



HAL
open science

Formulation symplectique pour la réduction de modèle des systèmes dynamiques

Clément Vella, Nima Shirafkan, Abdelbacet Oueslati, Franz Bamer, Pierre
Gosselet, Bernd Markert, Géry de Saxcé

► **To cite this version:**

Clément Vella, Nima Shirafkan, Abdelbacet Oueslati, Franz Bamer, Pierre Gosselet, et al.. Formulation symplectique pour la réduction de modèle des systèmes dynamiques. 25e Congrès Français de Mécanique, Nantes, 29 août-2 septembre 2022, Aug 2022, Nantes, France. hal-04281728

HAL Id: hal-04281728

<https://hal.science/hal-04281728>

Submitted on 13 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Formulation symplectique pour la réduction de modèle des systèmes dynamiques

C. VELLA^b, N. SHIRAFKAN^a, A. OUESLATI^b, F. BAMER^a,
P. GOSSELET^b, B. MARKERT^a, G. DE SAXCÉ^b

a. Institute of General Mechanics, RWTH, Aachen, Germany

b. Univ. Lille, CNRS, Centrale Lille, UMR 9013 – LaMcube – Laboratoire de mécanique multiphysique multiéchelle, F-59000, Lille, France (email : gery.de-saxce@univ-lille.fr)

Mots clés : mécanique symplectique, analyse modale, réduction de modèle, *principal component analysis*, *proper symplectic decomposition*

Résumé :

Les systèmes numériques de grande taille sont omniprésents en dynamique des structures. Travailler dans des espaces de dimension élevée est coûteux en temps de calcul, souvent insoluble et requiert de stocker de gros volumes de données, d'où le besoin de simplifier les modèles pour les rendre mieux exploitables par l'utilisateur. La *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) est une des techniques de réduction de modèle les plus utilisées avec succès. Néanmoins, elle est basée sur la structure métrique de l'espace de configuration, tandis que pour les systèmes dynamiques l'espace de phase $V = \mathbb{R}^{2N_x}$ est naturellement muni d'un tenseur deux fois covariant antisymétrique, la forme symplectique :

$$\omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathbf{x}^T J \mathbf{x}' = \mathbf{q}^T \mathbf{p}' - \mathbf{p}^T \mathbf{q}'$$

où \mathbf{q} sont les degrés de liberté, \mathbf{p} sont les moments, $\mathbf{x}^T = (\mathbf{q}^T, \mathbf{p}^T)$ et J est une matrice antisymétrique. Le mouvement du système est gouverné par les équations canoniques :

$$\dot{\mathbf{x}} = \nabla^\omega h = J \nabla h$$

où $\nabla^\omega h$ est le gradient symplectique du Hamiltonien h (ou *Hamiltonian vector field*). La méthode proposée qui entre dans la classe des techniques de *Proper Symplectic Decomposition* (PSD) consiste à décomposer l'intervalle $[0, T]$ en N_t sous-intervalles I_k de pas de temps Δt_k et de point de référence $t_k \in I_k$. Partant d'une évolution de la structure $[0, T] \rightarrow V : t \mapsto \mathbf{x}(t)$ comme donnée, nous construisons, à travers l'isomorphisme J de V dans son dual V^* , la *matrice de snapshot covariante* :

$$X^* = [J\mathbf{x}(t_1), \dots, J\mathbf{x}(t_{N_t})]$$

représentant une application d'ensemble d'arrivée l'espace V^* et d'ensemble de départ l'espace euclidien W de dimension N_t , muni d'un produit scalaire entre les vecteurs de snapshot $\mathbf{f}_j = [f_j(t_1), \dots, f_j(t_{N_t})]^T$:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{N_t} f_1(t_k) f_2(t_k) \Delta t_k$$

