



HAL
open science

Représentation maillée de fronts de contact par l'approche eXtreme Mesh (X-MESH)

Benoît Lé, Nicolas Moes, Nicolas Chevaugéon, Jean-François Remacle

► **To cite this version:**

Benoît Lé, Nicolas Moes, Nicolas Chevaugéon, Jean-François Remacle. Représentation maillée de fronts de contact par l'approche eXtreme Mesh (X-MESH). 25e Congrès Français de Mécanique, Aug 2022, Nantes, France. hal-04280216

HAL Id: hal-04280216

<https://hal.science/hal-04280216>

Submitted on 13 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Représentation maillée de fronts de contact par l'approche *eXtreme Mesh* (X-MESH)

B. LÉ^a, N. MOËS^{b,c}, N. CHEVAUGEON^d, J.-F. REMACLE^e

a. École Centrale de Nantes, GeM, UMR 6183, 44321 Nantes, France, benoit.le@ec-nantes.fr

b. École Centrale de Nantes, GeM, UMR 6183, 44321 Nantes, France, nicolas.moes@ec-nantes.fr

c. Institut Universitaire de France (IUF)

d. École Centrale de Nantes, GeM, UMR 6183, 44321 Nantes, France,
nicolas.chevaugon@ec-nantes.fr

e. Université Catholique de Louvain, Institute of Mechanics, Materials and Civil Engineering, 1348
Louvain-la-Neuve, Belgium, jean-francois.remacle@uclouvain.be

Résumé :

Cet article pose les bases d'une méthode efficace de représentation des fronts de contact, reposant sur l'approche X-MESH introduite dans [1] pour modéliser les fronts de changement de phase. L'idée est de déplacer des noeuds du maillage éléments finis afin d'obtenir une représentation maillée, continue en temps du front de contact. Ces mouvements de noeuds se font sans changement de topologie des noeuds du maillage. Les potentialités de la méthode sont illustrées sur un problème 1D pour lequel une solution analytique existe, mettant en évidence la capacité de la méthode X-MESH à calculer avec précision la position des fronts de contact.

Abstract :

This work gives the basis for an efficient way to model sharp contact fronts, based on the X-MESH approach which was originally introduced in [1] to model phase-change fronts. The key idea is to move the nodes of a finite element mesh to have a time continuous, sharp representation of the contact front. These nodes movements keep the mesh topology fixed. The capabilities of the method are illustrated on a 1D for which an analytical solution exists, which shows that the X-MESH method allows to accurately recover the position of the contact front.

Mots clefs : X-MESH , mécanique du contact, membrane, interface maillée

1 Introduction

Les problèmes de contact sont modélisés par des contraintes d'inégalités, qui ont fait l'objet de nombreuses recherches au cours des dernières décennies [2, 3]. Les approches les plus populaires pour résoudre ce type de problèmes sont les approches mortar [4, 5, 6, 7], la méthode des multiplicateurs de Lagrange [8, 3], la méthode de pénalisation [8, 3], ou encore l'approche par Lagrangien augmenté [9, 3] qui est une combinaison de la méthode des multiplicateurs de Lagrange et de la méthode de pénalisation.

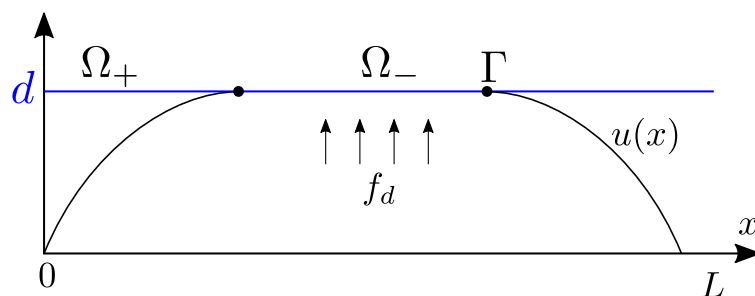


FIGURE 1 – Illustration of 1D contact problem

La plupart de ces techniques sont efficaces pour modéliser l'intérieur des zones de contact, en revanche peu d'entre elles sont capables de représenter efficacement les fronts de contact (frontières des zones de contact). On peut citer par exemple les travaux de [10] qui proposent une méthode de quadrature précise pour prendre en compte les discontinuités au niveau des fronts de contact. Cette approche nécessite cependant d'utiliser une sous-grille d'intégration, et la pression de contact doit être obtenue par post-traitement. D'autres méthodes permettent d'obtenir une représentation nette du front de contact en déplaçant des noeuds du maillage éléments finis [11, 12]. Inversement, l'approche ILS (Inequality Level-Set) [13] utilise une représentation implicite du front de contact au moyen d'une fonction de niveau et d'un enrichissement X-FEM.

