rho_t$ [dB/ns]	ISLR [dB]	$\rho_\theta$ [rad]
CDMA	0.158	-8.63	35.02	-1.46	0.144
Herm	0.282	-15.43	54.71	-21.47	0.148
Gegen	0.55	-19.26	54.62	-25.32	0.166

## 6 Conclusion

Dans cet article, nous avons comparé les performances des différentes techniques d’accès pour du radar MIMO en employant des signaux élémentaires variés : le chirp, l’impulsion rectangulaire, la gaussienne, la monopulse gaussienne et le sinus cardinal. Nous avons conclu que le chirp permet d’atteindre la meilleure **résolution temporelle** et **angulaire** pour le TDMA et le CDMA tandis que la monopulse gaussienne présente les meilleures valeurs de ces deux critères pour le FDMA. Pour le CDMA, l’utilisation de polynômes Gegenbauer et Hermite à la place d’un MLFSR plus classique permet d’abaisser les lobes secondaires, au prix d’une dégradation de résolution.

## 7 Remerciements

Ce travail est réalisé dans le cadre d’une thèse cofinancée par l’ONERA et le CNES.

## Références

- [1] Philip M. Woodward. Probability and information theory with applications to radar. 1954.
- [2] D.J. Rabideau and P. Parker. Ubiquitous MIMO multifunction digital array radar. In *The Thirty-Seventh Asilomar Conference on Signals, Systems & Computers, 2003*, volume 1, pages 1057–1064 Vol.1, 2003.
- [3] Jian Li and Petre Stoica. *MIMO radar signal processing*. John Wiley & Sons, 2008.
- [4] Olivier Rabaste, Laurent Savy, Mathieu Cattenoz, and Jean-Paul Guyvarch. Signal waveforms and range/angle coupling in coherent colocated MIMO radar. In *2013 International Conference on Radar*, pages 157–162. IEEE, 2013.
- [5] Md Raihan Sharif and Saman S Abeysekera. Efficient active sonar parameter estimation using linear FM signals via Hermite decompositions. In *OCEANS 2006-Asia Pacific*, pages 1–5. IEEE, 2006.
- [6] Bengt Nagel. The relativistic Hermite polynomial is a Gegenbauer polynomial. *Journal of Mathematical Physics*, 35(4) :1549–1554, 1994.
- [7] Laila Sakkila, Yassin Elhillali, Atika Rivenq, C Tatkeu, and Jean-Michel Rouvaen. Short range automotive radar based on UWB pseudo-random coding. In *2007 7th International Conference on ITS Telecommunications*, pages 1–6. IEEE, 2007.