



HAL
open science

Ténacité effective de matériaux fragiles hétérogènes

Mathias Lebihain, Djimedo Kondo, Laurent Ponson, Jean Baptiste Leblond

► **To cite this version:**

Mathias Lebihain, Djimedo Kondo, Laurent Ponson, Jean Baptiste Leblond. Ténacité effective de matériaux fragiles hétérogènes. 25ème Congrès Français de Mécanique, Association française de mécanique, Aug 2022, Nantes, France. 22 p. hal-04280220

HAL Id: hal-04280220

<https://hal.science/hal-04280220>

Submitted on 13 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ténacité effective de matériaux fragiles hétérogènes

Mathias Lebihain^a, Laurent Ponson^b, Djimédo Kondo^b, Jean-Baptiste
Leblond^b

a. Laboratoire Navier, Université Gustave Eiffel, ENPC, CNRS (UMR 8205), 6-8 avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-la-Vallée, France; mail : mathias.lebihain@enpc.fr

b. Institut Jean le Rond d'Alembert, Sorbonne Université, UPMC, CNRS (UMR 7190), 4 Place Jussieu, 75005 Paris, France

Résumé :

Ce papier traite de la question de l'homogénéisation des propriétés de rupture de matériaux composites fragiles. L'énergie de rupture effective, mesurée à partir du taux de restitution d'énergie nécessaire à l'avancée de la fissure, est déterminée à la fois par les *mécanismes d'interaction* entre fissure et les inclusions, mais aussi par le *désordre matériel* qui émerge du positionnement aléatoire des inclusions et des variations de leurs propriétés mécaniques. La contribution *simultanée* des micro-mécanismes et du désordre au renforcement macroscopique du composite est ici prédite à partir d'un modèle semi-analytique empruntant à la fois à la micromécanique et à la physique statistique. Les prédictions théoriques du modèle d'homogénéisation sont comparées aux résultats numériques d'énergie de rupture effective mesurée dans des simulations où une fissure semi-infinie se propage en mode I de tension dans un matériau composite contenant *plusieurs millions d'inclusions* tenaces. Le modèle proposé décrit correctement l'influence de nombreux paramètres microstructuraux comme celle de la ténacité des inclusions ou de leur géométrie, et constitue un formalisme novateur pour décrire l'impact d'une microstructure sur le renforcement ultime du matériau. Ces résultats offrent en outre de nouvelles stratégies pour la conception de composites fragiles aux propriétés de rupture contrôlées.

Abstract :

This paper addresses the question of the homogenization of fracture properties for three-dimensional disordered brittle solids. The effective fracture energy, identified as the elastic energy release rate required to ensure crack growth, is controlled by both the *mechanisms of interaction* between a crack and heterogeneities, and the *material disorder* that emerges from the random positioning of the inclusions and the variations of their mechanical properties. The *combined* influence of the interaction mechanisms and the material disorder on material reinforcement is predicted from a semi-analytical framework inspired by both micromechanics and statistical physics. Theoretical predictions are compared to numerical values of the effective fracture energy computed with a fracture-mechanics-based numerical method that allows for the efficient computation of crack propagation under tensile mode I loading in composite materials containing *several millions of tough inclusions*. We show that our homogenization procedure provides good predictions of the homogenized fracture properties for a wide range of microstructural parameters such as the inclusion toughness or its shape. This original theoretical framework constitutes a powerful mean to connect the microstructural parameters of materials to their crack growth resistance. As a result, it provides new strategies for the rational design of optimized brittle composites with tailored fracture properties.

Mots clefs : rupture fragile, homogénéisation, énergie de rupture effective, matériaux hétérogènes

1 Introduction

Avec l'essor récent des techniques de fabrication additive et l'apparition de préoccupations environnementales toujours plus prégnantes, un effort tout particulier a été consacré au développement de matériaux composites aux propriétés de résistance accrues par l'ajout d'hétérogénéités (Dimas et al., 2013; Mirkhalaf et al., 2014; Wang and Xia, 2017). La théorie de l'homogénéisation constitue aujourd'hui un cadre théorique établi en mécanique des solides pour prédire la réponse effective d'un composite à partir de sa microstructure, que ce soit pour des matériaux élastiques sains (Hashin and Shtrikman, 1963; Hill, 1963; Herve and Zaoui, 1993; Ponte-Castañeda and Willis, 1995; Milton, 2002) ou microfissurés (Ponte-Castañeda and Willis, 1995; Pensée V. et al., 2002; Deudé V. et al., 2002; Dormieux et al., 2006). Toutefois, ces approches ne permettent pas d'estimer l'énergie moyenne dissipée lors de la propagation d'une fissure principale dans un milieu hétérogène. En effet, les phénomènes de fissuration présentent des caractéristiques singulières qui empêchent leur traitement dans le formalisme classique de l'homogénéisation : la rupture des matériaux fragiles est (i) un *problème d'évolution dissipatif*, (ii) *localisé* en pointe de fissure et (iii) relié à un *problème de structure* dans la théorie fondatrice de Griffith (1921). Tout formalisme d'homogénéisation des propriétés de rupture incorpore donc nécessairement (i) la modélisation de la *propagation* de fissure (ii) depuis l'*échelle des hétérogénéités* où ont lieu les mécanismes de dissipation, jusqu'à (iii) à l'*échelle de la structure* en raison du caractère éminemment collectif de la rupture des matériaux désordonnés.

Le niveau de contraintes élevé atteint en pointe de fissure donne une importance toute particulière aux *micro-mécanismes d'interaction* entre fissure et inclusions sur l'énergie de rupture macroscopique du matériau. Au cours des dernières, un effort important a été mis sur la description de mécanismes comme le piégeage (Gao and Rice, 1989; Bower and Ortiz, 1990; Vasoya et al., 2016a), le pontage (Bower and Ortiz, 1991; Mirkhalaf et al., 2014), la déflexion (Faber and Evans, 1983; He and Hutchinson, 1989; Clayton and Knap, 2014; Brach et al., 2019; Schneider, 2020) et la re-nucléation (Leguillon et al., 2006; Hossain et al., 2014; Wang and Xia, 2017). Ces travaux ont mis en évidence les conditions d'occurrence et de prévalence de chaque mécanisme, ainsi que leur contribution ultime au renforcement du matériau. Toutefois, ces études sont généralement restreintes à des configurations bi-dimensionnelles ou tri-dimensionnelles périodiques, et négligent donc le rôle central joué par le *désordre matériel*. En effet, le positionnement aléatoire d'inclusions aux propriétés de rupture variables donne naissance à des phénomènes collectifs dans la propagation d'une fissure, qui ne peuvent être capturés par un problème équivalent réduit à une seule inclusion (Bonamy and Bouchaud, 2011). Patinet et al. (2013b) et Démary et al. (2014b) ont notamment mis en évidence l'influence cruciale de ce désordre matériel sur l'énergie de rupture effective dans le cas de fissures d'interface. Si ces travaux représentent des avancées majeures pour l'homogénéisation des propriétés de rupture fragile, ils sont néanmoins restreints au cas d'une fissuration coplanaire et ne peuvent ainsi décrire que l'influence seule de mécanismes de piégeage.

Dans ce travail, nous proposons un formalisme d'homogénéisation des propriétés de rupture fragile qui prend en compte l'*influence combinée* des *micro-mécanismes d'interaction* fissure/inclusions et du *désordre matériel* sur l'énergie de rupture effective des matériaux hétérogènes. Les prédictions de notre modèle sont confrontées aux résultats de simulations large-échelle dans lesquelles une fissure principale

interagit avec des millions d'inclusions plus tenaces. Ce formalisme permet en outre de rationaliser l'influence de différents paramètres microstructuraux, comme l'énergie de rupture des inclusions ou leur géométrie, sur l'énergie de rupture effective d'un composite.

Le manuscrit est organisé comme suit : en Section 2 sont décrits le matériau hétérogène considéré et le modèle développé par Lebihain et al. (2020) pour simuler l'interaction d'une fissure principale avec des inclusions d'énergie de rupture variable par des mécanismes de piégeage ou de déflexion. Nous détaillons ensuite en Section 3 les conditions de séparation d'échelles sous lesquelles il est possible de définir énergie de rupture effective *intrinsèque* au composite. La contribution individuelle des mécanismes de piégeage et de déflexion au renforcement du composite est ensuite décrite en Section 4 à partir des résultats de Lebihain et al. (2020). Nous illustrons aussi la contribution essentielle du désordre matériel et notamment positionnel (Lebihain, 2021) en Section 5. La Section 6 concentre l'essentiel de notre contribution puisqu'y est développée le formalisme d'homogénéisation proposé par Lebihain et al. (2021) permettant de prendre en compte la contribution combinée des mécanismes et du désordre pour prédire l'énergie de rupture effective de matériaux hétérogènes.

2 Propagation à grande échelle de fissure dans des milieux hétérogènes : une méthode originale et performante fondée sur la mécanique de la rupture linéaire

Si des approches récentes comme les modèles de zone cohésive (Xu and Needleman, 1994) ou l'approche variationnelle de la rupture (Francfort and Marigo, 1998) apparaissent comme des outils puissants pour aborder la question de la fissuration en milieu hétérogène, nous choisissons ici de capitaliser sur le formalisme efficient de la mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER) pour décrire l'interaction d'une fissure avec des défauts matériels. Tout modèle standard de la MLER repose sur trois ingrédients principaux :

1. *un champ d'énergie de rupture tri-dimensionnel* $G_c(x, y, z)$;
2. *une méthode de calcul du taux de restitution d'énergie local* $G(z)$ à partir des facteurs d'intensité de contraintes (FIC) (K_I, K_{II}, K_{III}) en tout point du front de fissure indexé par z ;
3. *un critère de propagation* qui les relie pour fournir non seulement des informations sur la capacité à la fissure à se propager, mais aussi sur la vitesse et la direction dans laquelle cette extension va se produire.

