



**HAL**  
open science

# Représentation de comportements anélastiques en mécanique numérique pilotée par les données : proposition d'un modèle sous forme de graphe orienté

Héloïse Dandin, Adrien Leygue, Laurent Stainier

► **To cite this version:**

Héloïse Dandin, Adrien Leygue, Laurent Stainier. Représentation de comportements anélastiques en mécanique numérique pilotée par les données : proposition d'un modèle sous forme de graphe orienté. 25e Congrès Français de Mécanique, Nantes, Aug 2022, Nantes, France. hal-04281722

**HAL Id: hal-04281722**

**<https://hal.science/hal-04281722v1>**

Submitted on 13 Nov 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Représentation de comportements anélastiques en mécanique numérique pilotée par les données : proposition d'un modèle sous forme de graphe orienté

H. DANDIN<sup>a</sup>, A. LEYGUE<sup>b</sup>, L. STAINIER<sup>c</sup>

a. GeM, Ecole Centrale de Nantes, heloise.dandin@ec-nantes.fr

b. GeM, Ecole Centrale de Nantes, adrien.leygue@ec-nantes.fr

c. GeM, Ecole Centrale de Nantes, laurent.stainier@ec-nantes.fr

## Résumé :

*L'approche Data-Driven Computational Mechanics est étendue à des comportements anélastiques. La base de données matériau contient différentes histoires de chargement et est représentée par un graphe orienté, qui traduit la dépendance du comportement du matériau à l'histoire. Un arc orienté entre deux états de la base de données symbolise une transition, tandis que son absence traduit la condition d'irréversibilité.*

## Abstract :

*The Data-Driven Computational Mechanics approach is extended to inelastic behaviours. The material database contains several loading paths and is represented by a directed graph, which symbolises the dependence of the material behaviour on its history. An oriented edge between two states of the database stands for a transition, whereas its absence encodes the irreversibility condition.*

**Mots clés : data-driven, anélasticité, méthodes d'optimisation, science des données**

## 1 Introduction

Les moyens de production, de stockage et de traitement des données ont fortement évolué au cours des dernières décennies, permettant d'augmenter de manière considérable la quantité d'informations disponibles et exploitables, dans le domaine de la mécanique numérique notamment. De nouvelles méthodes pour la caractérisation et la simulation ont ainsi émergé, portées par les avancées de la science des données.

C'est dans ce contexte qu'une nouvelle approche, communément appelée *Data-Driven Computational Mechanics* (DDCM), a été introduite par Kirchdoerfer et Ortiz [1] il y a quelques années. En effet, une des problématiques de la mécanique des matériaux concerne les biais induits par les modèles de

comportement, lois mathématiques formulées de manière empirique à partir d'observations expérimentales et qui approximent la réponse du matériau. Ce concept a pour ambition de s'affranchir totalement de ces lois matériau, en intégrant les données brutes (expérimentales ou issues de simulations numériques par exemple) directement dans les calculs. Parallèlement, l'approche *Data-Driven Identification* (DDI) développée par Leygue *et al.* [2] permet d'identifier des couples déformation-contrainte à partir de mesures de champs expérimentales.

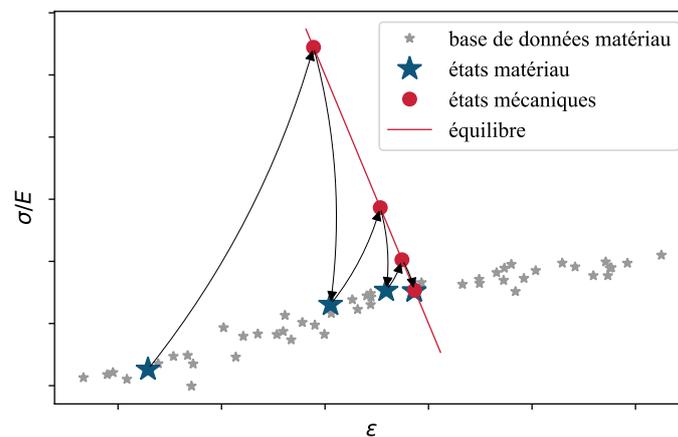


FIGURE 1 – Illustration de la méthode DDCM (cas unidimensionnel élastique)

Un cadre pour l'extension de la méthode initiale a récemment été proposée par Eggersmann *et al.* [3] aux comportements anélastiques, pour lesquels la réponse mécanique est caractérisée par une forte dépendance à l'histoire passée de déformation. L'extension de l'espace constitutif qui en résulte se traduit par une augmentation de la taille de la base de données matériau, dont la manipulation nécessite alors la mise en œuvre de méthodes adaptées.