Une approximation des modes propres du système peut être obtenue à partir de la matrice symétrique

$$\tilde{H} = 2 X^* \frac{1}{T} \text{diag}(\Delta t_1, \dots, \Delta t_{N_t}) (X^*)^T$$

en résolvant le problème aux valeurs propres correspondant. Le point essentiel est que lorsque l'évolution de la structure représente une superposition équilibrée de tous les modes propres et sous des hypothèses convenables, on peut prouver que l'approximation \tilde{H} converge vers la matrice hessienne H du Hamiltonien quand T et N_t tendent vers $+\infty$. Si la combinaison des modes n'est pas équilibrée, nous sommes capables d'extraire les modes dominants de l'analyse modale et la composante principale du Hamiltonien, ce qui permet de construire un modèle réduit. Ce résultat de convergence est illustré par un petit exemple numérique.

Dans la littérature moderne, une technique de réduction de modèle basée sur la PSD a été proposée par Peng et Mohseni dans [1], dans laquelle la projection symplectique est déterminée à partir d'une matrice de snapshot en résolvant, pour des systèmes linéaires, un problème d'optimisation *non linéaire*. Au contraire, notre stratégie conduit à une méthode alternative basée sur la résolution d'un problème aux valeurs propres *linéaire*.

1 Calcul de modes propres par PSD

1.1 Contexte

Pour la construction de la PSD, on suppose que l'on possède des données sur l'évolution des coordonnées généralisées \mathbf{q} au cours du temps et que la matrice de masse M est connue. Nous pouvons ainsi construire le vecteur des moments conjugués $\mathbf{p} = M\dot{\mathbf{q}}$ et la matrice des snapshots X :

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t_1) & \dots & \mathbf{q}(t_{N_t}) \\ \mathbf{p}(t_1) & \dots & \mathbf{p}(t_{N_t}) \end{bmatrix}$$

Pour des systèmes linéaires, l'analyse modale nous permet d'écrire leur réponse homogène comme une combinaison de modes propres. Soit le vecteur \mathbf{q} des coordonnées généralisées (déplacement), on peut écrire :

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^{N_x} \mathbf{u}_i \left(\alpha_i \cos(\omega_i t) + \frac{\beta_i}{\omega_i} \sin(\omega_i t) \right) \quad (1)$$

où $(\omega_i, \mathbf{u}_i) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}^{N_x})$ sont les éléments propres du problème $K\mathbf{u} = \omega^2 M\mathbf{u}$.

On travaillera avec des vecteurs propres normalisés par rapport à la matrice de masse M , i.e. $1 \leq i \leq N_x$, $\mathbf{u}_i^T M \mathbf{u}_i = 1$. Puis, on peut approximer \mathbf{q} et \mathbf{p} par troncature de la base propre, en ne conservant que $m \leq N_x$ modes satisfaisant un critère donné.

Si on suppose que les données peuvent s'écrire sous la forme (1), la matrice des snapshots X peut se réécrire sous la forme suivante :

$$X = \begin{bmatrix} U (\boldsymbol{\alpha} \cos + \boldsymbol{\beta} \omega^{-1} \sin) \\ MU (-\boldsymbol{\alpha} \omega \sin + \boldsymbol{\beta} \cos) \end{bmatrix}$$

avec :

- $U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_m \end{bmatrix}$ la matrice des vecteurs propres (taille $N_x \times m$);
- $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$ la matrice diagonale des valeurs propres (taille $m \times m$);
- $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ et $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ (tailles $m \times m$) les matrices diagonales des facteurs de participation modale (vectoriellement on a $\boldsymbol{\alpha} = U^T M \mathbf{q}(0)$ et $\boldsymbol{\beta} = U^T \mathbf{p}(0)$);
- $\mathbf{cos} = [\cos(\omega_i t_j)]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq N_t}}$ et $\mathbf{sin} = [\sin(\omega_i t_j)]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq N_t}}$ (tailles $m \times N_t$).

Avec ces notations, le problème aux valeurs propres classique s'écrit $KU = MU\boldsymbol{\omega}^2$.