Ces ingrédients sont relativement simples à fournir dans le cas homogène, où (1) G_c est constant, (2) des formules analytiques de G peuvent être utilisées pour des géométries de fissure et des chargements standards, et (3) des critères de propagation éprouvés expérimentalement sont disponibles comme le principe de symétrie locale (Gol'dstein and Salganik, 1974) ou le taux de restitution d'énergie maximal (Hussain et al., 1974). Toutefois, lorsqu'une fissure interagit avec des hétérogénéités d'énergie de rupture G_c , son front de fissure se déforme et son trajet de propagation s'en trouve altéré. Ceci complexifie nettement le calcul du taux de restitution d'énergie local G , et les critères de propagation classiques sont souvent mis à défaut (Takei et al., 2013). Il est alors nécessaire de mettre en place des outils adaptés proposés par Lebihain et al. (2020).

2.1 Le champ d'énergie de rupture G_c : une microstructure déterministe

Le champ d'énergie de rupture $G_c(x, y, z)$ est fourni ici par une description déterministe de la microstructure du composite. Nous considérons des inclusions à géométrie variable (sphérique, cubique, ellipsoïdale) plongées dans une matrice homogène (Fig. 1a-d). Les inclusions et la matrice sont constituées d'un matériau linéaire élastique isotrope. Elles partagent les mêmes module d'Young E et coefficient de Poisson ν , mais les inclusions sont un peu plus tenaces ($G_c^{\text{inc}} \geq G_c^{\text{mat}}$) et/ou faiblement liées à la matrice ($G_c^{\text{int}} \leq G_c^{\text{mat}}$). Le cas d'inclusions plus faibles que la matrice ($G_c^{\text{inc}} < G_c^{\text{mat}}$) peut être décrit par notre modèle mais n'est pas considéré ici puisqu'il favorise la sélection du mécanisme de piégeage seul (Lebihain et al., 2020).

2.2 Une méthode de calcul de G : l'approche perturbative en mécanique de la rupture

L'introduction d'hétérogénéités va profondément complexifier la géométrie du front de fissure et les trajectoires suivies par la fissure lors de sa propagation (voir Fig. 1). Cette caractéristique explique l'importance toute particulière donnée aux approches perturbatives en mécanique de la rupture. Initiées par Rice (1985), ces approches permettent d'estimer les facteurs d'intensité de contraintes locaux (K_I, K_{II}, K_{III}) pour des fissures légèrement déformées par rapport à une configuration de référence simple. Ici, nous combinons les travaux de Gao and Rice (1986) et Movchan et al. (1998) afin de déterminer les FICs locaux à partir des perturbations géométriques du front de fissure pour une fissure chargée de façon quasi-statique en mode I de traction :

$$\begin{cases} K_I(z, t) = K_I^\infty(a) - \frac{f_x(z, t)}{2\mathcal{L}} K_I^\infty(a) - \frac{K_I^\infty(a)}{2\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_x(z, t) - f_x(z', t)}{(z - z')^2} dz' \\ K_{II}(z, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial f_y}{\partial x}(z, t) K_I^\infty(a) + \frac{2 - 3\nu}{2 - \nu} \frac{K_I^\infty(a)}{2\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_y(z, t) - f_y(z', t)}{(z - z')^2} dz' \\ K_{III}(z, t) = -\frac{2(1 - \nu)^2}{2 - \nu} \frac{\partial f_y}{\partial z}(z, t) K_I^\infty(a) \end{cases} \quad (1)$$

où PV correspond à la valeur principale de Cauchy de l'intégrale. f_x et f_y correspondent aux perturbations géométriques du front de fissure et de la surface de rupture par rapport à une fissure semi-infinie plane de référence au front droit positionné en $x = a$. $K_I^\infty(a) = \sqrt{\frac{E}{1 - \nu^2}} G^\infty(a)$ représente le chargement imposé à la structure et correspond au facteur d'intensité de contrainte associé à la fissure plane non déformée chargée en mode I pur. La longueur structurelle

$$\mathcal{L} = -G^\infty(a) / \frac{\partial G^\infty(a)}{\partial x} \quad (2)$$

est supposée positive et constante au cours de la propagation. Cette longueur est caractéristique du chargement et des conditions aux limites imposées à la structure. Il est intéressant de noter dans l'équation (1) la contribution de forces élastiques non-locales à longue portée (contributions intégrales), qui jouent un rôle prépondérant dans les effets collectifs associés la rupture hétérogène (Bonamy, 2009).

2.3 Un critère de propagation : le critère de restitution d'énergie maximal généralisé

La connaissance de la microstructure nous donne accès à G_c , quand l'approche perturbative nous permet de déterminer les facteurs d'intensité de contraintes locaux (K_I , K_{II} , K_{III}) et donc le taux de restitution d'énergie G le long du front (Irwin, 1957). Il nous reste à les relier à travers un critère adapté au cas hétérogène : le critère de restitution d'énergie maximal généralisé $(G - G_c)_{\max}$ (Gurtin and Podio-Guidugli, 1998). Ce dernier constitue une extension naturelle au critère de Griffith (1921) pour les milieux à énergie de rupture variable. Il stipule que la fissure va se propager dans la direction α où le critère de Griffith $G(\theta) = G_c(\alpha)$ est atteint en premier. La distribution angulaire du taux de restitution d'énergie $G(\alpha)$ est donné par la combinaison de la formule d' Irwin (1957) :

$$G(\alpha) = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2(\alpha) + K_{II}^2(\alpha)) \quad (3)$$

et de la formule d'Amestoy and Leblond (1992) :

$$\begin{aligned} K_I(\alpha) &= F_{I,I}(\alpha - \theta)K_I(z, t) + F_{I,II}(\alpha - \theta)K_{II}(z, t) \\ K_{II}(\alpha) &= F_{II,I}(\alpha - \theta)K_I(z, t) + F_{II,II}(\alpha - \theta)K_{II}(z, t) \end{aligned} \quad (4)$$

où $K_I(z, t)$ et $K_{II}(z, t)$ sont donnés par l'Eq. (1), et $\theta \simeq \partial f_y / \partial x$ est l'angle local de la fissure en z à l'instant t .

Soutenu par des simulations numériques par champ de phase (Hakim and Karma, 2005; Li and Maurini, 2019) et expérimentalement par des essais de rupture de feuillets hétérogènes (Takei et al., 2013; Ibarra et al., 2016), ce critère permet de prédire le comportement de la fissure lorsqu'elle interagit avec l'inclusion :

- soit elle *traverse* l'inclusion et se propage en son sein ;
- soit elle *contourne* l'inclusion, sort du plan et se propage le long de l'interface.

Ces deux mécanismes (traversée/contournement) sont illustrés en Fig. 1.(a-d). Enfin la vitesse de rupture dans la direction de propagation sélectionnée est calculée par une régularisation visqueuse du critère de Griffith (Chopin et al., 2018).

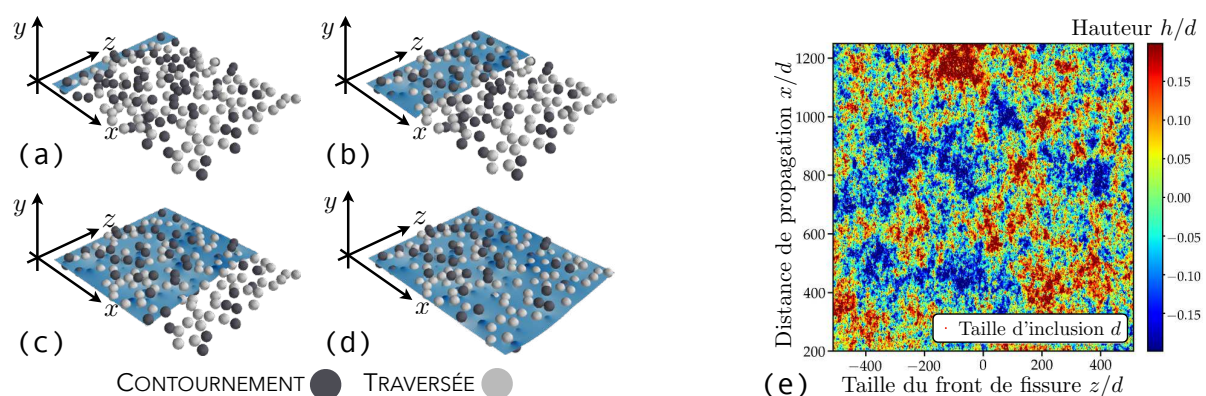


FIGURE 1 – (a-d) Propagation de fissure dans des milieux désordonnés : la fissure se propage de façon intermittente dans le composite en contournant ou traversant les inclusions. (e) Surface de rupture résultant de l'interaction d'une fissure avec des millions d'inclusions.

2.4 Performances du modèle

Les détails de l'implémentation numérique du modèle, dont les éléments cruciaux ont été rappelés ci-dessus, est donné dans Lebihain et al. (2020). Cela a abouti à l'élaboration d'un outil numérique particulièrement efficace pour simuler la propagation de fissure en 3D. Ces performances reposent sur le fait que seul le front de fissure (1D) doit être maillé pour calculer les facteurs d'intensité de contraintes locaux (K_p) à partir de l'équation (1). Cette méthode est d'autant plus efficace qu'Eq. (1) prend une forme simple dans l'espace de Fourier, autorisant le recours aux transformées de Fourier rapide pour le calcul des FICs le long du front. Notre approche perturbative de la rupture permet ainsi de modéliser l'interaction tri-dimensionnelle d'une fissure avec des *millions* d'inclusions (Fig.1e) en *quelques heures* sur un ordinateur de bureau. Ces performances sont inédites et restent hors de portée des approches numériques fondées sur les éléments finis, qui sont souvent restreintes au cas 2D et ne peuvent simuler l'interaction d'une fissure avec un nombre limité d'inclusions en 3D. De part ses caractéristiques de modélisation des processus de fissuration sur plusieurs échelles, notre outil s'avère décisif pour traiter de l'homogénéisation des propriétés de rupture fragile.

3 Énergie de rupture effective : une propriété intrinsèque pour les matériaux hétérogènes ?