Dans un premier temps, on présentera les fondements théoriques de l'approche DDCM en élasticité (linéaire ou non), ainsi que l'extension aux comportements anélastiques. Dans un second temps, l'utilisation de graphes orientés pour représenter la base de données matériau sera développée. Enfin, on conclura sur l'efficacité de la méthode et les perspectives envisagées.

## 2 Formulation du problème *data-driven*

On considère un solide anélastique et sa représentation discrète  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  constituée de  $N$  nœuds et  $M$  points d'intégration, soumise à des déplacements  $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_a\}_{a=1}^N$  et des efforts  $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_a\}_{a=1}^N$ . A chaque point d'intégration  $e$  du maillage est associé un état local  $\mathbf{z}_e = (\boldsymbol{\varepsilon}_e, \boldsymbol{\sigma}_e) \in \mathcal{Z}_e$  qui le caractérise, avec  $\mathcal{Z}_e$  l'espace des phases local tel que  $\mathcal{Z}_e = \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . L'état global  $\mathbf{z} = \{(\boldsymbol{\varepsilon}_e, \boldsymbol{\sigma}_e)\}_{e=1}^M \in \mathcal{Z}$  représente le système dans l'espace des phases global  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 \times \dots \times \mathcal{Z}_M$ .

L'état interne du système est soumis aux contraintes de compatibilité et d'équilibre, qui sont décrites au pas de chargement  $k$  par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{e,k} = \mathbf{B}_e \mathbf{u}_k, \forall e = 1 \dots M, & (1a) \\ \sum_{e=1}^M \mathbf{w}_e \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_{e,k} = \mathbf{f}_k, & (1b) \end{cases}$$

avec  $w_e$  le volume des éléments et  $B_e$  la matrice opérateur cinématique discrétisé relative au point d'intégration  $e$ . Un ensemble  $\mathcal{E}_k$  peut être défini par :

$$\mathcal{E}_k = \{z \in \mathcal{Z} \mid (1a) \text{ et } (1b)\} \subset \mathcal{Z}, \quad (2)$$

qui contient les états mécaniquement admissibles au pas de chargement  $k$ , où le symbole  $\mid$  signifie « tel que », « étant donné » .

En élasticité, le système (1) est généralement résolu en postulant une relation de comportement de la forme  $\sigma = \tilde{\sigma}(\varepsilon)$ . Dans l'approche *data-driven* en revanche, la réponse du matériau est décrite par un ensemble discret d'états pouvant être issus d'essais expérimentaux ou de simulations numériques multi-échelles. L'ensemble local des données matériau s'écrit alors :

$$\mathcal{D}_e = \{y_i = (\varepsilon_i, \sigma_i) \mid i \in [1 \dots N^*]\} \subset \mathcal{Z}_e, \quad (3)$$

pour un nombre  $N^*$  fini de couples matériau déformation-contrainte, et donne finalement la base de données matériau globale  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_M \subset \mathcal{Z}$ .

Au pas  $k$ , la réponse du matériau étant fonction de son histoire, les états matériau  $y_{e,k}$  atteignables au point d'intégration  $e$  dépendent des solutions  $\{y_{e,l}\}_{l < k}$  précédemment obtenues. L'ensemble matériau local instantané est donc :

$$\mathcal{D}_{e,k} = \{(\varepsilon_{e,k}, \sigma_{e,k}) \mid \text{histoire passée locale}\} \subset \mathcal{Z}_e, \quad (4)$$

et la base de données matériau globale instantanée est  $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{1,k} \times \dots \times \mathcal{D}_{M,k}$ .

