



**HAL**  
open science

# Régularisation de Lipschitz pour la modélisation de la fissuration par l'endommagement

Nicolas Chevaugeon, Nicolas Moes

► **To cite this version:**

Nicolas Chevaugeon, Nicolas Moes. Régularisation de Lipschitz pour la modélisation de la fissuration par l'endommagement. 25e Congrès Français de Mécanique, Aug 2022, Nantes, France. hal-04281708

**HAL Id: hal-04281708**

**<https://hal.science/hal-04281708v1>**

Submitted on 13 Nov 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Régularisation de Lipschitz pour la modélisation de la fissuration par l'endommagement

N. CHEVAUGEON<sup>a</sup>, N. MOËS<sup>b,c</sup>

a. École Centrale Nantes, GeM, UMR 6183, 44321 Nantes, France, nicolas.chevaugeron@ec-nantes.fr

b. École Centrale Nantes, GeM, UMR 6183, 44321 Nantes, France, nicolas.moes@ec-nantes.fr

c. Institut Universitaire de France (IUF)

**Mots clés :** endommagement, localisation, régularisation, fissure, Lip-field.

## Introduction

La mécanique de la rupture a une longue histoire, commençant sans doute avec Griffith [11]. Le modèle de fissure de Griffith considère qu'une fissure est une surface qui évolue par le déplacement d'une ligne (le front), laissant derrière elle les lèvres de la fissure au travers de laquelle des sauts de déplacements (l'ouverture) sont autorisés. Dans ce modèle, l'énergie dissipée est proportionnelle à l'augmentation de surface des lèvres. Ce modèle permet de prédire la propagation d'une fissure existante mais ne dit rien sur l'initiation ou le branchement. Il a depuis été étendu dans deux principales directions : les modèles de zones cohésives et les modèles d'endommagement diffus. Dans les deux cas, une longueur caractéristique est introduite.

Dans la présente contribution, nous nous plaçons dans le cadre des modèles d'endommagement diffus régularisés. Ces types de modèles ont l'avantage de permettre des schémas de fissuration complexes, comprenant la nucléation, le branchement et la coalescence tout en fournissant des résultats dépendant faiblement de l'orientation des éléments du maillage utilisé pour discrétiser le problème. Les modèles d'endommagement diffus considèrent une relation contrainte-déformation locale, affectée d'une variable d'endommagement  $d$  en chaque point, modélisant la perte de raideur du matériau. Le modèle local doit ensuite être régularisé pour éviter une localisation "parasite" de l'endommagement, rendant les résultats sensibles au maillage et qui, à la limite où la taille des mailles tend vers zéro, prédisent la rupture complète sans dissipation d'énergie.

Ces trente dernières années, un grand nombre de techniques de régularisation ont été proposées, entre autres : les modèles non-locaux intégraux [22, 16]; les modèles à second gradient cinématique [1, 23]; les modèles à gradient d'endommagement [9, 21, 20]; les modèles fondés sur la régularisation d'un problème de minimisation dans l'approche variationnelle de la fissuration [8, 5, 6]; l'approche à champs de phase (phase-field) provenant de la communauté physicienne [14] puis transposée à la mécanique de l'endommagement [3, 17, 15, 2]; l'approche péri-dynamique [24, 13]; ou encore l'approche par "Level-Set épaisse" [19].

Dans cette contribution, nous proposons une nouvelle approche diffuse pour la fissuration fondée sur une régularisation Lipschitzienne de la variable responsable de l'adoucissement dans le modèle matériel. Introduite dans [18] et [7] pour les matériaux endommageable, le modèle impose une contrainte de

continuité Lipschitzienne qui peut se visualiser comme une limite à l'écart entre les valeurs de la variable d'endommagement entre tout couple de point matériel, dépendante de la distance entre ces deux points et d'une longueur caractéristique  $l$ . Le modèle Lip-field diffère des modèles à gradient d'endommagement ou des modèles à champs de phase au niveau de l'expression de l'énergie libre du matériau qui ne dépend pas ici du gradient d'endommagement, mais uniquement de la déformation et de l'endommagement au point matériel considéré. Le problème est formulé comme une minimisation d'un potentiel incrémental, identique à ceux des modèles locaux non-régularisés, mais sous contrainte une supplémentaire de Lipschitz.

Dans la prochaine section, une formulation classique d'un modèle d'endommagement est présentée dans sa forme non-régularisée, discrétisée en temps. La section 2 introduit la régularisation de Lipschitz ainsi que sa discrétisation spatiale, avant de présenter des exemples de simulations réalisées avec notre modèle dans la section 3. Nous concluons ensuite par une discussion des résultats obtenus et proposons des pistes de développement.