Ce travail pose les bases d'une méthode efficace pour représenter les fronts de contact, fondée sur l'approche X-MESH introduite par [1] pour étudier les fronts de changement de phase. L'idée clé est de déplacer les noeuds du maillage éléments finis pour obtenir en chaque instant du calcul un maillage coïncidant avec le front de contact. On insiste sur le fait qu'il ne s'agit que de déplacer des noeuds, sans changer leur topologie. L'efficacité de la méthode est démontrée sur un exemple de contact entre une membrane élastique et une surface rigide 1D, et servira dans des travaux futurs à traiter des cas plus généraux (2D/3D, contact entre solides déformables, etc).

L'article est organisé de la façon suivante. Les équations du problème 1D sont présentées dans la section 2. La résolution par la méthode des éléments finis classiques est également brièvement évoquée. La correction par la méthode X-MESH des résultats obtenus ainsi est développée dans la section 3. L'approche X-MESH est illustrée sur un exemple 1D numérique dans la section 4. Enfin, quelques conclusions et perspectives clôturent cet article dans la section 5.

2 Description du problème et résolution éléments finis

On considère le problème d'une membrane 1D de longueur L sous l'hypothèse des petites perturbations illustré sur la figure 1. La tension de la membrane est notée T et son déplacement vertical en fonction de $x \in \Omega = [0; L]$ est noté u . Les bords de la membrane $\partial\Omega$ sont fixés ($u(x=0) = 0$ et $u(x=L) = 0$). Une pression uniforme f_d est appliquée, plaquant la membrane contre une surface plane rigide située à une hauteur d . Ce problème peut s'écrire comme le problème de minimisation suivant :

$$u = \arg \min_{\tilde{u} \in \mathcal{U}_d \cup \mathcal{C}} \int_{\Omega} T \|\nabla \tilde{u}\|^2 \, d\Omega - \int_{\Omega} f_d \tilde{u} \, d\Omega \quad (1)$$

où

$$\mathcal{U}_d = \{\tilde{u} \in H^1(\Omega) \mid \tilde{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \quad (2)$$

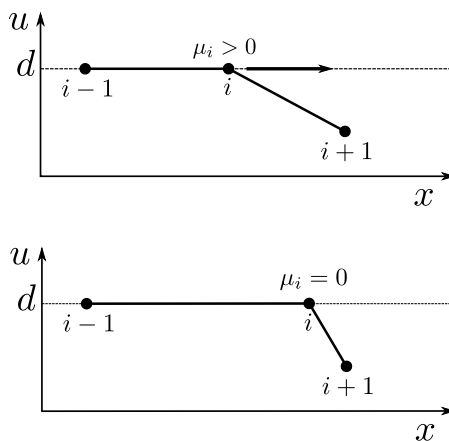


FIGURE 2 – Illustration de la correction X-MESH en 1D.

et

$$\mathcal{C} = \{\tilde{u} \in H^1(\Omega) \mid \tilde{u} \leq d \text{ sur } \Omega\} \quad (3)$$

Le domaine $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$ est divisé en une zone de non-contact Ω_+ :

$$\Omega_+ = \{x \mid u(x) < d\} \quad (4)$$

et une zone de contact

$$\Omega_- = \{x \mid u(x) = d\} \quad (5)$$

La frontière $\Gamma = \Omega_+ \cap \Omega_-$ est appelée “front de contact” (ou juste “front”) dans ce qui suit. Le contact entre la membrane et la surface plane rigide est supposé sans frottements.