1.2 Calcul de \tilde{H}

On introduit l'opérateur antisymétrique J tel que :

$$J = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_{N_x} \\ -I_{N_x} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

On construit alors la matrice snapshot covariante $X^* = JX$:

$$X^* = - \begin{bmatrix} MU (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\omega} \mathbf{sin} - \boldsymbol{\beta} \mathbf{cos}) \\ U (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{cos} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\omega}^{-1} \mathbf{sin}) \end{bmatrix}$$

Si on considère un pas de temps constant $\Delta t_k = h_t$, alors la matrice \tilde{H} s'écrit :

$$\tilde{H} = 2 X^* \frac{1}{T} \mathbf{diag}(\Delta t_1, \dots, \Delta t_{N_t}) (X^*)^T = \begin{bmatrix} H_{ul} & H_{ur} \\ H_{bl} & H_{br} \end{bmatrix}$$

avec :

$$H_{ul} = 2 \frac{h_t}{T} MU (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\omega} \mathbf{sin} \mathbf{sin}^T \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\omega} \mathbf{sin} \mathbf{cos}^T \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta} \mathbf{cos} \mathbf{sin}^T \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \mathbf{cos} \mathbf{cos}^T \boldsymbol{\beta}) U^T M$$

$$H_{ur} = 2 \frac{h_t}{T} MU (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\omega} \mathbf{sin} \mathbf{sin}^T \boldsymbol{\omega}^{-1} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\omega} \mathbf{sin} \mathbf{cos}^T \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \mathbf{cos} \mathbf{sin}^T \boldsymbol{\omega}^{-1} \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta} \mathbf{cos} \mathbf{cos}^T \boldsymbol{\alpha}) U^T$$

$$H_{bl} = H_{ur}^T$$

$$H_{br} = 2 \frac{h_t}{T} U (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{cos} \mathbf{cos}^T \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha} \mathbf{cos} \mathbf{sin}^T \boldsymbol{\omega}^{-1} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\omega}^{-1} \mathbf{sin} \mathbf{cos}^T \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\omega}^{-1} \mathbf{sin} \mathbf{sin}^T \boldsymbol{\omega}^{-1} \boldsymbol{\beta}) U^T$$

1.3 Propriété de convergence par rapport à T

On étudie ici la convergence des produits $\frac{2h_t}{T} \mathbf{sin} \mathbf{sin}^T$, $\frac{2h_t}{T} \mathbf{cos} \mathbf{cos}^T$, et $\frac{2h_t}{T} \mathbf{sin} \mathbf{cos}^T$ par rapport à T , durée totale du snapshot. Ce sont ces produits qui sont responsables de la convergence des blocs H_{ul} , H_{ur} et H_{br} .

On pose H_{ss} tel que :

$$H_{ss} = \frac{2h_t}{T} \mathbf{sin sin}^T = \left[\frac{2h_t}{T} \sum_{j=1}^{N_t} \sin(\omega_i t_j) \sin(\omega_k t_j) \right]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq N_t}}$$

Posons aussi H_{ss}^∞ :

$$H_{ss}^\infty = \lim_{\substack{h_t \rightarrow 0 \\ N_t \rightarrow +\infty}} \frac{2h_t}{T} \sum_{j=1}^{N_t} \sin(\omega_i t_j) \sin(\omega_k t_j) = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(\omega_i t) \sin(\omega_k t) dt$$

Après avoir étudié les cas $i = k$ et $i \neq k$, on trouve :

$$H_{ss}^\infty = \begin{cases} 1 - \frac{\sin(2\omega_i T)}{2\omega_i T} & \text{if } i = k \\ \frac{2}{(\omega_i^2 - \omega_k^2)T} \left(\omega_k \sin(\omega_i T) \cos(\omega_k T) - \omega_i \cos(\omega_i T) \sin(\omega_k T) \right) & \text{if } i \neq k \end{cases}$$