## 1 Modèle local (Non-régularisé)

On considère la déformation d'un corps, occupant initialement le domaine  $\Omega$ , sous un champ de déplacement  $\mathbf{u}$ . On suppose les déformations petites et quasistatiques. La contrainte de Cauchy est notée  $\boldsymbol{\sigma}$ , et la déformation linéarisée  $\boldsymbol{\epsilon}$

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (1)$$

Le déplacement est contrôlé sur une partie de la frontière notée  $\Gamma_u$ , les tractions sont nulles sur le reste de la frontière. L'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles est noté  $U(t)$  :

$$U(t) = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) : \mathbf{u} = \mathbf{u}_d(t) \text{ sur } \Gamma_u\} \quad (2)$$

L'équation d'équilibre s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) \, d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{u}^* \in U^*, \quad U^* = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) : \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_u\} \quad (3)$$

Les équations (2-3) sont fermées par le modèle de comportement, où nous utilisons le formalisme des matériaux standards généralisés [12, 10]. L'unique variable interne que nous considérons ici est l'endommagement, noté  $d$ . Le modèle est caractérisé par un potentiel d'énergie libre  $\varphi(\boldsymbol{\epsilon}, d)$  et un potentiel de dissipation  $\psi(\dot{d}, d)$ .

La discrétisation temporelle est choisie implicite et nous utilisons l'approche variationnelle. Considérons le déplacement et la variable interne  $(\mathbf{u}_n, d_n)$  comme connus à l'instant  $t_n$ . Calculer la paire  $(\mathbf{u}_{n+1}, d_{n+1})$  à l'instant suivant  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  se résume à un problème de minimisation :

$$(\mathbf{u}_{n+1}, d_{n+1}) = \arg \min_{\substack{\mathbf{u}' \in U_n \\ d' \in A_n}} F(\mathbf{u}', d'; \mathbf{u}_n, d_n, \Delta t) \quad (4)$$

où  $U_n$  est  $U(t_{n+1})$  et  $A_n$  le domaine dans lequel doit se trouver  $d_{n+1}$ , représentant une contrainte sur  $d$ .

Par souci de simplicité, nous considérons ici des modèles indépendants du temps. Dans ce cas, l'expression de  $F$  ne dépend pas explicitement de  $\mathbf{u}_n, d_n$  et  $\Delta t$ . Pour alléger les notations, on se dispensera dans

la suite des indices  $n + 1$  Le problème de minimisation devient alors :

$$(\mathbf{u}, d) = \arg \min_{\substack{\mathbf{u}' \in U_n \\ d' \in A_n}} F(\mathbf{u}', d') \quad (5)$$

La contrainte sur  $d$  est donnée par l'irréversibilité et une valeur limite de 1 :

$$A_n = \{d \in L^\infty(\Omega) : d_n \leq d \leq 1\} \quad (6)$$

En ce qui concerne l'expression de  $F$ , nous considérons l'expression suivante :

$$F(\mathbf{u}, d) = \int_{\Omega} \varphi(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), d) + Y_c h(d) d\Omega \quad (7)$$

Où  $Y_c$  est l'énergie critique et  $h(d)$  est choisie comme  $h(d) = 2d + 3d^2$ . L'énergie libre utilisée dans nos modèles est exprimée ci-dessous, dans le cas des déformations planes :

$$\varphi(\boldsymbol{\epsilon}, d) = \phi_0(\boldsymbol{\epsilon}) + g(d)\phi_1(\boldsymbol{\epsilon}) + Y_c h(d) \quad (8)$$

avec

$$\phi_0(\boldsymbol{\epsilon}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \epsilon_1 \geq 0, \epsilon_2 \geq 0 \\ \mu(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2) & \text{if } \epsilon_1 < 0, \epsilon_2 < 0 \\ \mu\epsilon_1^2 & \text{if } \epsilon_1 < 0, \epsilon_2 \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\phi_1(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{\lambda}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 + \begin{cases} \mu(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2) & \text{if } \epsilon_1 \geq 0, \epsilon_2 \geq 0 \\ 0 & \text{if } \epsilon_1 < 0, \epsilon_2 < 0 \\ \mu\epsilon_2^2 & \text{if } \epsilon_1 < 0, \epsilon_2 \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$(11)$$

Où  $\mu$  et  $\lambda$  sont les coefficients de Lamé,  $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$ , sont les valeurs propres non nulles de  $\boldsymbol{\epsilon}$ .