Le domaine Ω est discrétisé à l’aide de n_e éléments finis. L’ensemble des $n_n = n_e + 1$ noeuds du maillage éléments finis est noté I , et leurs abscisses $x_i, \forall i \in I$. Le déplacement u est discrétisé en 1D :

$$u_h(x) = \sum_{i \in I} u_i N_i(x) \quad (6)$$

où les N_i sont les fonctions d’interpolation éléments finis linéaires 1D et u_i sont les degrés de liberté en déplacement. Les valeurs u_i peuvent être obtenues pour un maillage fixe donné par n’importe quel algorithme de contact classique, pour cet article un algorithme de type contraintes actives [3] a été utilisé. Dans ce qui suit, l’indice “h” qui fait référence à la version discrétisée de u est omis pour simplifier les notations.

3 Correction X-MESH

La section 2 explique comment trouver, pour une position donnée des noeuds du maillage éléments finis, un champ de déplacement u satisfaisant (1). À convergence, on obtient ainsi des noeuds I_- considérés comme en contact avec la surface rigide

$$I_- = \{i \mid u_i < d\} \quad (7)$$

et des noeuds I_+ qui ne le sont pas :

$$I_+ = \{i \mid u_i = d\} \quad (8)$$

On définit l'ensemble I_f des noeuds de front comme les noeuds de I_- adjacent à un noeud de I_+ . Par exemple, le noeud i sur la figure 2 est un noeud de I_f , tandis que le noeud $i - 1$ est dans I_- et le noeud $i + 1$ dans I_+ . Dans la grande majorité des cas, la position des noeuds de I_f n'est pas la position exacte du front Γ . On propose dans cette section de déplacer les noeuds de I_f afin de se rapprocher au plus près de la position de Γ . Pour cela, on définit le multiplicateur de lagrange μ obtenu par post-traitement, introduit dans [13] :

$$\mu_i = \int_{\Omega_+} f_d N_i \, d\Omega - \int_{\Omega_+} T \nabla u \cdot \nabla N_i \, d\Omega, \quad \forall i \in I_f \quad (9)$$

Suivant l'idée de [13], μ_i est nul si la position du noeud i est celle du front Γ . La valeur de $\mu_{i, i \in I_f}$ obtenue après avoir appliquée la procédure exposée dans la section 2 est dans la majorité des cas non nulle, on propose donc ici une fois que les noeuds I_f sont connus, de les déplacer de sorte que $\mu_{i, i \in I_f} = 0$, comme illustré sur la figure 2. Dans le cas du noeud i de la figure 2 situé à droite de la zone de contact, μ_i s'écrit

$$\mu_i = \frac{f_d}{2}(x_{i+1} - x_i) + T \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (10)$$

L'expression de μ_i pour le noeud situé à gauche de la zone de contact est similaire, au signe près. On peut donc obtenir la position x_i^* du noeud i telle que $\mu_i = 0$:

$$x_i^* = x_{i+1} - \sqrt{\frac{2T(d - u_{i+1})}{f_d}} \quad (11)$$

où l'on a utilisé le fait que $u_i = d$ (i appartenant à I_f). On déplace ainsi le noeud i jusqu'à sa nouvelle position x_i^* en utilisant l'équation (11), puis on résout le problème de la section 2 avec le nouveau maillage obtenu, et ainsi de suite jusqu'à convergence. Dans ce cas 1D simple, il est possible d'obtenir analytiquement la position des noeuds du front telle que μ_i . Dans un cas plus général, il sera probablement nécessaire de chercher x_i^* par un algorithme itératif (Newton-Raphson, dichotomie, méthode de Brent, etc).

4 Résultats numériques

On considère une membrane de longueur $L = 1$ m et de tension $T = 10$ N.m⁻¹. La surface rigide est à une hauteur $d = 0.002$ m. Les positions analytiques des fronts de contact x_{c1} et x_{c2} sont :

$$x_{c1} = \sqrt{2 \frac{Td}{f_d}}, \quad x_{c2} = L - \sqrt{2 \frac{Td}{f_d}} \quad (12)$$

La solution en déplacement est :

$$u_{ex}(x) = \begin{cases} -\frac{T}{f_d} \left(\frac{x^2}{2} - x_{c1}x \right) \text{ pour } x < x_{c1} \\ -\frac{T}{f_d} \left(\frac{(x^2 - L^2)}{2} - x_{c2}(x - L) \right) \text{ pour } x > x_{c2} \end{cases} \quad (13)$$