Le même développement peut être fait avec $H_{cc} = \frac{2h_t}{T} \mathbf{cos cos}^T$:

$$H_{cc}^\infty = \begin{cases} 1 - \frac{\sin(2\omega_i T)}{2\omega_i T} & \text{if } i = k \\ \frac{2}{(\omega_i^2 - \omega_k^2)T} \left(\omega_i \sin(\omega_i T) \cos(\omega_k T) - \omega_k \cos(\omega_i T) \sin(\omega_k T) \right) & \text{if } i \neq k \end{cases}$$

On a $H_{ss}^\infty = H_{cc}^\infty = I_m$. On peut finalement observer que, H_{ss}^∞ et H_{cc}^∞ tendent vers la matrice identité quand T tend vers l'infini avec un taux de convergence en $\mathcal{O}(\frac{1}{T})$.

De même, si on pose $H_{sc} = \frac{2h_t}{T} \mathbf{sin cos}^T$, on trouve :

$$H_{sc}^\infty = \begin{cases} \frac{\sin(\omega_i T)^2}{\omega_i T} & \text{if } i = k \\ \frac{2}{(\omega_i^2 - \omega_k^2)T} \left(\omega_i (1 - \cos(\omega_i T) \cos(\omega_k T)) - \omega_k \sin(\omega_i T) \sin(\omega_k T) \right) & \text{if } i \neq k \end{cases}$$

On a $H_{sc}^\infty = H_{cs}^\infty = 0$. Ainsi, H_{sc} et H_{cs} tendent vers la matrice nulle quand T tend vers l'infini avec un taux de convergence en $\mathcal{O}(\frac{1}{T})$.

On peut enfin écrire la limite de \tilde{H} pour T qui tend vers l'infini et h_t qui tend vers 0 :

$$\tilde{H}^\infty = \lim_{\substack{T \rightarrow +\infty \\ h_t \rightarrow 0}} \tilde{H} = \begin{bmatrix} MU (\alpha^2 \omega^2 + \beta^2) U^T M & 0 \\ 0 & U (\alpha^2 + \beta^2 \omega^{-2}) U^T \end{bmatrix}, \quad (2)$$

et on sait que \tilde{H} tend vers sa limite avec un taux de convergence en $\mathcal{O}(\frac{1}{T})$.

Dans la cas particulier où $\alpha = I_m$ et $\beta = \mathbf{0}$ (vitesses initiales nulles), on a :

$$MU (\alpha^2 \omega^2 + \beta^2) U^T M = MU \omega^2 U^T M = KU U^T M = KM^{-1} M = K$$

Et :

$$U (\alpha^2 + \beta^2 \omega^{-2}) U^T = U U^T = M^{-1}$$

d'où, dans ce cas très particulier, \tilde{H} tend vers la matrice hessienne H du hamiltonien :

$$\lim_{\substack{T \rightarrow +\infty \\ N_t \rightarrow +\infty}} \tilde{H} = H = \begin{bmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M^{-1} \end{bmatrix}$$

1.4 Problème aux valeurs propres dans le cas général

La construction de la PSD repose sur la résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$H_\omega^2 \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \quad (3)$$

avec $H_\omega = JH$ la matrice hamiltonienne. On a vu que les données ne permettaient de construire H que dans un cas très particulier. En pratique, on construira la matrice \tilde{H}_ω avec \tilde{H} pour T et N_t choisis suffisamment grands. Tous calculs faits, on a :

$$\tilde{H}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & U (\alpha^2 + \beta^2 \omega^{-2}) U^T \\ -MU (\alpha^2 \omega^2 + \beta^2) U^T M & 0 \end{bmatrix}$$

\tilde{H}_ω^2 s'écrit alors :

$$\tilde{H}_\omega^2 = \begin{bmatrix} -U (\alpha^2 \omega + \beta^2 \omega^{-1})^2 U^T M & 0 \\ 0 & -MU (\alpha^2 \omega + \beta^2 \omega^{-1})^2 U^T \end{bmatrix}$$