Plusieurs choix sont possibles pour  $g(d)$ , fonction convexe de  $d \in [0, 1]$ . Dans le présent travail, nous considérons :

$$g(d) = (1 - d)^2 + \eta(1 - d)d^3 \quad (12)$$

Avec  $\eta \in [0, 1/3]$ ,  $\eta$  permettant  $d = 1$  pour une déformation finie, dès lors que  $\eta > 0$

## 2 régularisation Lipschitzienne et discrétisation

Pour un champ  $d$  sur  $\Omega$ , la constante de Lipschitz associée, est la valeur minimum de  $M$  tel que :

$$|d(\mathbf{x}) - d(\mathbf{y})| \leq M \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \quad (13)$$

où  $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est la longueur minimale des chemins dans  $\Omega$  joignant  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ . La valeur  $M$  dépend de  $d$  et est notée  $\text{lip}(d)$ .

Nous définissons ensuite l'espace régularisant pour  $d$  comme :

$$\mathcal{L}_{\Omega,l} = \{d \in L^\infty(\Omega) : \text{lip}(d) \leq 1/l\} \quad (14)$$

Où  $l$  est la longueur de régularisation. On note que l'ensemble  $\mathcal{L}_{\Omega,l}$  est convexe. Sous cette contrainte, l'équation 5 devient :

$$(\mathbf{u}, d) = \arg \min_{\substack{\mathbf{u}' \in U_n \\ d' \in A_n \cap \mathcal{L}_{\Omega,l}}} F(\mathbf{u}', d') \quad (15)$$

La fonction à minimiser, avec les choix que l'on a faits pour le modèle local, est convexe en  $u$  et en  $d$  séparément, et l'ensemble dans lequel on cherche  $d$  ( $A_n \cap \mathcal{L}_{\Omega,l}$ ) est convexe.

Une stratégie naturelle pour obtenir un point stationnaire et donc un point d'équilibre (possiblement instable) est donc de minimiser alternativement sur  $\mathbf{u}$  à  $d$  fixé puis  $d$  à  $\mathbf{u}$  fixé, jusqu'à convergence vers un point stationnaire. La minimisation sur  $\mathbf{u}$  est conventionnelle, une fois discrétisée elle conduit à un problème élément fini d'élasticité linéaire pour le modèle symétrique et non-linéaire pour le cas asymétrique.

La seconde minimisation, à  $\mathbf{u}$  fixé est moins standard dans le contexte de la mécanique :

$$d = \arg \min_{d' \in A_n \cap \mathcal{L}_{\Omega,l}} F(\mathbf{u}, d') \quad (16)$$

où  $\mathbf{u}$  est un champ connu, à l'itéré courant. Il s'agit donc de minimiser une fonction convexe sur un domaine convexe. Pour pouvoir continuer il va nous falloir construire un équivalent discret de la contrainte de Lipschitz (nous dirons dans la suite Contrainte de Lip).

Du côté du déplacement, comme mentionné plus haut, nous considérons l'espace élément fini discret classique du premier ordre sur une discrétisation géométrique  $\Omega^h$ , un maillage de triangle de  $\Omega$ . La variable d'endommagement est définie au centre de gravité de chaque élément, de manière classique pour une variable interne. Pour exprimer une contrainte de Lip discrète, nous construisons un second maillage, le maillage Lip  $\Delta^h$ , reliant les centres de gravité des éléments de  $\Omega^h$ , comme représenté sur la figure 1. Sur  $\Delta^h$  une approximation élément finie du champ  $d$  est construite, où  $d$  est considéré linéaire par élément.

La condition de Lipschitz sur le problème continue rappelée ci-dessous, fait intervenir un nombre infini de contraintes puisque chaque paire de points doit être considérée :

$$\mathcal{L}_{\Omega,l} = \{d \in L^\infty(\Omega) : |d(\mathbf{x}) - d(\mathbf{y})| \leq \frac{1}{l} \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega\} \quad (17)$$

Pour transcrire cette contrainte au niveau discret, nous considérons ici 3 choix possibles. Les ensembles des noeuds (vertex), arêtes (edge) et triangles du maillage  $\Delta^h$  sont notés respectivement  $V$ ,  $E$  and  $T$ .