3.1 Condition de séparation d'échelles pour la définition d'une énergie de rupture effective des matériaux hétérogènes

Avant de vouloir prédire l'énergie de rupture effective G_c^{eff} d'un composite à partir de la donnée de sa microstructure, il paraît sain de se demander si cette propriété *intrinsèque* pour un matériau homogène peut être définie dans un cadre hétérogène. Revenant aux fondamentaux de la théorie de Griffith (1921), trois différentes définitions semblent possibles pour caractériser l'énergie de rupture effective d'un matériau hétérogène :

1. le chargement maximal G_{max}^{∞} qu'il est nécessaire d'imposer à la structure pour la casser (voir Fig. 2a) ;
2. le chargement moyen G_{mean}^{∞} qui permet de faire propager la fissure sans mener nécessairement à la ruine de la structure (voir Fig. 2a) ;
3. l'énergie moyenne dissipée localement au cours de la propagation de fissure $\langle G_c^{\text{frac}} \rangle$ (voir Fig. 2b).

Si les définitions (1) et (2) reposent sur le taux de restitution d'énergie G , relatif au chargement et à la structure, la troisième (3) fait intervenir une grandeur matériau, l'énergie de rupture G_c . Cela illustre parfaitement la dualité structure-matériau des phénomènes de fissuration.

Nous montrons qu'il est possible de découpler le problème de structure relatif à G du problème matériau relatif à G_c sous la condition de séparation d'échelles :

$$\mathcal{L} = -G^{\infty} / \frac{\partial G^{\infty}}{\partial x} \gg d \quad (5)$$

où \mathcal{L} de l'Eq. (2) est la longueur caractéristique des variations du chargement G^{∞} avec l'avancée de fissure x , et d la taille caractéristique des inclusions. Sous cette condition, les trois définitions convergent vers une valeur unique (voir Fig.2c) qui peut être définie *sans ambiguïté* comme la *énergie de rupture effective intrinsèque* G_c^{eff} du composite.

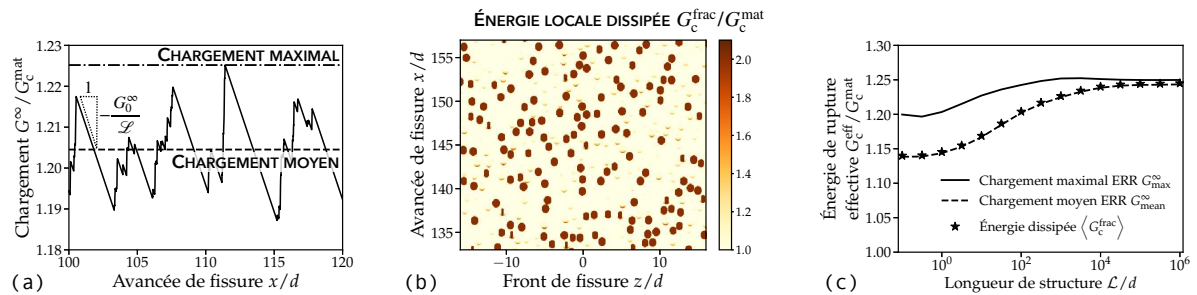


FIGURE 2 – Séparation d’échelles pour la définition d’une énergie de rupture effective *intrinsèque* : l’énergie de rupture effective G_c^{eff} peut être alternativement caractérisée par (a) la valeur maximale G_{max}^{∞} ou moyenne G_{mean}^{∞} du chargement macroscopique imposé, dont la décroissance avec l’avancée de fissure est caractérisée par la longueur structurelle \mathcal{L} , ou (b) la moyenne $\langle G_c^{\text{frac}} \rangle$ de l’énergie locale dissipée durant la propagation. (c) Ces grandeurs convergent vers une unique valeur pour $\mathcal{L} \gtrsim 10^4 d$, où d est la taille caractéristique des inclusions.

Cette condition, si standard dans sa forme en théorie de l’homogénéisation, est en réalité singulière puisqu’elle fait intervenir \mathcal{L} , une longueur liée au chargement. Cette particularité n’est pas sans conséquences pour qui veut mesurer l’énergie de rupture effective d’un composite à la fois du point de vue numérique et expérimental.

3.2 Implications numériques et expérimentales de la condition de séparation d’échelles

D’un point de vue numérique, \mathcal{L} est fixé par les conditions aux limites du modèle, et est souvent de l’ordre de la taille du domaine de simulation dans les travaux récents visant à mesurer une énergie de rupture effective de matériaux hétérogènes 2D (Hossain et al., 2014; Brach et al., 2019). Les moyens de calcul disponibles contraignent alors \mathcal{L} à être tout au plus deux ordres de grandeur supérieur à la taille des hétérogénéités, *obligeant* ces auteurs à mesurer G_c^{eff} à partir du chargement maximal G_{max}^{∞} (voir Fig. 2c). Si ce choix est justifié par notre formalisme, des contraintes en matière de temps de calcul pourraient amener à sous-estimer les propriétés effectives de rupture si ces simulations venaient à être transposées en 3D. Notre étude appelle à une véritable réflexion sur les conditions aux limites à appliquer pour l’homogénéisation numérique des propriétés à rupture en trois dimensions.

Les conséquences de cette condition de séparation d’échelles sur les expériences sont tout aussi importantes. En effet, la méthode de mesure d’énergie de rupture repose traditionnellement sur une estimation de l’énergie moyenne dissipée $\langle G_c^{\text{frac}} \rangle$ et du chargement moyen G_{mean}^{∞} à partir de la courbe force-déplacement, mais des méthodes avancées (méthode de la complaisance (Wang and Xia, 2017), corrélation d’images (Roux and Hild, 2006), etc.) permettent d’accéder à une mesure instantanée de G , et donc à G_{max}^{∞} . Considérant des hétérogénéités de l’ordre de la centaine de micromètres $d \simeq 100 \mu\text{m}$, il faudrait un échantillon de 10 m pour mesurer correctement l’énergie de rupture effective du matériau G_c^{eff} avec $\langle G_c^{\text{frac}} \rangle$ par la méthode standard, ou un échantillon de 10 cm avec G_{max}^{∞} par des méthodes avancées. Notre étude appelle ainsi à la démocratisation de méthodes avancées en mécanique de la rupture expérimentale, dans lesquelles la propagation de fissure est suivie de manière prolongée, et ce afin de ne pas venir sous-estimer l’énergie de rupture de matériaux hétérogènes.

4 Mécanismes élémentaires d'interaction entre fissure et inclusions : une approche micromécanique pour estimer les contributions individuelles au renforcement

Maintenant que nous disposons d'une définition non-ambiguë de l'énergie de rupture effective d'un matériau, il est intéressant d'étudier comment les mécanismes d'interaction et le désordre matériel sont susceptibles de l'influencer. Le modèle proposé en Section 2 possède la propriété intéressante de simuler la propagation de fissure sur des *distances macroscopiques* tout en modélisant avec grands détails les *phénomènes d'interaction microscopiques* qui se déroulent en pointe de fissure pour chaque inclusion. L'*approche micromécanique* développée par Lebihain et al. (2020) a pour objectif (i) d'identifier les mécanismes mis en jeu lors de l'interaction d'une fissure et d'une inclusion plus tenace, (ii) de mettre en lumière les déterminants microscopiques (forme et propriétés mécaniques des inclusions) de la sélection de chacun de ces mécanismes, et (iii) d'observer leur influence sur le comportement à rupture global du composite.

4.1 Une sélection des mécanismes dictée par la géométrie et les propriétés mécaniques des inclusions

La figure 1a montre des inclusions alternativement *traversées* ou *contournées* par la fissure. Cette sélection d'un mécanisme d'interaction, conséquence naturelle de notre modèle, est en réalité le résultat d'une compétition énergétique entre : (i) l'intensité de la barrière d'énergie de rupture opposée par l'inclusion et (ii) la déflexion de trajectoire requise pour l'éviter. En effet, plus l'inclusion est tenace ($G_c^{\text{inc}} \geq G_c^{\text{mat}}$) plus il est coûteux énergétiquement de la traverser. En parallèle, plus l'angle de déflexion associé au contournement de l'inclusion est important, moins la fissure va être capable de s'étendre dans cette direction. Toutefois, si l'énergie de rupture de l'interface G_c^{int} est assez faible, le contournement de l'inclusion pourrait rester énergétiquement favorable. On comprend donc aisément (i) que des angles de déflexion importants θ_{tan} favorisent le mécanisme de traversée (voir Fig. 3b), quand (ii) des niveaux élevés de contraste d'énergie de rupture $G_c^{\text{inc}}/G_c^{\text{int}}$ favorisent le mécanisme de contournement (voir Fig. 3c). Une analyse théorique bi-dimensionnelle basée sur les équations d'Amestoy and Leblond (1992) aboutie au critère suivant :

$$\left[\frac{G_c^{\text{inc}}}{G_c^{\text{int}}} \right]_{\text{crit}} = \frac{1}{F_{1,I}(\theta_{\text{tan}})^2 + F_{II,I}(\theta_{\text{tan}})^2} \quad (6)$$

où les ($F_{I,I}$) sont une nouvelle fois les fonctions universelles d'Amestoy and Leblond (1992).

Ce critère théorique est confronté avec succès en figure 6a aux résultats de simulations numériques où une fissure interagit avec une inclusion sphérique unique (conditions périodiques en z et en x), confirmant la justesse de notre interprétation des phénomènes dissipatifs mis en jeu en pointe de fissure. La sélection d'un mécanisme d'interaction est ainsi fortement liée aux propriétés de résistance des hétérogénéités G_c^{inc} et G_c^{int} , ainsi que de leur géométrie, dont dépend θ_{tan} .