La méthode DDCM consiste à minimiser de manière alternée la distance entre les états mécaniques  $z_{e,k} \in \mathcal{E}_k$  (c'est-à-dire cinématiquement et statiquement admissibles) d'une part, et les états matériau  $y_{e,k} \in \mathcal{D}_{e,k}$  d'autre part. Pour cela, on associe une norme à l'espace des phases local  $\mathcal{Z}_e$ ,

$$\|z_{e,k}\|_{\mathbb{C}_e}^2 = \frac{1}{2} ((\mathbb{C}_e : \varepsilon_{e,k}) : \varepsilon_{e,k} + (\mathbb{C}_e^{-1} : \sigma_{e,k}) : \sigma_{e,k}), \quad (5)$$

où  $\{\mathbb{C}_e\}_{e=1}^M$  sont des tenseurs d'ordre 4 définis positifs, paramètres algorithmiques dont le choix est laissé à l'utilisateur. La distance entre deux états  $z_{e,k}, y_{e,k} \in \mathcal{Z}_e$  est donc :

$$d_e(z_{e,k}, y_{e,k}) = \sqrt{\|z_{e,k} - y_{e,k}\|_{\mathbb{C}_e}^2}, \quad (6)$$

et l'extension à l'espace des phases global donne naturellement la norme

$$\|z_k\|_{\mathbb{C}}^2 = \sum_{e=1}^m w_e \|z_{e,k}\|_{\mathbb{C}_e}^2 \quad (7)$$

et la distance

$$d(z_k, y_k) = \sqrt{\|z_k - y_k\|_{\mathbb{C}}^2}. \quad (8)$$

Le problème *data-driven* peut ainsi être reformulé en un problème de double minimisation dont la

solution est donnée par :

$$\mathcal{S} = \arg \min_{\mathbf{z}_k \in \mathcal{E}_k} \min_{\mathbf{y}_k \in \mathcal{D}_k} d(\mathbf{z}_k, \mathbf{y}_k) = \arg \min_{\mathbf{z}_k \in \mathcal{E}_k} d(\mathbf{z}_k, \mathcal{D}_k). \quad (9)$$

Il combine ainsi des minimisations sur des variables à valeurs continues ( $\mathbf{z}_k$ ) et des variables à valeurs discrètes ( $\mathbf{y}_k$ ), et est typiquement résolu par une méthode de minimisation alternée jusqu'à l'obtention d'un point fixe. La principale difficulté dans le cas anélastique réside dans l'identification de la base de données matériau instantanée  $\mathcal{D}_k$ , et notamment la condition « étant donnée l'histoire passée locale » de l'équation (4).

### 3 Graphe orienté pour la représentation du comportement anélastique

Un graphe est un outil destiné à représenter les relations (des *arêtes*) entre des objets (des *nœuds*). Par le biais d'algorithmes associés, il permet de résoudre de nombreux types de problèmes. Afin de traduire numériquement la dépendance du matériau anélastique à son histoire, on propose d'associer à la base de données matériau un graphe orienté (c'est-à-dire un graphe dont les arêtes sont orientées, on parle alors d'*arcs*). Cette section décrit le modèle utilisé.

#### 3.1 Base de données matériau et graphe associé

Pour illustrer le principe, on considère un comportement élasto-plastique avec un écrouissage isotrope linéaire. Une base de données unidimensionnelle discrète est générée artificiellement à partir de plusieurs histoires de chargement (voir figure 2).

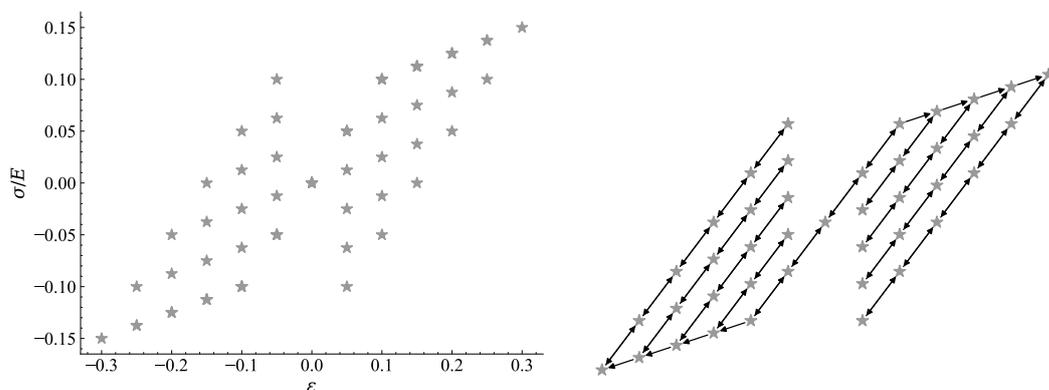


FIGURE 2 – Exemple de base de données matériau pour un comportement élasto-plastique (à droite) et graphe associé (à gauche)