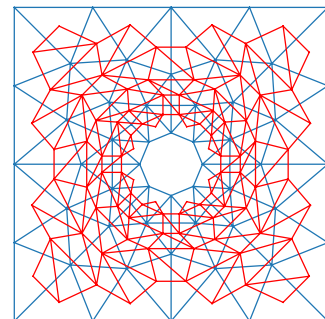


FIGURE 1 – Maillage pour le champs de déplacement ( $\Omega^h$ ) en bleu et le maillage Lip  $\Delta^h$  pour le champs  $d$  en rouge.

$$\mathcal{L}^h = \{d \in D^h(\Delta^h) : |d(\mathbf{x}) - d(\mathbf{y})| \leq \frac{1}{l} \text{dist}_{\Delta^h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V\} \quad (18)$$

$$\mathcal{L}^{h-} = \{d \in D^h(\Delta^h) : \|\nabla d\| |t| \leq \frac{1}{l}, \quad \forall t \in T\} \quad (19)$$

$$\mathcal{L}^{h+} = \{d \in D^h(\Delta^h) : |d(\mathbf{x}) - d(\mathbf{y})| \leq \frac{1}{l} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E\} \quad (20)$$

Où  $\text{dist}_{\Delta^h}$  dénote la longueur du chemin le plus court entre 2 noeuds, restant à l'intérieur de  $\Delta^h$ . Comme dans le cas continu, les 3 espaces discrets considérés sont convexes, et on prouve facilement que :

$$\mathcal{L}^{h-} \subset \mathcal{L}^h \subset \mathcal{L}^{h+} \quad (21)$$

Le choix  $\mathcal{L}^h$  est naturel au sens où il imite la contrainte continue, aux points où l'endommagement est utilisé pour calculer l'énergie dans la minimisation sur  $\mathbf{u}$ . Mais le nombre de contrainte à vérifier est trop grand ( $O(n^2)$  avec  $n$  le nombre de noeud de  $\Delta^h$ ). Le choix  $\mathcal{L}^{h+}$  à l'avantage de la facilité d'implémentation, mais est une relaxation trop forte de  $\mathcal{L}^h$  qui conduit à une forte dépendance du résultat à la direction des arêtes. Le choix  $\mathcal{L}^{h-}$  est intéressant dans le sens où il conduit à un nombre de contraintes égale au nombre de triangle, et au vu des relations d'inclusions 21, tout champ  $d \in \mathcal{L}^{h-}$  est aussi dans  $\mathcal{L}^h$ , vérifiant donc la contrainte discrète "naturelle".

Avec le choix précédent, la version discrète de la minimisation 16

$$d = \arg \min_{d' \in A_n^h \cap \mathcal{L}^{h-}} F(\mathbf{u}', d') \quad (22)$$

où  $\mathbf{u}'$  est le minimiseur du problème à  $d$  fixé de l'itération précédente, et  $A_n^h$  impose l'irréversibilité et la borne supérieure de  $d$  aux noeuds :

$$A_n^h = \{d \in D^h(\Delta^h) : d_n(V_i) \leq d(V_i) \leq 1 \quad \forall V_i \in V\} \quad (23)$$

Le problème discret ci-dessus est donc un programme non-linéaire, avec des contraintes d'inégalités linéaires par rapport à des cônes d'ordre 1 pour les contraintes correspondant à  $A_n^h$  et à des cônes d'ordre 2 pour la contrainte de Lip correspondant à  $\mathcal{L}^{h-}$ . Il peut donc se mettre sous une forme standard et nous avons utilisé le package `cvxopt` [4] qui implémente une méthode de point intérieur pour résoudre le problème.

### 3 Résultats numérique

Deux exemples numériques sont présentés. Ils sont traités en déformation plane et en petites déformations. Ils ont été obtenus à l'aide des scripts python disponibles sur le dépôt git suivant : <https://gitlab.com/c4506/lipfield>

### 3.1 Comparaison avec une analyse de Griffith.

La géométrie décrite dans la figure 2 est utilisée pour étudier la propagation d'une fissure. Cette géométrie est inspirée de la forme classique du TDCB (Tapered Double Cantilever Beam) qui assure une croissance stable de la fissure par rapport à un chargement à déplacement croissant.

units	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$R$	$E$	$\nu$	$K_{Ic}$	$\eta$
mm	100	12	20	24	70	90	24	5	4	3500 MPa	0.32	1.4 MPa $\sqrt{m}$	0.1

TABLE 1 – TDCB paramètres géométriques et matériaux pour l'essai TDCB

Les dimensions définissant cette géométrie ainsi que les paramètres du modèle matériau sont données dans le tableau 1.