Fort de la compréhension du cas sphérique, nous pouvons à présent étudier l'interaction d'une fissure avec des inclusions de forme différente afin de mettre en évidence toute la richesse de ces micromécanismes. Considérons à présent des ellipsoïdes orientées dans la direction du front (Oz). On observe alors en figure 4 que la forme ellipsoïdale de l'inclusion facilite le contournement de l'inclusion et que cet effet est d'autant plus prononcé que l'inclusion est allongée. Nous avons pu attribuer ces change-

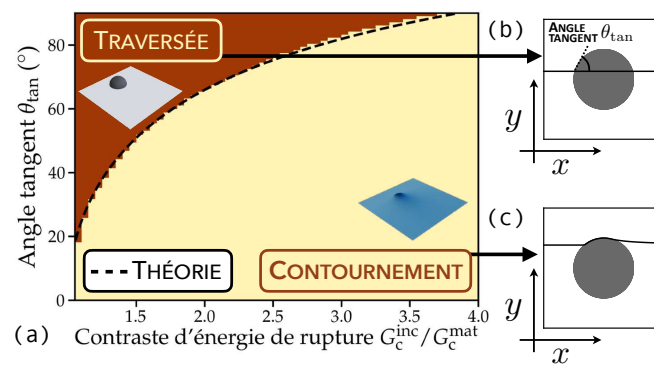


FIGURE 3 – (a) Diagramme de phase du mécanisme sélectionné par la fissure lors de son interaction avec l'inclusion : (b) si le contraste d'énergie de rupture est faible ou l'angle tangent est fort, l'inclusion est traversée, (c) sinon elle est contournée.

ments à (i) une *dynamique fine de dépiégeage* associée (ii) à la *collectivité* des phénomènes de rupture, portée par les forces élastiques de longues portées visibles dans l'équation (1) :

- i lorsque la fissure rencontre une inclusion ellipsoïdale, les points du front situés au bord de l'inclusion vont disposer de davantage d'énergie et donc avancer en premier, alors que les points au centre de l'inclusion vont être les premiers à se propager dans le cas d'une sphère ;
- ii ces points latéraux font face à un angle tangent réduit et donc avoir tendance à contourner l'inclusion. Dans leur mouvement, ils vont "tirer" par des forces élastiques les points du front de fissure situé au centre de l'inclusion et faciliter un *contournement collectif* de celle-ci. Dans le cas d'une inclusion sphérique, les points centraux se débloquent en premier et font face aux pentes de branchement les plus fortes, leur choix d'interaction déterminera de façon *individuelle* le mécanisme sélectionné par la fissure.

Ce premier exemple souligne l'importance des effets tri-dimensionnels dans la sélection du mécanisme d'interaction. D'autres effets liés à la transition entre mécanismes de piégeage et de pontage sont discutés par Lebihain et al. (2020).

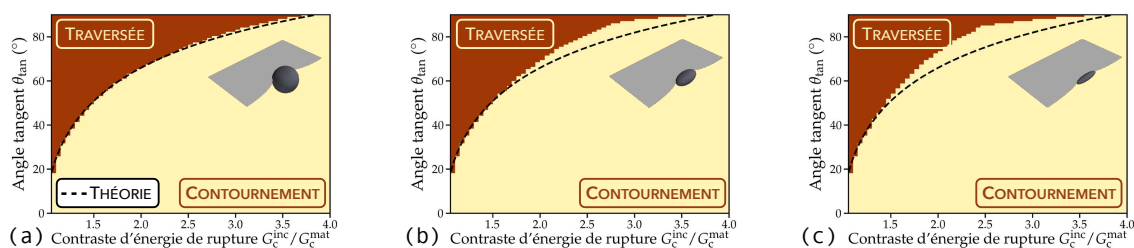


FIGURE 4 – Influence de la forme de l'inclusion sur la sélection du mécanisme : si l'interaction entre la fissure et une inclusion sphérique (a) est bien décrite par la théorie bi-dimensionnelle, (b-c) la collectivité inhérente à la propagation tri-dimensionnelle de fissure facilite le contournement de défauts ellipsoïdaux allongés dans la direction du front.

Le cas de l'inclusion cubique s'avère d'autant plus instructif que l'interaction d'une fissure avec une telle inclusion fait non seulement intervenir les mécanismes de traversée et de contournement mais aussi un mécanisme intermédiaire de *repénétration*, où la fissure commence à contourner l'inclusion avant de la traverser du fait d'effets collectifs (Fig. 5). Cela s'explique par le fait que la portion du front de fissure qui n'est pas en contact avec l'inclusion va *s'opposer collectivement* à la sortie du plan

du front en contact avec l'inclusion et ainsi freiner son contournement. De plus, contrairement au cas sphérique où la fissure gagnait de l'énergie en se réalignant avec sa direction naturelle de propagation (Ox) au cours du contournement (Fig. 3.c), la fissure contournant l'inclusion cubique doit produire sans cesse le même effort (angle de déflexion constant) tout en étant freinée par des forces élastiques longue portée. L'option de traversée devient alors énergétiquement plus favorable et la fissure repénètre l'inclusion. Le contournement effectif de l'inclusion va alors avoir lieu pour des niveaux d'énergie de rupture d'inclusion supérieure (Fig. 5.a).

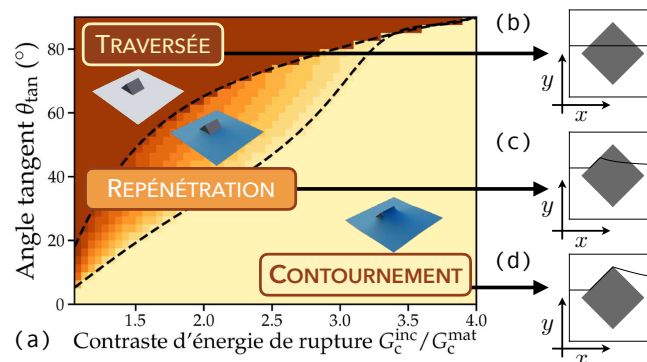


FIGURE 5 – (a) Influence de la forme de l'inclusion sur la nature du mécanisme : dans le cas d'une inclusion cubique, la transition de (a) la traversée au (c) contournement est marquée par une phase transitoire de (b) repénétration.

4.2 Des mécanismes qui influencent en retour le renforcement ultime du matériau

Nous avons donc mis en évidence une physique riche liée à la façon dont une fissure va interagir avec des inclusions plus tenaces. L'étape suivante de toute approche micro-mécanique est d'étudier comment ces mécanismes microscopiques vont influencer en retour le comportement global du matériau.

On remarque en figure 6a que le renforcement des inclusions (G_c^{inc}/G_c^{mat} croissant) est bien transmis au composite tant que l'inclusion est traversée. Toutefois, une fois l'inclusion contournée, il ne sert à rien de rendre les inclusions plus tenaces puisque la résistance du composite reste inchangée. Cette observation apparaît somme toute logique puisque la fissure ne visite plus l'inclusion elle-même mais bien l'interface matrice/inclusion : le renforcement relatif au contournement est alors dicté par l'énergie de rupture de l'interface G_c^{int} plutôt que celle de l'inclusion G_c^{inc} . Cette transition entre les deux régimes s'opère logiquement lorsqu'il est énergétiquement plus favorable pour la fissure de contourner l'inclusion plutôt que de la traverser. Ainsi, si le mécanisme de traversée est un mode efficace de renforcement d'un matériau, le mécanisme de contournement constitue un frein à la conception de composite aux propriétés de résistance accrues.

Il est alors facile d'imaginer comment la forme de l'inclusion va influencer ce chargement à rupture selon la façon dont elle modifie la sélection et la nature des mécanismes mis en jeu en pointe de fissure. Dans le cas d'inclusions ellipsoïdales (Fig. 4a), le mécanisme de contournement est favorisé par la dynamique collective du front de fissure. Il est donc naturel que la promotion de ce mode de renforcement moins efficace aboutisse à une réduction de l'énergie de rupture effective du composite.

Inversement, le passage d'une géométrie cubique à une géométrie sphérique va (i) retarder l'apparition effective du mécanisme de contournement et (ii) rendre ce contournement plus coûteux énergétiquement

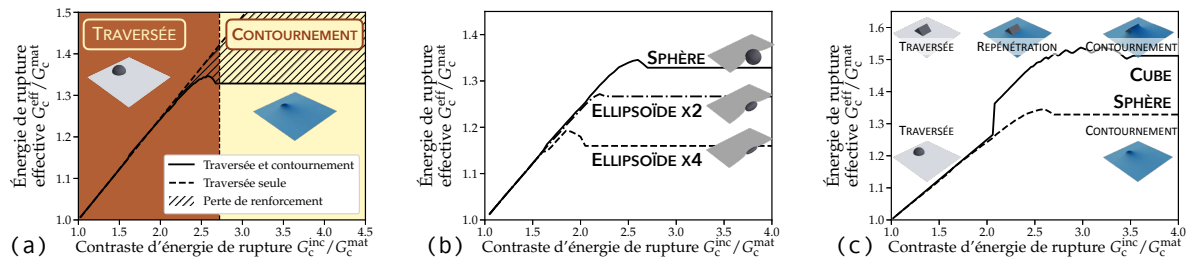


FIGURE 6 – Influence du mécanisme sur la contribution ultime au renforcement : (a) le mécanisme de contournement s’avère moins efficace que celui de traversée et nuit au renforcement ultime du composite. Travailler sur la forme de l’inclusion peut soit (b) mitiger cette perte de renforcement avec des inclusions cubiques soit (c) l’augmenter avec des formes ellipsoïdales.

puisque le front s’y oppose collectivement. Il est alors logique que le composite soit (i) renforcé de façon efficace sur une gamme plus large d’énergie de rupture d’inclusion G_c^{inc} et (ii) que le renforcement ultime, dicté par la difficulté du contournement, soit supérieur au cas de l’inclusion sphérique (Fig. 5b).

Notre approche micro-mécanique, couplée à la mécanique de la rupture, nous a permis *in fine* :

- d’identifier les mécanismes mis en jeu lors de l’interaction d’une fissure et d’une inclusion ainsi que leur physique sous-jacente ;
- d’en déduire les conditions (forme et propriétés d’inclusions) sous lesquelles un mécanisme prévalait sur les autres ;
- de quantifier l’influence de chacun de ces mécanismes, de leur sélection et de leur dynamique sur le renforcement ultime du composite ;
- de comprendre que la trajectoire d’une fissure était guidée par une optimisation énergétique non-locale et instantanée, qui peut être utilisée afin d’orienter la fissure sur des chemins énergétiquement défavorables et ainsi augmenter le chargement nécessaire pour rompre le matériau *i.e.* son énergie de rupture effective.