La figure 2 montre le graphe orienté associé à la base de données, dont les nœuds correspondent aux états matériau ( $\varepsilon, \sigma$ ). Une double flèche symbolise une transition élastique entre deux états (la transition d'un nœud à l'autre est possible, et vice-versa); une transition plastique est représentée par une flèche simple (la transition est possible uniquement de l'extrémité initiale vers l'extrémité terminale de l'arc).

Au premier pas de temps, la racine du graphe est l'origine de toutes les histoires de chargement, soit l'état  $(\varepsilon, \sigma) = (0, 0)$ . Pour un état  $z_{e,k}$  donné au pas de temps  $k$ , les états qui constituent la base de données  $\mathcal{D}_{e,k+1}$  sont donc les états du sous-graphe de racine  $z_{e,k}$  atteignables à l'instant  $k + 1$ , c'est-à-

dire tous les nœuds accessibles à partir du nœud  $z_{e,k}$ , étant donnée l'orientation des arcs, comme illustré figure 3.

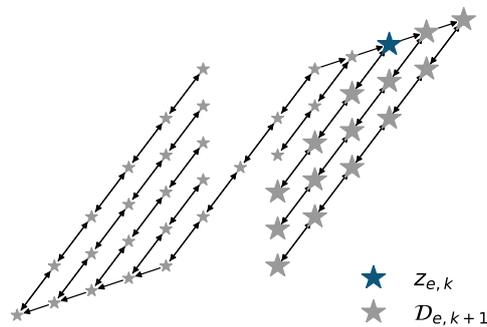


FIGURE 3 – Base de données matériau locale  $D_{e,k+1}$  étant connu l'état matériau  $z_{e,k}$

### 3.2 Application à un treillis

On s'intéresse à un treillis composé de trois barres à un point d'intégration chacune (fig. 4). Le nœud de coordonnées A est encastéré, tandis que le nœud C est laissé libre suivant la direction  $\vec{x}$ . Un déplacement  $\vec{u}_D = u_{D,x} \vec{x} + u_{D,y} \vec{y}$  tel que  $u_{D,x} = -1/3 u_{D,y}$  est imposé incrémentalement sur le nœud B, avant décharge.

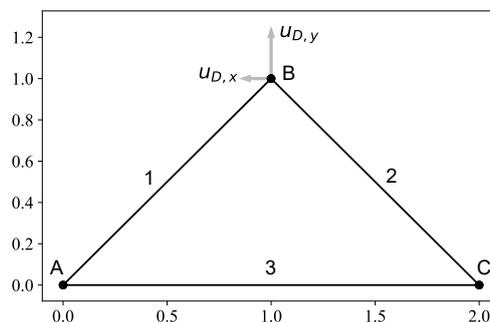


FIGURE 4 – Géométrie du treillis et déplacement imposé

Le calcul est effectué avec une base de données matériau issue d'une simulation éléments finis conduite sur le même modèle, pour un comportement élasto-plastique avec écrouissage isotrope linéaire tel que :

$$\sigma_y(p) = H \cdot p + \sigma_{y0},$$

où  $\sigma_{y0} = 0.1$  MPa est la limite élastique et  $p$  la déformation plastique cumulée. Le module d'Young est  $E = 1$  MPa et le module d'écrouissage vaut  $H = E/3$ .

La figure 5 montre le résultat de la simulation. Les barres 1 et 2 sont chargées plastiquement, alors que la barre 3 se déforme seulement élastiquement. La solution du problème est donnée, pour chaque élément et à tous les pas de chargement, par les états mécaniques. Dans l'exemple présenté ici, la base de données utilisée contenant la solution exacte du problème, les états mécaniques et matériau sont quasiment superposés. L'approche DDCM couplée à un graphe orienté permet de détecter l'éventuelle plastification des éléments, ainsi que le chemin de décharge correspondant au taux d'écrouissage du matériau.