Si on pose $B = U (\alpha^2 \omega + \beta^2 \omega^{-1})^2 U^T M$, alors \tilde{H}_ω^2 s'écrit :

$$\tilde{H}_\omega^2 = \begin{bmatrix} -B & 0 \\ 0 & -B^T \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de \tilde{H}_ω^2 sont celles de B , de multiplicité 2. Les valeurs propres d'un produit de matrices étant invariantes par permutation circulaire, on peut dire que les valeurs propres de B sont aussi celles de $(\alpha^2 \omega + \beta^2 \omega^{-1})^2 U^T M U$. Or $U^T M U = I_m$. Il apparaît finalement que les valeurs propres de \tilde{H}_ω^2 sont :

$$\lambda_i = - \left(\alpha_i^2 \omega_i + \frac{\beta_i^2}{\omega_i} \right)^2 \quad (\text{négatives, de multiplicité 2}) \quad (4)$$

La structure de la matrice \tilde{H}_ω^2 permet également de dire que ses vecteurs propres seront de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ M \mathbf{u} \end{bmatrix}$$

où \mathbf{u} est vecteur propre du problème classique $K \mathbf{u} = \omega^2 M \mathbf{u}$.

Le problème (3) permet donc de retrouver, à partir d'un snapshot, des approximations des vecteurs propres de la structure étudiée. La connaissance de ces vecteurs propres nous permet de calculer les facteurs de participation modale par projection sur la base modale des conditions initiales du snapshot.

Connaissant donc les λ_i , α_i et β_i , les pulsations propres ω_i peuvent être retrouvées en exploitant (4) (équation quadratique). Cependant, cette approche conduit à des racines doubles et il n'y a a priori pas de manière générale permettant de sélectionner laquelle des deux racines est pertinente.

Une autre démarche est de considérer le bloc haut gauche H_{ul} de \tilde{H} :

$$H_{ul} = MU (\alpha^2 \omega^2 + \beta^2) U^T M$$

d'où :

$$\omega^2 = \alpha^{-2} (U^T H_{ul} U - \beta^2)$$

2 Exemple numérique

Pour illustrer, on considère une barre de longueur ℓ , de section S , de module d'Young E et de masse linéique μ . La barre est encastree en $x = 0$ et libre en $x = \ell$. On considère une approximation du champ de déplacement tel que :

$$u(x) = \frac{x}{\ell} q_1 + \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 q_2$$

où q_1 et q_2 sont des coordonnées généralisées. Étant donné le choix de l'approximation, les matrices de masse et de raideur s'écrivent :

$$L = \frac{ES}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}, \quad M = \mu\ell \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Pour simplifier, choisissons les paramètres tels que $ES/\ell = \mu\ell = 1$. Les pulsations propres du problème $K\mathbf{u} = \omega^2 M\mathbf{u}$ seront prises pour références. On prend également comme temps de référence la période de la plus petite pulsation propre. Ainsi, on cherche à observer la convergence des pulsations propres calculée par PSD en fonction de la durée du snapshot en nombre de périodes. Les matrices des snapshots sont construites par à partir des éléments propres de référence et des conditions initiales tirées aléatoirement.

On trace sur les figures 1 et 2 l'évolution des pulsations propres en fonction du nombre de périodes pour deux jeux de conditions initiales différents. On observe que les pulsations propres calculées par PSD convergent vers les pulsation propres de référence.

On a également effectué une régression linéaire sur les pics des pulsations par rapport à une fonction de la forme $f : T \mapsto K_1 + \frac{K_2}{T}$. On retrouve des coefficients de corrélation proches de 1, ce qui confirme le calcul analytique sur le taux de convergence de \tilde{H} .

Cet exemple numérique montre sur un exemple simple que la PSD peut fournir des approximations des pulsations propres indépendamment des facteurs de participation modale et que la qualité de l'approximation augmenter avec la durée du snapshot. Les prochains développements seront dédiés à calculer une PSD sur un exemple avec beaucoup plus de degrés de liberté.