5 Processus collectifs dans l’interaction entre une fissure et le désordre matériel : l’apport de la physique statistique

Si l’étude du problème mono-inclusion (périodique) s’est avéré riche d’enseignements sur l’influence des mécanismes d’interaction sur la rupture des matériaux hétérogènes, il faut garder en tête que les matériaux réels, qu’ils soient naturels ou conçus par l’homme, sont fortement désordonnés. Les inclusions ne sont pas disposées selon un arrangement périodique, elles ne partagent pas forcément la même taille, la même géométrie ni même les mêmes propriétés mécaniques. Ce *désordre matériel*, inhérent au monde qui nous entoure, a récemment été identifié comme décisif dans l’estimation de propriétés de rupture effective (Roux et al., 2003; Roux and Hild, 2008; Patinet et al., 2013b; Démery et al., 2014b) et constitue l’objet d’étude favori de la physique des milieux désordonnés.

5.1 Le problème équivalent de l’inclusion unique périodique : des erreurs quantitatives et qualitatives

On évalue en figure 7a l’énergie de rupture effective d’interfaces hétérogènes estimée par des simulations de rupture coplanaire (Lebihain, 2021). Dans ces simulations, seul le mécanisme de traversée est mis

en jeu. Deux types d'interfaces sont considérées : dans le premier cas, des hétérogénéités circulaires sont positionnées de façon périodique (voir Fig. 7b), et, dans le second cas, elles sont disposées de façon aléatoire (voir Fig. 7c). On observe que le problème 3D périodique ne produit pas une estimation raisonnable du renforcement ultime du matériau désordonné.

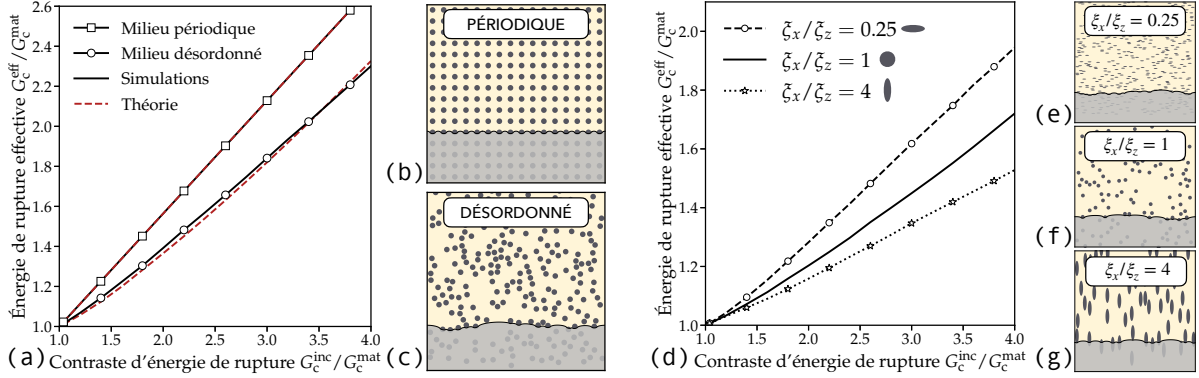


FIGURE 7 – (a) L'énergie de rupture effective d'interfaces hétérogènes dépend fortement du position (b) périodique ou (c) aléatoire des inclusions. (d) Dans le cas d'interfaces désordonnées, l'énergie de rupture effective est en outre dictée par l'élongation des défauts. À densité et contraste d'énergie de rupture égaux, (e) des ellipses allongées dans la direction du front de fissure induisent un renforcement plus élevé que (f) des disques ou (g) des ellipses allongées dans la direction de propagation.

En plus d'être *quantitativement* faux, les tendances observées sur un problème périodique peuvent être *qualitativement* fausses. En effet, dans le cas désordonné, l'énergie de rupture effective de l'interface composite dépend du rapport ξ_x/ξ_z entre la taille caractéristique ξ_x du défaut dans la direction de propagation et de celle ξ_z dans la direction du front (voir Fig. 7d). Ainsi, à densité égale, des défauts elliptiques allongés dans la direction (Oz) du front (voir Fig. 7e) induisent un renfort plus important que des défauts circulaires (voir Fig. 7f) ou allongés dans la direction (Ox) de propagation (voir Fig. 7g). Ces différences notables disparaissent dans le cas périodique, où l'énergie de rupture effective ne dépend que marginalement de l'élongation des défauts (Gao and Rice, 1989). D'autres exemples de l'importance crucial du désordre ont été mis en lumière par Lebihain (2021).

5.2 Prédire la contribution du désordre : l'approche de Larkin

Les travaux récents de Démery et al. (2014a) et Démery et al. (2014b) permettent de prédire la contribution du désordre à l'énergie de rupture effective en assimilant le problème de rupture fragile à celui d'une ligne élastique se propageant dans un potentiel aléatoire bi-dimensionnel. L'énergie de rupture effective d'un matériau désordonné est alors donnée par :

$$G_c^{eff} = \langle G_c \rangle + \beta \sigma \frac{L_{lark}}{\xi_z} = \langle G_c \rangle + \beta \frac{\sigma^2}{\langle G_c \rangle} \frac{\xi_z}{\xi_x} \quad (7)$$

où $\langle G_c \rangle$ est la moyenne du champ d'énergie de rupture coplanaire, σ son écart-type, ξ_z et ξ_x ses longueurs de corrélation dans la direction du front et de propagation, et $\beta \simeq 1$ un préfacteur relié à la fonction d'auto-corrélation de ce champ (Démery et al., 2014a). En présence de désordre matériel, la propagation de fissure devient hautement intermittente et est caractérisée par le *décrochage collectif* de morceaux du front dont la taille caractéristique est la longueur de Larkin $L_{lark} = \frac{\sigma}{\langle G_c \rangle} \frac{\xi_z^2}{\xi_x}$ (voir Fig. 8a). L'énergie de rupture effective du matériau est alors contrôlée par l'énergie de rupture visitée lors du

décrochage d'un domaine de Larkin. Ce domaine, lui-même composé de $N = L_{\text{lark}}/\xi_z$ inclusions indépendantes (Fig.8b) d'énergie de rupture moyenne $\langle G_c \rangle$ et d'écart-type $\langle G_c \rangle$, perçoit une énergie de rupture maximale de l'ordre de $\simeq \langle G_c \rangle + N\sigma$, ce qui permet d'aboutir à l'équation (7). Cette équation permet prédire la contribution essentielle du désordre matériel au renforcement du matériau. Elle reproduit de façon quantitative les résultats de simulations coplanaires (voir courbes rouges en Fig. 7a).

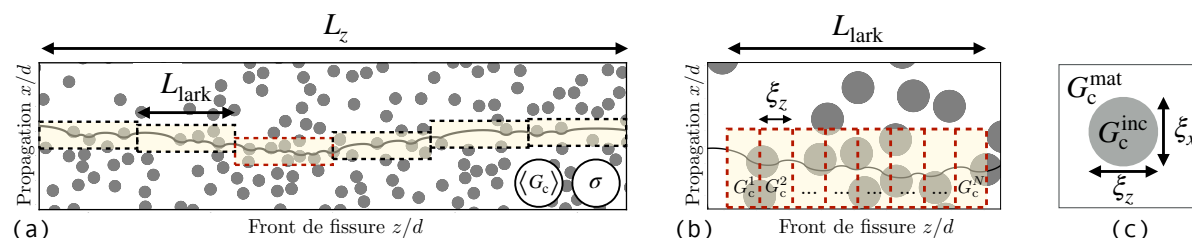


FIGURE 8 – (a) La propagation de fissure dans un champ d'énergie de rupture aléatoire décrit par sa énergie de rupture moyenne $\langle G_c \rangle$ et son écart-type σ s'articule domaine de Larkin de taille L_{lark} (b) comprenant chacun $N = L_c/\xi_z$ domaines indépendants correspondant (c) aux hétérogénéités de taille typique ξ_z et ξ_x .

Toutefois, cette théorie ne peut être appliquée directement à notre problème tri-dimensionnel présenté en figure 1. Dans ce cas, la fissure peut alternativement se propager (i) dans la matrice, (ii) dans une inclusion et (iii) le long de l'interface matrice/inclusion, faisant du champ d'énergie de rupture coplanaire $G_c^{\text{cop}}(z, x)$ une grandeur mal définie. L'équation (7) correspond en réalité à la dernière étape du processus d'homogénéisation, les précédentes visant à reconstruire le champ d'énergie de rupture coplanaire *équivalent* qui serait *effectivement* ressenti par la fissure lors de sa propagation. Cette reconstruction passe inmanquablement par la prise en compte de la microstructure et des mécanismes d'interaction associés.

6 Homogénéisation des propriétés de rupture : une prise en compte combinée des micro-mécanismes de fissuration et du désordre matériel.

Nous avons vu en Section 4 le rôle crucial des *micro-mécanismes d'interaction* dans le renforcement des composites, puis en Section 5 l'importance décisive du *désordre matériel* dans la prédiction de l'énergie de rupture effective d'un matériau composite. Il est désormais temps d'évaluer leur contribution *combinée* au renforcement du matériau dans le cas plus général où une fissure peut interagir selon (i) plusieurs mécanismes (traversée et contournement) avec (ii) des inclusions disposées de façon aléatoire. Il s'agit ici de l'apport principal de nos travaux à la construction d'un modèle d'homogénéisation capturant les phénomènes de fissuration dans toute leur complexité.