Le spécimen TDCB est chargé par un mouvement de corps rigide linéarisé sur le bord des deux trous : Ils sont libres en rotation autour de leur centre, celui du bas est fixé, tandis que celui du haut à un mouvement vertical imposé par le paramètre de chargement  $u$ . Nous faisons l'hypothèse classique de déformation plane et de petite déformation. Lors du chargement, on s'attend à ce qu'une fissure se développe à la pointe de l'entaille et se propage le long de l'axe médian de l'échantillon TDCB, que l'on appellera le chemin de fissure. Pour une première validation de l'approche Lip-field pour l'endommagement fragile, nous comparerons nos résultats avec une analyse de mécanique de la rupture élastique linéaire, en utilisant un critère de Griffith.

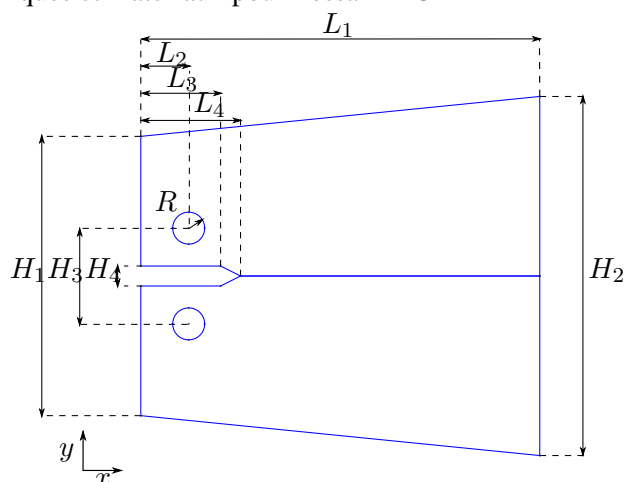


FIGURE 2 – TDCB définition de la géométrie

**Griffith** Selon le critère de Griffith, la fissure doit se propager si le taux de libération d'énergie élastique par unité de longueur de fissure  $G$  est égal à  $G_c$ , où  $G_c$  est un paramètre matériel : le taux de restitution d'énergie critique. Dans l'hypothèse d'une déformation plane, pour un matériau isotrope-élastique, nous avons

$$G_c = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{Ic}^2 \quad (24)$$

Afin de calculer la courbe charge-déplacement ( $F(u)$ ) et la longueur de fissure ( $a(u)$ ) sous l'hypothèse de Griffith, nous avons appliqué l'approche suivante. Le maillage est construit en deux parties symétriques le long du chemin de fissure, de sorte que les nœuds sur la ligne de fissure sont régulièrement espacés de  $h$ . Le maillage de la partie supérieure et celui de la partie inférieure sont déconnectés, mais les nœuds de chaque partie sont aux mêmes positions géométriques sur le chemin de fissure. Les nœuds sont connectés en utilisant un multiplicateur de Lagrange pour imposer le même déplacement sur les deux parties à chacun de ces nœuds, sur la section du chemin de fissure à droite de la fissure réelle. Avec cette configuration, nous pouvons facilement calculer le champ de déplacement d'équilibre  $\mathbf{u}$  et l'énergie de déformation  $e$  dans l'éprouvette TDCB en utilisant la méthode standard des éléments finis, pour différentes longueurs de fissures et un déplacement unitaire  $u$ . Pour chaque longueur de fissure  $a$ ,

correspondant à un nombre de nœuds non connectés sur le chemin de la fissure, nous pouvons calculer le taux de libération d'énergie  $G_1(u)$  pour le déplacement unitaire, en utilisant une approximation centrée :

$$G_1(a) = \frac{e_1(a+h) - e_1(a-h)}{2h} \quad (25)$$

où  $e_1(a)$  est l'énergie de déformation à l'équilibre pour la fissure de longueur  $a$  et un déplacement imposé  $u = 1$ . Puisque  $G$  est clairement une fonction quadratique de  $u$ , nous pouvons calculer pour chaque valeur de  $a$  la valeur de  $u_c$  puis de  $f_c$  pour laquelle  $G = G_c$ , et tracer les courbes  $F(u)$  et  $a(u)$  pour le cas de l'analyse de Griffith.