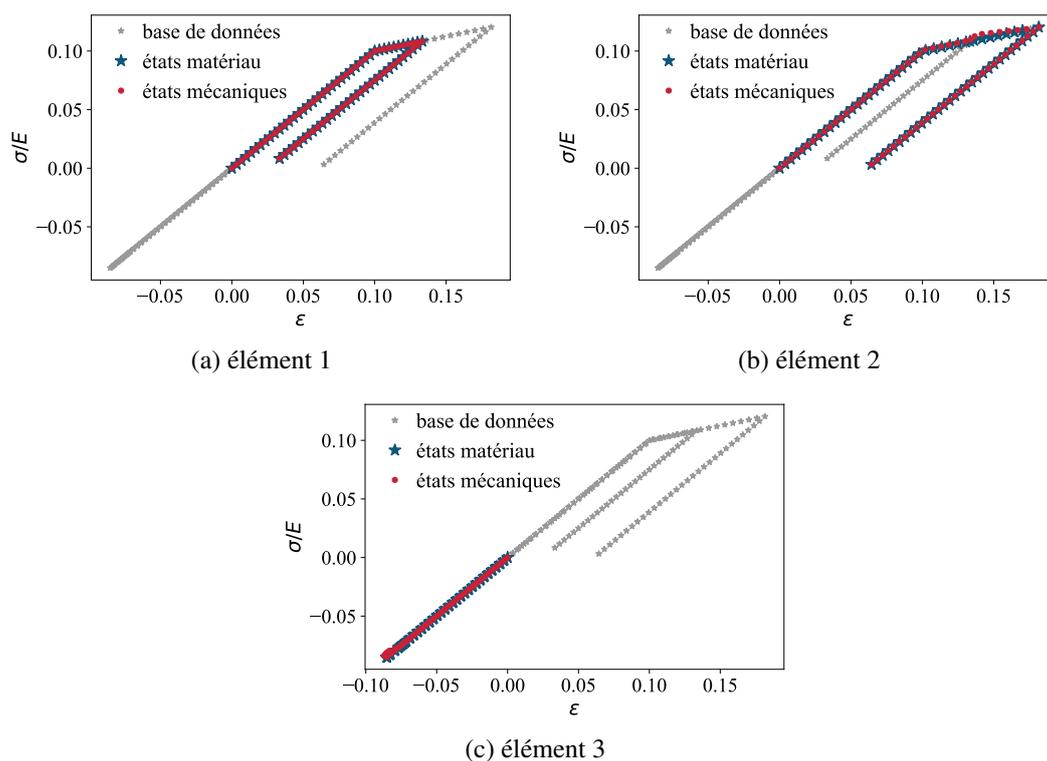


FIGURE 5 – Solution du calcul DDCM : états mécaniques, matériau et base de données matériau

## 4 Discussion et perspectives

L'exemple d'application 5 montre un comportement caractérisé par sa simplicité (comportement élastoplastique avec écrouissage linéaire, données matériau non bruitées, discrétisation identique des différentes histoires de chargement). Grâce à ces hypothèses, la construction du graphe associé à la base de données matériau est triviale. En revanche, cette étape, ainsi que l'étape de détermination de la base de données matériau locale, sont identifiées comme coûteuses en termes de temps de calcul, et constituent un des enjeux majeurs pour l'extension de la méthode à un cadre plus général.

Une approche thermodynamique permet de caractériser la dissipation intrinsèque générée par la transition entre deux états d'une histoire de chargement, et ainsi de déterminer le caractère (irr-)réversible d'une transition dans un espace bi- ou tridimensionnel. Cette approche fournit également un cadre pour l'intégration des variables internes du comportement étudié dans le calcul *data-driven*. Ces quantités thermodynamiques peuvent être obtenues plus ou moins aisément selon la méthode d'acquisition des données matériau, mesures expérimentales ou calcul multi-échelles.

## Références

- [1] T. Kirchdoerfer, M. Ortiz, Data-driven computational mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 304 (2016) 81–101.
- [2] A. Leygue, M. Coret, J. Réthoré, L. Stainier, E. Verron, Data-based derivation of material response, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 331 (2018) 184-196.
- [3] R. Eggersmann, T. Kirchdoerfer, S. Reese, L. Stainier, M. Ortiz, Model-Free Data-Driven inelasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 350 (2019) 81–99.