6.1 Prédire le comportement à rupture macroscopique du matériau par la prise en compte simultanée des mécanismes et du désordre

On compare en figure 9a l'énergie de rupture effective dans trois situations différentes : (1) celle d'un matériau composite où la fissure interagit avec les inclusions de ténacité uniforme disposées aléatoirement

par des mécanismes de traversée et de contournement (en traits pleins), (2) celle d'un matériau composite où la fissure interagit avec les inclusions de ténacité uniforme disposées périodiquement par des mécanismes de traversée et de contournement (en traitillés), et enfin (3) celle d'un matériau composite où la fissure interagit avec les inclusions disposées aléatoirement par le seul mécanisme de traversée (en pointillés). On y observe que la prise en compte *combinée* des mécanismes d'interaction *et* du désordre matériel est essentielle à la construction d'un modèle d'homogénéisation cohérent en mécanique de la rupture fragile.

Pour capturer ces effets, nous avons mis au point une procédure d'homogénéisation *en trois temps* (voir Fig. 9b) inspirée de la micromécanique et de la physique statistique afin d'estimer la contribution *simultanée* des mécanismes et du désordre. Cette procédure vise à reconstruire, (1) à partir d'une description statistique de la microstructure par la notion de *volumes élémentaires fracturés* (VEFs), et (2) des mécanismes par leur traduction en *défauts coplanaires équivalents* (DCEs), (3) le champ d'énergie de rupture effectivement ressenti par la fissure au cours de sa propagation. Ce champ sera ensuite utilisé pour estimer le chargement à rupture à partir d'outils de la physique des milieux désordonnés. Cette procédure permettra *in fine* de prédire l'énergie de rupture effective de matériaux hétérogènes et son évolution avec les paramètres microstructuraux (voir Fig. 9a).

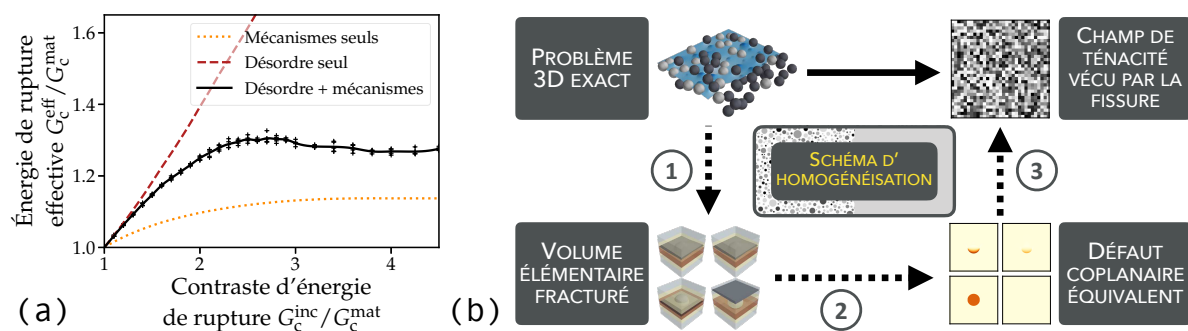


FIGURE 9 – Procédure d'homogénéisation des propriétés de rupture des matériaux désordonnés : (a) l'énergie de rupture effective est contrôlée à la fois par (i) les micro-mécanismes d'interactions et (ii) le désordre matériel. (b) Un schéma d'homogénéisation en trois temps est alors mis au point pour prendre en compte ces deux facteurs de façon simultanée. Il repose sur la reconstruction du champ d'énergie de rupture effectif ressenti par la fissure lors de sa propagation à partir de volumes élémentaires fissurés ; auxquels sont rattachés des défauts coplanaires équivalents – signature des mécanismes d'interaction.

Étape 1 – Prise en compte des propriétés microstructurales : le volume élémentaire fracturé –

À partir de la description statistique de la microstructure, il est possible de définir un volume élémentaire ω constitué d'une matrice cubique dans laquelle est plongée une inclusion aux propriétés données $(d_{inc}, G_c^{inc}, G_c^{int})$ et d'y associer une probabilité $p(\omega)$, qui peut être par exemple estimée à partir de l'analyse microstructurale du matériau (microscopie électronique, tomographie, etc.).

Ce volume élémentaire est traversé par une fissure arrivant à une hauteur y donnée, donnant naissance à un *volume élémentaire fracturé* (VEF) ω_F . À ce VEF est associé une nouvelle probabilité $p(\omega_F)$, combinant l'influence des propriétés microstructurales $p(\omega)$ et de la présence d'une fissure $p(y)$. On lui attribue aussi un mécanisme, résultant de l'analyse micromécanique de la Section 4 (Fig.10a). Des exemples de VEFs sont donnés en figure 10b-d.

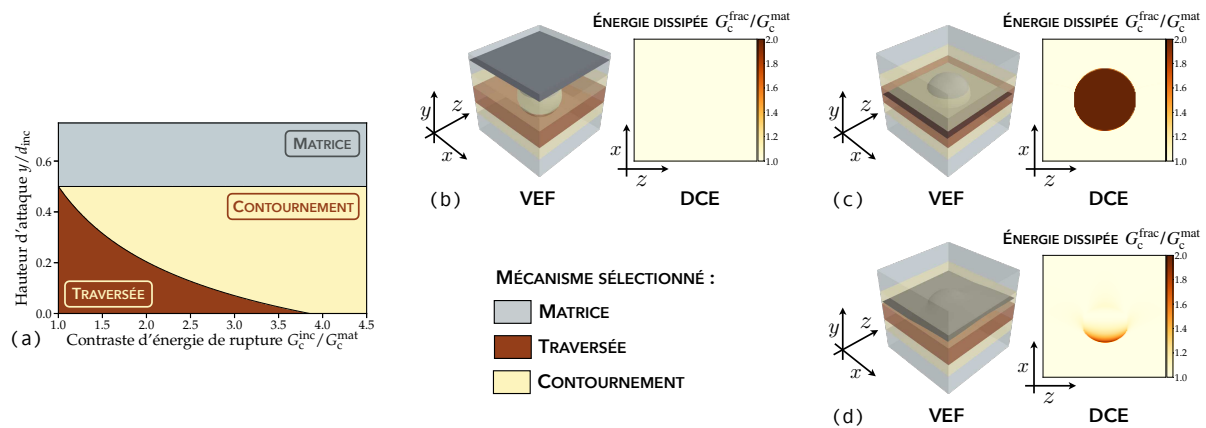


FIGURE 10 – Prise en compte des mécanismes d’interaction : (a) la sélection du mécanisme d’interaction est déterminée en fonction des propriétés mécaniques et géométriques de l’inclusion. (b-d) À chaque mécanisme est ensuite associé un volume élémentaire fracturé (VEF) ainsi qu’un défaut coplanaire équivalent (DCE) qui traduit la contribution individuelle du mécanisme au renforcement matériel.

Étape 2 – Contribution des mécanismes d’interaction : le défaut coplanaire équivalent – L’étape suivante consiste à transformer ces volumes élémentaires fracturés en *défauts coplanaires équivalents* (DCEs). Il faut avoir en tête que les déformations du front de fissure sont le miroir du champ d’énergie de rupture vécu par la fissure (Chopin et al., 2011; Patinet et al., 2013a; Vasoya et al., 2016b). Nous nous appuyons sur ce phénomène pour traiter le problème inverse, et déduire un champ d’énergie de rupture équivalent à chaque mécanisme à partir de la position du front de fissure au cours de son interaction avec l’inclusion (Lebihain et al., 2021). Ce défaut coplanaire équivalent correspond à la *contribution individuelle* de chaque mécanisme au renforcement global du composite. Des exemples de DCEs sont donnés en figure 10b-d.

Étape 3 – Influence du désordre matériel : la théorie de (Démery et al., 2014b) – Il est alors possible d’estimer les descripteurs statistiques $\langle G_c \rangle$, σ , ξ_z et ξ_x du champ d’énergie de rupture visité par la fissure lors de sa propagation en superposant l’ensemble des défauts coplanaires équivalents ω_F pondérés de leur probabilité $p(\omega_F)$ et en supposant le matériau *ergodique*. L’équation (7) permet finalement de prendre en compte les effets collectifs qui émergent du désordre et ainsi d’estimer l’énergie de rupture effective du composite.

On compare alors en figure 9a les prédictions du modèle semi-analytiques aux résultats de simulations numériques à grande échelle. Le renforcement du composite par des inclusions sphériques de ténacité croissante est bien décrite par notre formalisme d’homogénéisation jusqu’à un contraste d’énergie de rupture $G_c^{inc}/G_c^{mat} \simeq 3$. Cela est remarquable en raison de la complexité du problème traité où une fissure interagit avec plusieurs millions d’inclusions. Pour des contrastes plus élevés, le mécanisme sélectionné par la fissure dans son interaction avec l’inclusion dépend des mécanismes sélectionnés avec les inclusions voisines. Il est possible de prendre en compte la nature collective des mécanismes dans notre modèle (Lebihain, 2019) et d’améliorer le caractère prédictif de notre modèle.