**Lip-field** Afin de comparer les analyses de Griffith et Lip-field, nous devons paramétrer le modèle d'endommagement pour qu'il soit énergétiquement équivalent à celui de Griffith. En supposant que lorsque l'endommagement se localise sous la forme d'une fissure, et que  $d$  sature la contrainte de Lipschitz et atteint 1 sur le chemin de la fissure, la fonction  $d(y)$  sur une ligne perpendiculaire au chemin de la fissure peut être approximée par un profil triangulaire de pente  $1/l$  :  $d(y) = \frac{\max(l-|y|,0)}{l}$ , où  $y$  est la distance au chemin de la fissure. On peut alors évaluer l'énergie dissipée par unité d'avancement de la fissure par  $G_c = Y_c \int_{-l}^l h(d(y)) dy = 4Y_c l$ . Dans les simulations, nous fixons  $l$  de manière à avoir suffisamment d'éléments dans la bande pour représenter la fissure (typiquement  $l = 5h$ ), puis nous fixons  $Y_c = G_c/(4l)$ .

**Comparaison** La comparaison entre Griffith et Lip-field est donnée sur la figure 3 où nous reportons la réaction sur le cercle d'ancrage et la longueur de la fissure en fonction du déplacement imposé, pour les deux analyses Griffith et Lip-field.

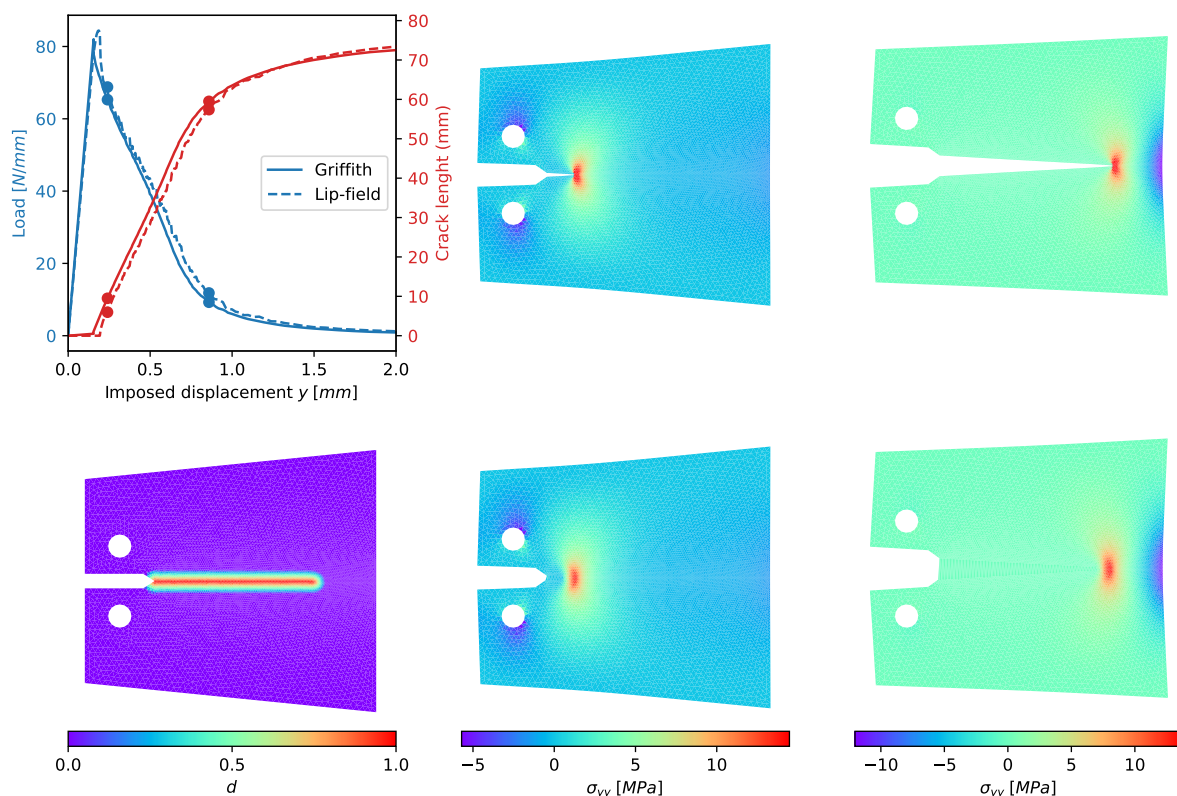


FIGURE 3 – Griffith/Lip-field comparison.