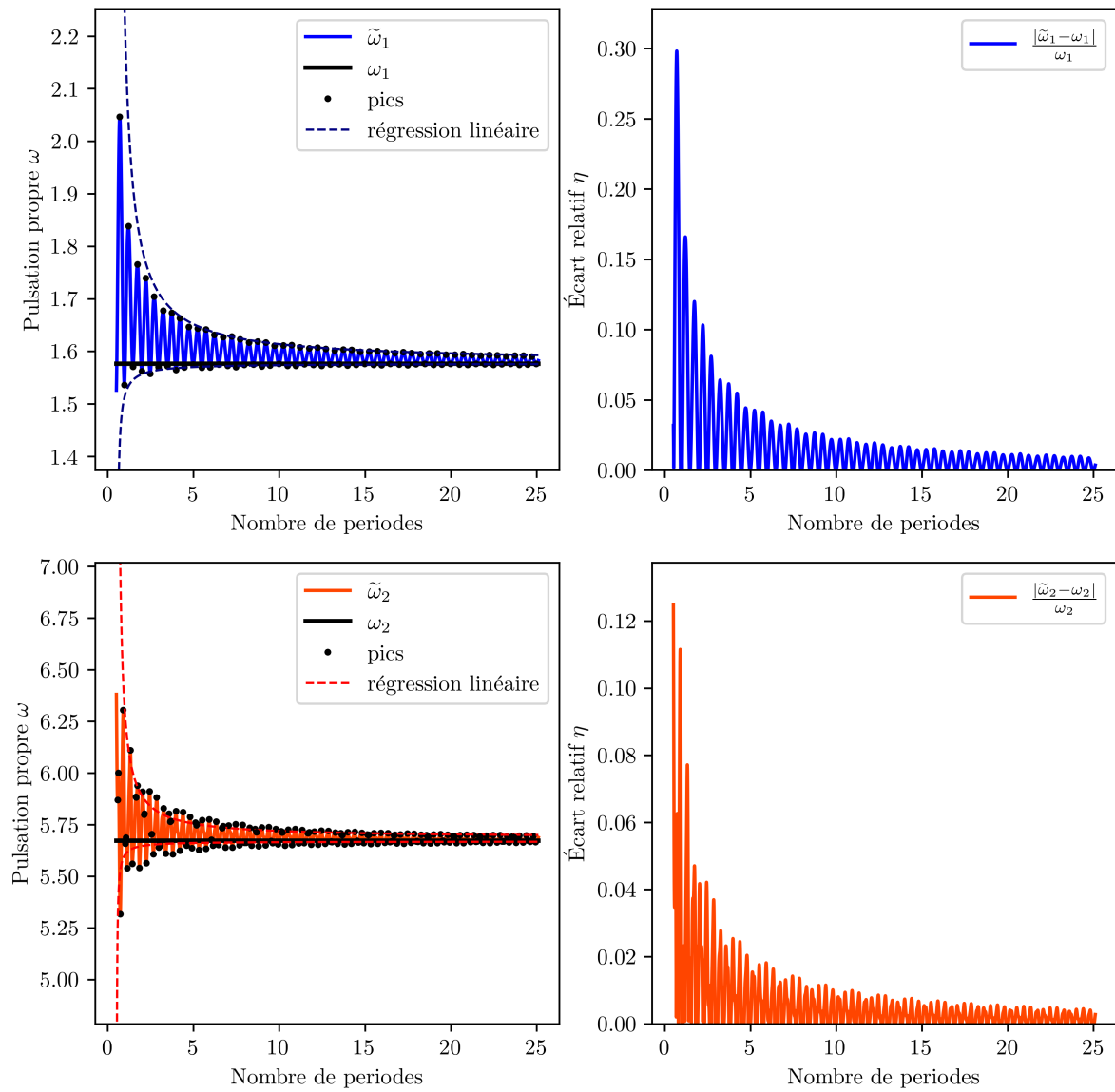


FIGURE 1 – Convergence des pulsations propres

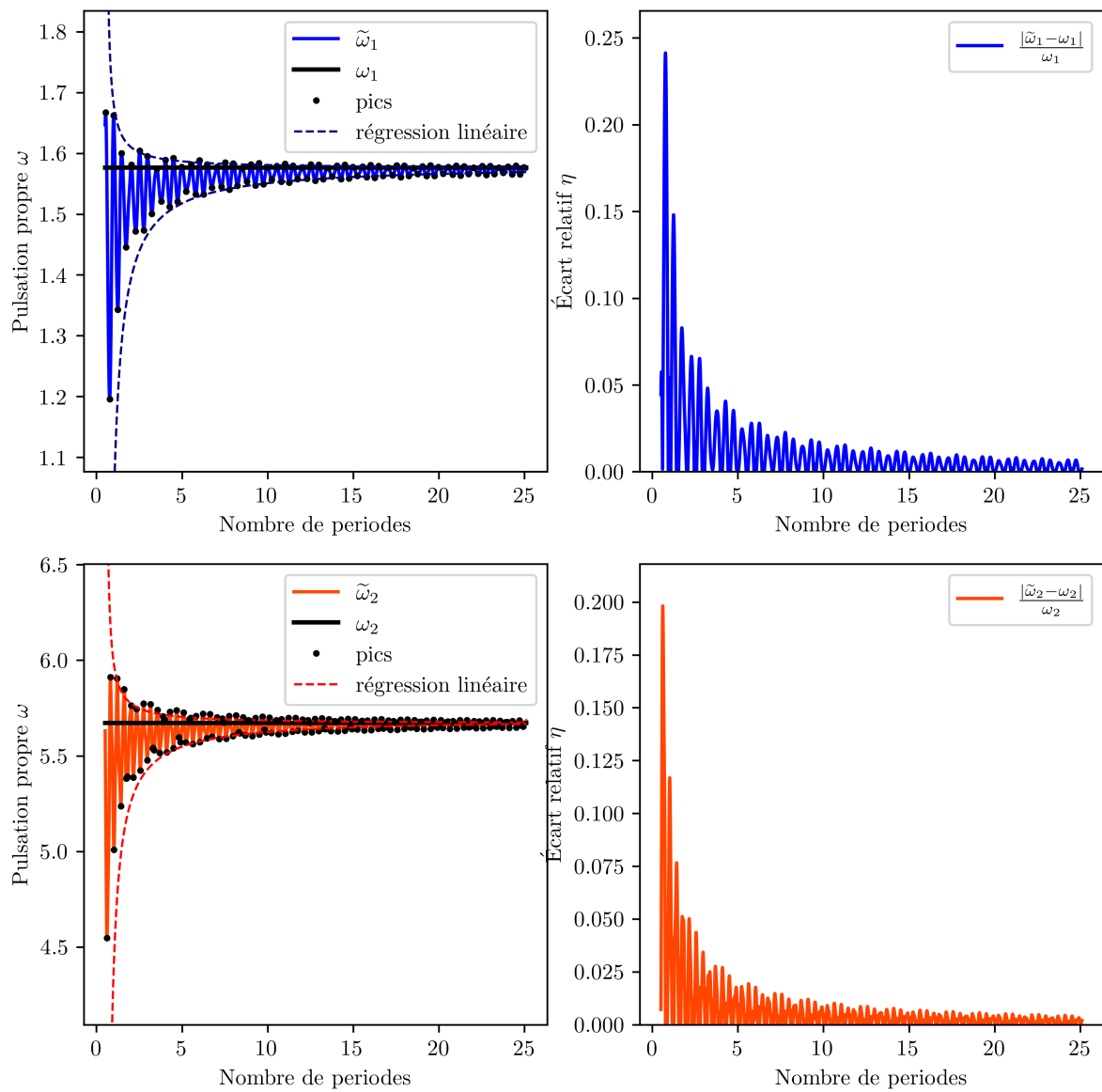


FIGURE 2 – Convergence des pulsations propres

Références

- [1] Peng L, Mohseni K, Symplectic model reduction of Hamiltonian systems, SIAM Journal of Scientific Computing, 38(1), A1-A27 (2016)