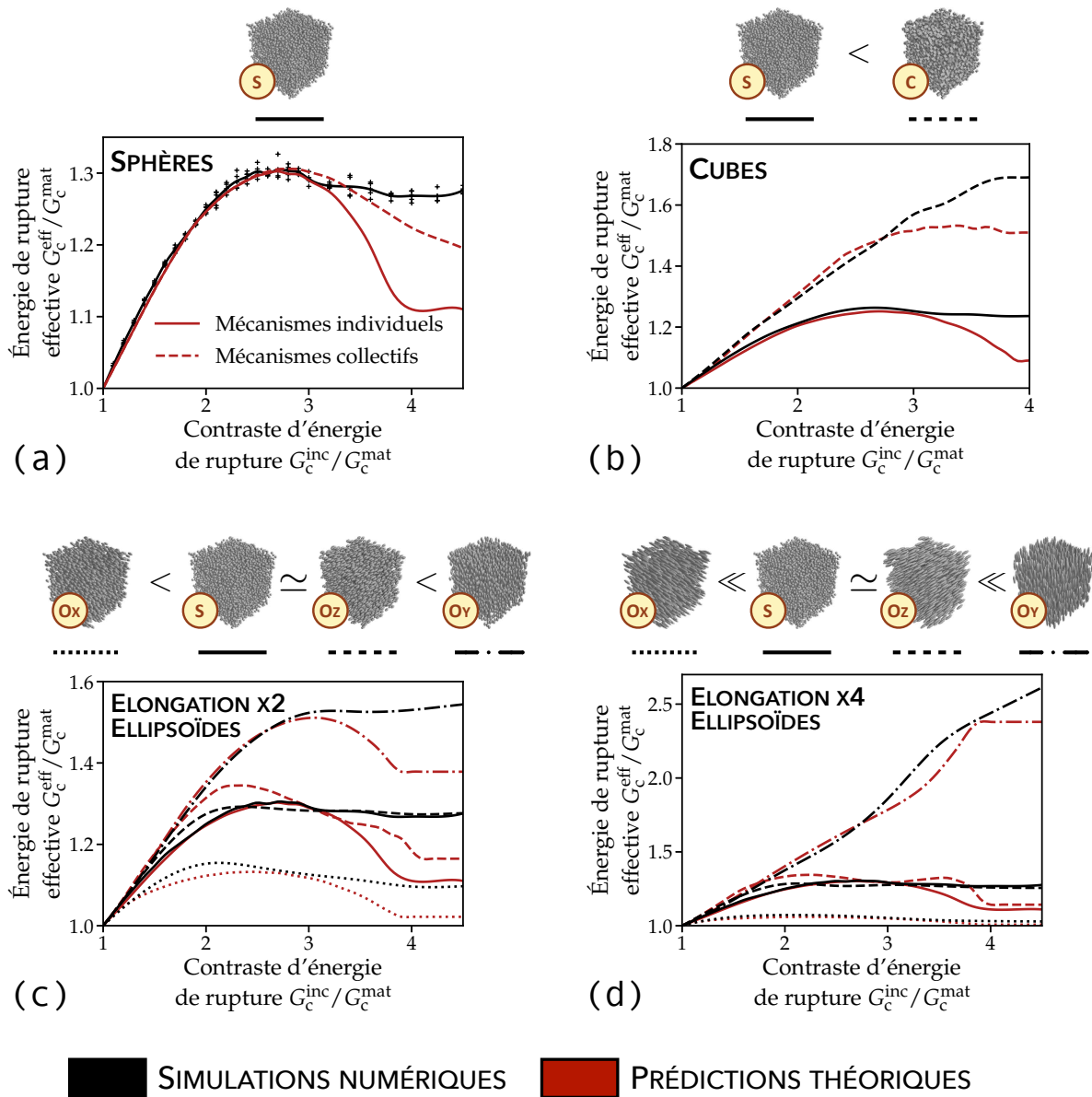


FIGURE 11 – Conception de matériaux aux propriétés de fissuration accrue : (a) le passage d'une géométrie sphérique à cubique d'inclusions augmente fortement le renforcement induit par les hétérogénéités. (b) L'introduction d'une texture dans le matériau peut rendre sa énergie de rupture fortement anisotrope.

6.2 Stratégies innovantes pour la conception de matériaux aux propriétés de rupture contrôlée

L'approche ainsi construite permet alors de prédire l'énergie de rupture effective de matériaux hétérogènes pour toute une gamme de paramètres microstructuraux (énergie de rupture de l'inclusion et de son interface avec la matrice, variations d'énergie de rupture entre les inclusions, de densité et de forme d'inclusion, etc.) et de comparer systématiquement ces prédictions aux résultats de simulations large-échelle afin d'asseoir la validité de notre formalisme (Lebihain, 2019; Lebihain et al., 2021).

Cette phase de validation a en outre permis de comprendre l'influence des paramètres microstructuraux sur l'énergie de rupture effective et d'identifier des stratégies innovantes pour concevoir des composites aux propriétés à rupture finement contrôlées. Deux stratégies majeures se démarquent dans notre travail :

1. **jouer sur les mécanismes** – Nous avons vu en Section 4 qu'il était possible d'influencer la sélection d'un mécanisme et sa contribution individuelle au renforcement en changeant la forme des inclusions. Ainsi, des inclusions cubiques permettaient de retarder le mécanisme de contournement et de le rendre plus coûteux énergétiquement. Le renforcement induit par des inclusions cubiques peut alors être jusqu'à 2.5 fois supérieur à celui induit par des inclusions sphériques (voir Fig.11b). Cet effet est même amplifié pour des inclusions ellipsoïdales orientées dans la direction (Oy) perpendiculaire à la surface de rupture (voir Fig.11c-d).
2. **modifier la structure interne du désordre** – La structure du désordre peut jouer un rôle prépondérant dans la qualité du renforcement d'un composite puisque la contribution du désordre est proportionnelle au rapport de taille ξ_z/ξ_x (voir Eq.(7)). Ainsi des inclusions ellipsoïdales orientées dans la direction du front (Ox) ($\xi_z/\xi_x < 1$) ne renforceront que très peu le composite (Fig.11c-d). Cet effet du désordre peut venir se coupler à l'effet des mécanismes dans le cas d'ellipsoïdes orientées dans la direction du front (Oz) : le contournement va être favorisé par la forme de l'inclusion (voir Fig. 4), ce qui va tendre à baisser le renforcement, mais la structure du désordre ($\xi_z/\xi_x > 1$) va venir compenser cette baisse et induire un renforcement similaire à celui des sphères (Fig.11c-d).

Ces exemples montrent bien toute la complexité de l'homogénéisation des propriétés à rupture avec des phénomènes de couplage inattendus entre mécanismes et désordre. En comprendre les ressorts permet néanmoins de créer des matériaux uniques aux propriétés de rupture fortement anisotropes, qui pourraient être utilisés pour arrêter et guider efficacement les fissures dans les composants critiques d'une structure.

6.3 Extension à des hétérogénéités plus complexes

Nous avons proposé un modèle d'homogénéisation permettant de mesurer l'énergie de rupture *effective* d'un matériau hétérogène par la prise en compte *simultanée* des *mécanismes d'interaction* et du *désordre matériel*. Cette méthode a été appliquée au cas relativement simple d'inclusions plus tenaces, partageant toutefois les mêmes propriétés élastiques que la matrice. Il est évident que les composites réels incorporent des hétérogénéités de nature bien plus complexe. Nous expliquons ici comment notre formalisme pourrait être déployé pour estimer le renforcement ultime d'un composite particulière.

La première étape reste inchangée et consiste en la décomposition du milieu hétérogène en volumes élémentaires $\omega \in \Omega$ auquel est associé une certaine probabilité $p(\omega)$. La caractérisation du volume élémentaire fracturé ω_F résultat de l'interaction d'une fissure principale avec le volume élémentaire ω pourra

être fait à l'aide de méthodes numériques plus adaptées comme les méthodes à champ de phase. L'étude des déformations de front pendant l'interaction de la fissure avec le volume élémentaire fracturé permettront ensuite de remonter au défaut coplanaire équivalent, signature de la contribution individuelle du mécanisme d'interaction au renforcement global. Les méthodes numériques employées permettraient ainsi de considérer des hétérogénéités plus diverses (Hossain et al., 2014; Nguyen et al., 2016; Xia et al., 2018; Brach et al., 2019) et s'avèrent efficaces pour traiter des problèmes 3D périodiques. Ces méthodes présentent néanmoins des difficultés importantes pour changer d'échelle. Ce dernier sera effectué par notre modèle, puisque la superposition des défauts coplanaires équivalent permet la reconstruction d'un champ de ténacité coplanaire équivalent, sur lequel la théorie statistique de Démercy et al. (2014b) peut être déployée.

7 Conclusions et perspectives

Ce papier compile des travaux de thèse (Lebihain, 2019) et propose un formalisme cohérent pour l'homogénéisation des propriétés de rupture de composites fragiles tri-dimensionnels. La construction et la validation de ce formalisme sont rendues possibles par la mise au point en Section 2 d'un outil de simulation efficace pour la propagation de fissure fondé sur une approche perturbative de la mécanique linéaire élastique de la rupture (Lebihain et al., 2020). Cet outil permet de modéliser à grande échelle la propagation d'une fissure et son interaction avec des millions d'inclusions plus tenaces disposées aléatoirement, par des mécanismes de traversée et de contournement. L'énergie de rupture effective d'un tel composite peut alors être mesurée par le taux de restitution d'énergie maximal pour faire propager une fissure dans le milieu. Nous avons vu en Section 3 que cette définition de l'énergie de rupture effective constitue une mesure robuste de la ténacité effective *intrinsèque* du composite sous réserve que la taille caractéristique des hétérogénéités microscopiques soit bien inférieure (deux ordres de grandeurs) aux longueurs caractéristiques reliées au problème de rupture à l'échelle macroscopique.

En Sections 4 et 5, nous avons montré que cette énergie de rupture effective était contrôlée à la fois par les *mécanismes d'interaction* entre fissure et les inclusions (Lebihain et al., 2020), mais aussi par le *désordre matériel* qui émerge du positionnement aléatoire des inclusions et des variations de leurs propriétés mécaniques (Lebihain, 2021). La contribution *simultanée* des micro-mécanismes et du désordre au renforcement macroscopique du composite est alors prédite en Section 6 à partir d'un modèle semi-analytique empruntant à la fois à la micromécanique et à la physique statistique (Lebihain et al., 2021). Les prédictions théoriques du modèle d'homogénéisation sont comparées avec succès aux résultats des simulations numériques. Elles décrivent correctement l'influence de paramètres microstructuraux variés comme celle de la ténacité des inclusions ou de leur géométrie. Ces résultats offrent la possibilité inédite de relier une microstructure donnée au renforcement macroscopique du composite, ainsi que des nouvelles stratégies pour la conception de meta-matériaux aux propriétés de rupture contrôlées.