Les champs de déplacements pour plusieurs valeurs de f_d pour une membrane discretisée avec $n_e = 20$ éléments finis sont tracés sur la figure 3. On remarque que dans ce cas particulier où la surface rigide est horizontale et f_d uniforme, les valeurs de la solution numérique aux noeuds sont exactement celles de la solution analytique. Cela est possible car les positions des fronts sont parfaitement calculées (cf. figure 3 (g) pour la valeur de x_{c1}). Le relais de noeud X-MESH peut être observé, avec le front qui se déplace de noeud en noeud sur les figures 3 (b) à 3 (d), alors que le front est porté par le même noeud qui se déplace le long d'un élément sur les figures 3 (d) et 3 (e). On remarque ainsi que le front de contact n'est pas toujours porté par les mêmes noeuds ce qui permet de le propager sur de longues distances tout en gardant un maillage acceptable de part et d'autre du front. Seuls les éléments touchant le front peuvent devenir très petits voire de taille nulle. C'est une originalité de l'approche X-MESH que d'autoriser ce fait. Le traitement des petits éléments est discuté dans [1].

5 Conclusion

Cet article présente des résultats préliminaires d'application de l'approche X-MESH, initialement introduite dans [1] pour capturer les fronts de changement de phase, sur un problème simple de contact 1D. L'idée consiste à partir du résultat d'un calcul éléments finis utilisant un algorithme de contact classique, et de déplacer des noeuds du maillage pour les rapprocher du front de contact. Le critère utilisé pour trouver la position du front est basé sur les travaux de [13]. Sur un problème simple 1D, l'approche X-MESH permet de retrouver la solution analytique aux noeuds du maillage éléments finis. Les futurs travaux consisteront à étendre l'approche en 2D/3D, pour différents cas de chargement et formes de surface rigide, et à plus long terme, pour le contact de deux solides déformables.