Dans les deux cas, après avoir atteint un déplacement critique, la réaction diminue de manière contrôlée, tandis que la fissure avance à une vitesse proportionnelle à celle du déplacement imposé, jusqu'à ce que la longueur de la fissure couvre environ les trois quarts de sa longueur maximale. Après cela, la fissure ralentit progressivement, jusqu'à ce qu'elle atteigne la limite droite de l'échantillon. Nous observons le même déplacement critique, et la même vitesse entre Griffith et Lip-field, même si nous avons une légère différence dans l'énergie dissipée et la position de la pointe de la fissure. Une étude plus approfondie dépasse le cadre de cet article, mais nous avons déjà une bonne confirmation de la capacité de Lip-field à reproduire la physique de Griffith.

### 3.2 Rencontre de deux fissures

Nous reproduisons ici un exemple classique, où deux fissures initiales horizontales se font faces à droite et à gauche d'une plaque carrée, légèrement décalées l'une par rapport à l'autre verticalement. Le bas de la plaque est fixé, alors qu'un déplacement vertical est imposé sur le haut de la plaque. Les résultats sont reproduits sur la figure 4, avec la courbe force/déplacement ainsi que les champs d'endommagement au fur et à mesure de l'avancée sur la courbe. Les fissures initiales (représentées explicitement dans le maillage) induisent un endommagement à leur pointe respective, initiant une propagation et une localisation de l'endommagement sous forme de deux fissures qui d'abord semblent s'écarter l'une de l'autre selon l'axe vertical, avant de se rapprocher et de fusionner.

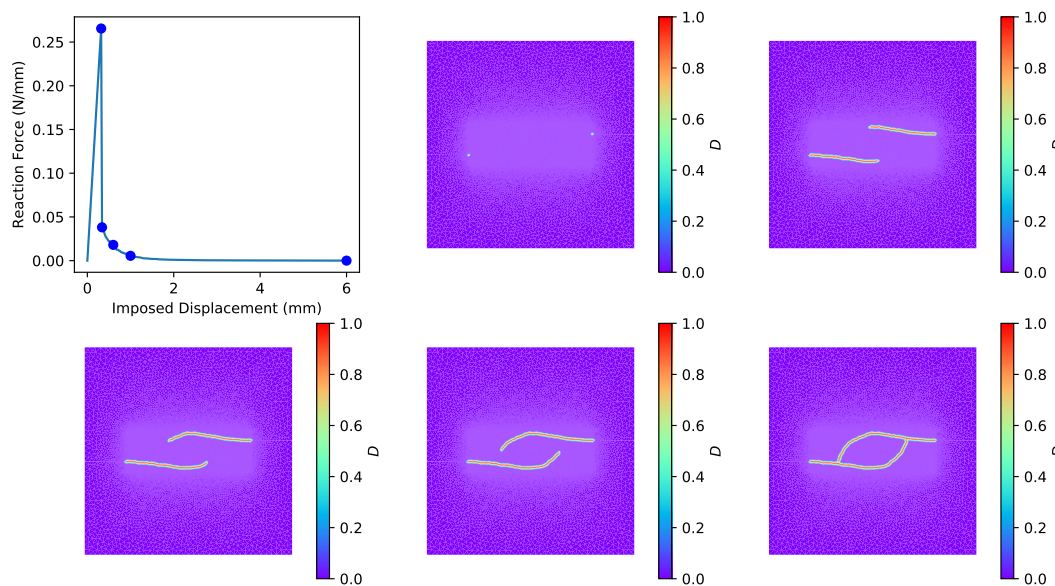


FIGURE 4 – Rencontre de deux fissures. En haut à gauche, la courbe charge déplacement, puis de gauche à droite et de bas en haut les champs d'endommagement correspondant aux points sur la courbe

## 4 Conclusion

Dans cette contribution, nous avons développé une nouvelle technique de régularisation de l'endommagement, fondée sur une contrainte de Lipschitz. Nous avons présenté deux exemples qui donnent des résultats conformes à l'intuition et qualitativement proches des résultats obtenus avec phase-field par exemple. Un intérêt de cette nouvelle approche est que l'on a pas à modifier l'expression de l'énergie par rapport à un modèle local. La régularisation est obtenue en contraignant  $d$  dans un sous-ensemble

convexe. Lorsque la géométrie et le chargement n'entraîne pas de localisation, la contrainte de Lip n'est pas atteinte et les résultats sont identiques à un modèle local. La régularisation par Lip ne modifie finalement le champs  $d$  que sur une zone limitée en taille, typiquement d'une largeur de  $2l$  autour d'une fissure. L'endommagement reste dans ce cas très localisé et ne tend pas à se diffuser dans une grande partie du domaine, comme c'est le cas avec certains modèles phase-field. Bien sûr, ces résultats sont préliminaires et nécessitent d'être consolidés avant de conclure sur un réel avantage de l'approche par rapport aux autres modèles de la littérature.