Les perspectives offertes par ce travail sont multiples. Tout d'abord, il serait intéressant d'appliquer notre formalisme à des hétérogénéités de nature plus complexe (en faisant varier par exemple leurs propriétés élastiques) et un plan d'action a été proposé pour cela en Section 6.3. Ensuite, il serait opportun de confronter la théorie de Démercy et al. (2014a), sur laquelle repose la prise en compte du désordre matériel et le changement d'échelle, à des résultats expérimentaux. Des composites polymères imprimés 3D apparaissent comme des candidats solides pour de tels essais. Une étude préliminaire a été réalisée sur des hétérogénéités 2D (Albertini et al., 2021) et des essais sont actuellement réalisés sur des hétérogénéités 3D. Enfin, la mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER) n'incorpore dans son

formalisme aucune longueur caractéristique de la dissipation. Ainsi, chaque échelle d'hétérogénéités, de l'échelle nanométrique à l'échelle mésoscopique, intervient de manière similaire dans la théorie de (Démery et al., 2014a). Or, dans les matériaux réels, la dissipation est localisée dans une zone d'extension finie, la *process zone*, dont la taille est susceptible de venir résonner avec chaque échelle d'aspérités. Une extension récente (Lebihain et al., 2022) de la théorie perturbative de Rice (1985) aux matériaux cohésifs offre des perspectives intéressantes pour la prise en compte de la taille finie de la *process zone*, caractéristique de la dissipation, dans l'homogénéisation des propriétés de rupture.

Références

- Albertini, G., Lebihain, M., Hild, F., Ponson, L., and Kammer, D. S. (2021). Effective toughness of heterogeneous materials with rate-dependent fracture energy. *Physical Review Letters*, 127(3) :035501.
- Amestoy, M. and Leblond, J. B. (1992). Crack paths in plane situations II. detailed form of the expansion of the stress intensity factors. *International Journal of Solids and Structures*, 29(4) :465–501.
- Bonamy, D. (2009). Intermittency and roughening in the failure of brittle heterogeneous materials. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 42(21) :214014.
- Bonamy, D. and Bouchaud, E. (2011). Failure of heterogeneous materials : A dynamic phase transition ? *Physics Reports*, 498(1) :1–44.
- Bower, A. and Ortiz, M. (1991). A three-dimensional analysis of crack trapping and bridging by tough particles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(6) :815–858.
- Bower, A. F. and Ortiz, M. (1990). Solution of three-dimensional crack problems by a finite perturbation method. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38(4) :443–480.
- Brach, S., Hossain, M. Z., Bourdin, B., and Bhattacharya, K. (2019). Anisotropy of the effective toughness of layered media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 131 :96–111.
- Chopin, J., Bhaskar, A., Jog, A., and Ponson, L. (2018). Depinning dynamics of crack fronts. *Physical Review Letters*, 121(23) :235501.
- Chopin, J., Prevost, A., Boudaoud, A., and Adda-Bedia, M. (2011). Crack front dynamics across a single heterogeneity. *Physical Review Letters*, 107(14) :144301.
- Clayton, J. D. and Knap, J. (2014). A geometrically nonlinear phase field theory of brittle fracture. *International Journal of Fracture*, 189(2) :139–148.
- Démery, V., Lecomte, V., and Rosso, A. (2014a). Effect of disorder geometry on the critical force in disordered elastic systems. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2014(3) :P03009.
- Démery, V., Rosso, A., and Ponson, L. (2014b). From microstructural features to effective toughness in disordered brittle solids. *EPL (Europhysics Letters)*, 105(3) :34003.
- Deudé V., Dormieux L., Kondo D., and Maghous S. (2002). Micromechanical approach to nonlinear poroelasticity : Application to cracked rocks. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(8) :848–855.

- Dimas, L., Bratzel, G., Eylon, I., and Buehler, M. (2013). Tough composites inspired by mineralized natural materials : Computation, 3d printing, and testing. *Advanced Functional Materials*, 23(36) :4629–4638.
- Dormieux, L., Kondo, D., and Ulm, F.-J. (2006). *Microporomechanics*. John Wiley & Sons.
- Faber, K. T. and Evans, A. G. (1983). Crack deflection processes - i. theory. *Acta Metallurgica*, 31(4) :565–576.
- Francfort, G. A. and Marigo, J. J. (1998). Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8) :1319–1342.
- Gao, H. and Rice, J. (1986). Shear stress intensity factors for a planar crack with slightly curved front. *Journal of Applied Mechanics*, 53(4) :774–778.
- Gao, H. and Rice, J. (1989). A first-order perturbation analysis of crack trapping by arrays of obstacles. *Journal of Applied Mechanics*, 56(4) :828–836.
- Gol'dstein, R. V. and Salganik, R. L. (1974). Brittle fracture of solids with arbitrary cracks. *International Journal of Fracture*, 10(4) :507–523.
- Griffith, A. (1921). The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 221.
- Gurtin, M. and Podio-Guidugli, P. (1998). Configurational forces and a constitutive theory for crack propagation that allows for kinking and curving. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8) :1343–1378.
- Hakim, V. and Karma, A. (2005). Crack path prediction in anisotropic brittle materials. *Physical Review Letters*, 95(23) :235501.
- Hashin, Z. and Shtrikman, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2) :127–140.
- He, M. and Hutchinson, J. (1989). Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 25(9) :1053–1067.
- Herve, E. and Zaoui, A. (1993). n-layered inclusion-based micromechanical modelling. *International Journal of Engineering Science*, 31(1) :1–10.
- Hill, R. (1963). Elastic properties of reinforced solids : Some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(5) :357–372.
- Hossain, M. Z., Hsueh, C. J., Bourdin, B., and Bhattacharya, K. (2014). Effective toughness of heterogeneous media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 71 :15–32.
- Hussain, M. A., Pu, S., and Underwood, J. (1974). Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II. *Fracture Analysis : Proceedings of the 1973 National Symposium on Fracture Mechanics, Part II*.
- Ibarra, A., Roman, B., and Melo, F. (2016). The tearing path in a thin anisotropic sheet from two pulling points : Wulff's view. *Soft Matter*, 12(27) :5979–5985.

- Irwin, G. R. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate. *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 24 :361–364.
- Lebihain, M. (2019). *Large-scale crack propagation in heterogeneous materials : an insight into the homogenization of brittle fracture properties*. PhD thesis, Sorbonne Université.
- Lebihain, M. (2021). Towards brittle materials with tailored fracture properties : the decisive influence of the material disorder and its microstructure. *International Journal of Fracture*, 230(1) :99–114.
- Lebihain, M., Leblond, J.-B., and Ponson, L. (2020). Effective toughness of periodic heterogeneous materials : the effect of out-of-plane excursions of cracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 137 :103876.
- Lebihain, M., Ponson, L., Kondo, D., and Leblond, J.-B. (2021). Effective toughness of disordered brittle solids : A homogenization framework. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 153 :104463.
- Lebihain, M., Roch, T., and Molinari, J.-F. (2022). Quasi-static crack front deformations in cohesive materials.
- Leguillon, D., Tariolle, S., Martin, E., Chartier, T., and Besson, J. L. (2006). Prediction of crack deflection in porous/dense ceramic laminates. *Journal of the European Ceramic Society*, 26(3) :343–349.
- Li, B. and Maurini, C. (2019). Crack kinking in a variational phase-field model of brittle fracture with strongly anisotropic surface energy. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 125 :502–522.
- Milton, G. W. (2002). *The theory of composites*. Cambridge University Press .
- Mirkhalaf, M., Dastjerdi, A. K., and Barthelat, F. (2014). Overcoming the brittleness of glass through bio-inspiration and micro-architecture. *Nature Communications*, 5 :3166.
- Movchan, A., Gao, H., and Willis, J. (1998). On perturbations of plane cracks. *International Journal of Solids and Structures*, 35(26) :3419–3453.
- Nguyen, T. T., Yvonnet, J., Zhu, Q. Z., Bornert, M., and Chateau, C. (2016). A phase-field method for computational modeling of interfacial damage interacting with crack propagation in realistic microstructures obtained by microtomography. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 312 :567–595.
- Patinet, S., Alzate, L., Barthel, E., Dalmas, D., Vandembroucq, D., and Lazarus, V. (2013a). Finite size effects on crack front pinning at heterogeneous planar interfaces : Experimental, finite elements and perturbation approaches. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 61(2) :311–324.
- Patinet, S., Vandembroucq, D., and Roux, S. (2013b). Quantitative prediction of effective toughness at random heterogeneous interfaces. *Physical Review Letters*, 110(16) :165507.
- Pensée V., Kondo D., and Dormieux L. (2002). Micromechanical analysis of anisotropic damage in brittle materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(8) :889–897.
- Ponte-Castañeda, P. and Willis, J. (1995). The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(12) :1919–1951.

- Rice, J. (1985). First-order variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front. *Journal of Applied Mechanics*, 52(3) :571–579.
- Roux, S. and Hild, F. (2006). Stress intensity factor measurements from digital image correlation : post-processing and integrated approaches. *International Journal of Fracture*, 140(1) :141–157.
- Roux, S. and Hild, F. (2008). Self-consistent scheme for toughness homogenization. *International Journal of Fracture*, 154(1) :159–166.
- Roux, S., Vandembroucq, D., and Hild, F. (2003). Effective toughness of heterogeneous brittle materials. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 22(5) :743–749.
- Schneider, M. (2020). An FFT-based method for computing weighted minimal surfaces in microstructures with applications to the computational homogenization of brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 121(7) :1367–1387.
- Takei, A., Roman, B., Bico, J., Hamm, E., and Melo, F. (2013). Forbidden directions for the fracture of thin anisotropic sheets : An analogy with the wulff plot. *Physical Review Letters*, 110(14) :144301.
- Vasoya, M., Lazarus, V., and Ponson, L. (2016a). Bridging micro to macroscale fracture properties in highly heterogeneous brittle solids : weak pinning versus fingering. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 95 :755–773.
- Vasoya, M., Unni, A., Leblond, J., Lazarus, V., and Ponson, L. (2016b). Finite size and geometrical non-linear effects during crack pinning by heterogeneities : An analytical and experimental study. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 89 :211–230.
- Wang, N. and Xia, S. (2017). Cohesive fracture of elastically heterogeneous materials : An integrative modeling and experimental study. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 98 :87–105.
- Xia, L., Da, D., and Yvonnet, J. (2018). Topology optimization for maximizing the fracture resistance of quasi-brittle composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 332 :234–254.
- Xu, X. P. and Needleman, A. (1994). Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42(9) :1397–1434.