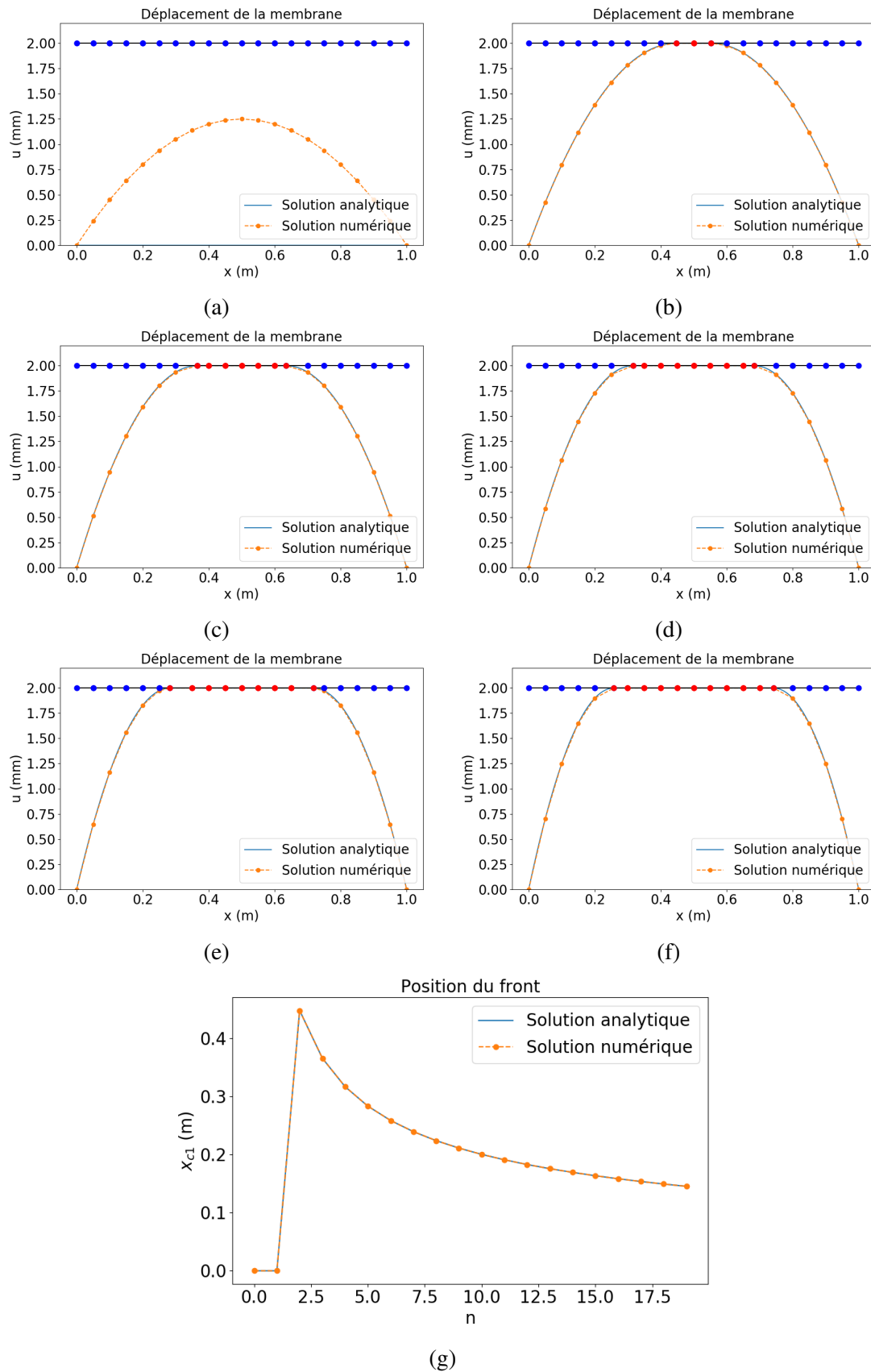


FIGURE 3 – Figures (a) à (f) : déplacements analytiques et X-MESH à différents instant de calcul. Les noeuds de la zone de contact sont tracés en rouge, et ceux de la zone de non-contact en bleu. Figure (g) : valeurs analytique et X-MESH de x_{c1} à différentes étapes de chargement. x_{c1} est arbitrairement initialisée à 0 tant qu'il n'y a pas contact (deux premiers points de (g)). Les figures (a) à (f) correspondent aux 6 premiers points de la figure (g) où x_{c1} est non nul.

Références

- [1] Nicolas Moës, Jean-Francois Remacle, Jonathan Lambrechts, Benoît Lé, and Nicolas Chevaugeon. The extreme mesh deformation approach (x-mesh) for the stefan phase-change model, 2021. Submitted to the Journal of Computational Physics.
- [2] Tod A. Laursen. *Computational contact and impact mechanics : fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [3] Peter Wriggers and Tod A. Laursen. *Computational contact mechanics*, volume 2. Springer, 2006.
- [4] F. B. Belgacem, P. Hild, and P. Laborde. The mortar finite element method for contact problems. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(4-8) :263–271, 1998.
- [5] Michael A. Puso and Tod A. Laursen. A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :601–629, 2004.
- [6] A. Popp, B. I. Wohlmuth, M. W. Gee, and W. A. Wall. Dual quadratic mortar finite element methods for 3D finite deformation contact. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34(4) :421–446, 2012.
- [7] A. Popp and W. A. Wall. Dual mortar methods for computational contact mechanics - Overview and recent developments. *GAMM Mitteilungen*, 37(1) :66–84, 2014.
- [8] Noboru Kikuchi and John Tinsley Oden. *Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods*. SIAM, 1988.
- [9] P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92(3) :353–375, 1991.
- [10] Thang X. Duong and Roger A. Sauer. An accurate quadrature technique for the contact boundary in 3D finite element computations. *Computational Mechanics*, 55(1) :145–166, 2015.
- [11] Cuneyt Oysu. Finite element and boundary element contact stress analysis with remeshing technique. *Applied Mathematical Modelling*, 31(12) :2744–2753, 2007.
- [12] David Franke, Ernst Rank, and Alexander Duester. Computational contact mechanics based on the rp-version of the finite element method. *International Journal of Computational Methods*, 8(03) :493–512, 2011.
- [13] Matthieu Graveleau, Nicolas Chevaugeon, and Nicolas Moës. The inequality level-set approach to handle contact : membrane case. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 2(1) :25, 2015.