## Références

- [1] E.C. Aifantis. *On the microstructural origin of certain inelastic models*, Journal of Eng. Mat. and Tech., 106(4) :326-330, 1984.
- [2] M. Ambati, T. Gerasimov, L. De Lorenzis. *Phase-field modeling of ductile fracture.*, Comp. Mech., 55(5) :1017-1040, 2015.
- [3] H. Amor, J.-J. Marigo, C. Maurini. *Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact : Numerical experiments.*, J. of the Mech. and Phys. of Sol., 57(8) :1209-1229, 2009.
- [4] M. Andersen, L. Vandenberghe. *The cvxopt linear and quadratic cone program solvers.* <https://cvxopt.org/>.
- [5] B. Bourdin, G. Francfort, J.-J. Marigo. *Numerical experiments in revisited brittle fracture.*, J. of the Mech. and Phys. of Sol., 48(4) :797-826, 2000.
- [6] B. Bourdin, G. Francfort, J.-J. Marigo. *The variational approach to fracture*, J. of Elas., 91(1-3) :5-148, 2008.
- [7] N. Chevaugeon, N. Moës, *Lipschitz regularisation for fracture : the Lip-field approach*, arxiv :2111.04771v2, submitted to CMAME, 2022.
- [8] G. Francfort, J.-J. Marigo. *Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem*, J. of the Mech. and Phys. of Sol., 46 :1319-1412, 1998.
- [9] M. Frémond, B. Nedjar. *Damage, gradient of damage and principle of virtual power*, Int. J. of Sol. and Struct., 33(8) :1083-1103, 1996.
- [10] P. Germain, P. Suquet, Q. S. Nguyen. *Continuum thermodynamics*, ASME Journal of Applied Mechanics, 50 :1010-1020, 1983.
- [11] D.S. Dugdale. *The phenomena of rupture and flow in solids*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A, Math. Phys. Sci., 221 :163-198, 1921.
- [12] B. Halphen, Q.-S. Nguyen. *Sur les matériaux standards généralisés.* Journal de Mécanique, 14(1) :39-63, 1975.
- [13] A. Javili, R. Morasata, E. Oterkus, S. Oterkus. *Peridynamics review.*, Math. and Mech. of Solidso, 24(11) :3714-3739, 2018.
- [14] A. Karma, D. Kessler, H. Levine. *Phase-field model of mode III dynamic fracture.*, Phys. Rev. Lett., 87(4) :045501, 2001.
- [15] C. Kuhn, R. Müller. *A continuum phase field model for fracture.*, Eng. Frac. Mech., 77(18) :3625-3634, 2010.

- [16] E. Lorentz, S. Andrieux. *Analysis of non-local models through energetic formulations*, Int. J. of Sol. and Struc., 40 :2905-2936, 2003.
- [17] C. Miehe, F. Welschinger, M. Hofacker. *Thermodynamically consistent phase-field models of fracture : Variational principles and multi-field FE implementations.*, Int. J. For Num. Meth. in Eng., 83(10) :1273-1311, 2010.
- [18] N. Moës, N. Chevaugeon. *Lipschitz regularization for softening material models : The Lip-field approach*, Comptes Rendus - Mécanique, 349(2) :415-434, 2021.
- [19] N. Moës, C. Stolz, P.-E. Bernard, N. Chevaugeon. *A level set based model for damage growth : The thick level set approach*. Int. J. For Num. Meth. in Eng., 86 :358-380, 2011.
- [20] Q.-S. Nguyen, S. Andrieux. *The non-local generalized standard approach : A consistent gradient theory*, Cptes rend. Acad. des sciences : Mécanique, physique, chimie, astronomie, 333 :139-145, 2005.
- [21] R. Peerlings, M.G.D. Geers, R. De Borst, W.A.M. Brekelmans. *A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua*, Int. J. of Sol. and Struc., 38(44-45) :7723-7746, 2001.
- [22] G. Pijaudier-Cabot, Z. Bazant. *Non-local damage theory*, J. of Eng. Mech., 113 :1512-1533, 1987.
- [23] Chen Z., Schreyer H. *One-dimensional softening with localization*, J. of Appl. Mech., 53 :891-979, 1986.
- [24] S.A. Silling. *Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces*. J. of the Mech. and Phys. of Sol., 48(1) :175-209, 2000.