



HAL
open science

Comportement effectif et limite de linéarité d'un d'un matériau architecturé 2D périodique à cellules triangulaires

Valentin Jeanneau, Christelle Combescure, M.L.M. François

► **To cite this version:**

Valentin Jeanneau, Christelle Combescure, M.L.M. François. Comportement effectif et limite de linéarité d'un d'un matériau architecturé 2D périodique à cellules triangulaires. 25e Congrès Français de Mécanique, Aug 2022, Nantes, France. hal-04280185

HAL Id: hal-04280185

<https://hal.science/hal-04280185>

Submitted on 10 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comportement effectif et limite de linéarité d'un matériau architecturé 2D périodique à cellules triangulaires

V. JEANNEAU^a, C. COMBESURE^{b,c}, M. FRANCOIS^a

- a. Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (UMR CNRS 6183), Nantes Université, 2 rue de la Houssinière, 44322 Nantes Cedex 3, France, valentin.jeanneau@univ-nantes.fr, marc.francois@univ-nantes.fr
- b. Institut de Recherche Dupuy-de-Lôme (UMR CNRS 6027), 56100 Lorient, France, christelle.combescure@univ-ubs.fr
- c. Centre de Recherche des Ecoles de Saint-Cyr Coëtquidan, 56381 Guer Cedex, France

Résumé :

La surface limite de linéarité d'un matériau architecturé 2D à cellules triangulaires quelconques est calculée de manière semi-analytique. Elle est composée de l'intersection de trois surfaces : 1) la limite d'élasticité du matériau constitutif des poutres, 2) la limite en flambement sur un nombre fini de cellules et 3) la limite de localisation. Les composantes analytiques du tenseur d'élasticité sont également retrouvées pour cette structure.

Abstract :

Semi-analytical limit surface of linearity is calculated for a 2D architected material with triangular cells. It is composed by the intersection of three surfaces : 1) the yield strength of the beam's constitutive material, 2) the buckling limit over a finite number of cells, 3) the localization limit. The analytical components of the elasticity tensor are also calculated for the structure.

Mots clefs : Matériau architecturé, surface seuil, instabilités

1 Introduction

Les matériaux architecturés, notamment ceux constitués de méso-structure en treillis, présentent des caractéristiques mécaniques intéressantes mais ne sont pas encore utilisées à l'échelle industrielle. Deux verrous à cette utilisation à plus grande échelle sont : 1) le choix de la géométrie optimale pour le treillis constitutif, 2) la détermination de l'ensemble des sollicitations admissibles à l'échelle macroscopique par le matériau homogène équivalent assurant sa réponse dans le domaine élastique linéaire. Le travail présenté dans cet article fournit des outils quasi-analytiques permettant l'optimisation de la géométrie des méso-structure.

2 Modélisation

2.1 Résolution du problème en déplacement

Pour ces travaux, le matériau considéré est constitué d'une méso-structure 2D infiniment périodique à cellules triangulaires (Fig. 1). La périodicité permet de réduire le cadre à une cellule unitaire représentative du milieu. La définition de cette cellule \mathcal{C} n'est pas unique. Celle retenue est choisie de manière à pouvoir paver le plan uniquement grâce à deux translations suivant les vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 et coupe les poutres en leurs milieux (Fig. 1).

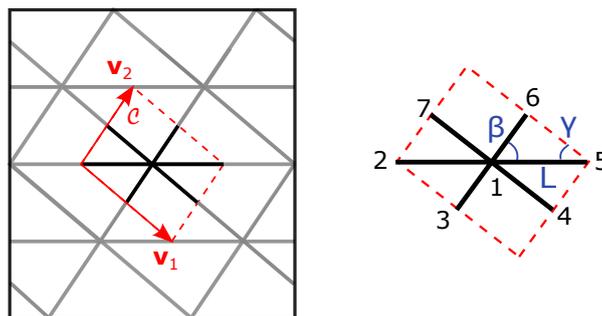


FIGURE 1 – Treillis mésoscopique considéré, cellule unitaire représentative \mathcal{C} et paramétrage de la géométrie

Les éléments constituant \mathcal{C} sont modélisés comme des poutres élancées de types Euler-Bernoulli pouvant subir de grands déplacements. Afin d'utiliser la méthode des déplacements, le champ de déplacement de chacune des poutres est exprimé en fonction des trois degrés de liberté de ses deux extrémités. L'utilisation de fonctions d'interpolation linéaires pour le déplacement axial et cubiques pour le déplacement transversal, correspond aux solutions analytiques exactes de la théorie des poutres.

Le chargement est piloté via le tenseur des déformations macroscopiques de Green-Lagrange \mathbf{E} . Selon l'hypothèse de Cauchy-Born [1] le champ de déplacement total \mathbf{U} de \mathcal{C} est composé d'un champ macroscopique homogène $\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{E}\mathbf{X}$ (avec \mathbf{X} les coordonnées cartésienne du point considéré de \mathcal{C}) et d'un champ périodique $\tilde{\mathbf{U}}$ inconnu de même période spatiale que \mathcal{C} (Fig. 2).

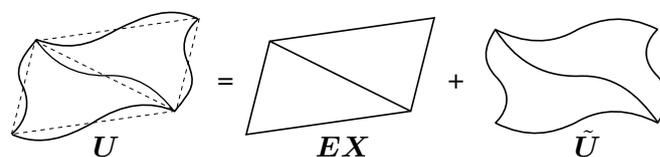


FIGURE 2 – Representation schématique d'un champ de déplacement répondant à l'hypothèse de Cauchy-Born

Du fait de la périodicité de la méso-structure et du choix de \mathcal{C} , les noeuds opposés d'une cellule unitaire ont le même déplacement périodique. Avec la notation nodale (Fig. 1), il est possible d'écrire l'ensemble des degrés de liberté de la cellule unitaire en fonction des degrés de liberté indépendants.

$$\tilde{q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}^1 \\ \tilde{q}^2 \\ \tilde{q}^3 \\ \tilde{q}^4 \\ \tilde{q}^5 \\ \tilde{q}^6 \\ \tilde{q}^7 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{I} \\ 0 & \mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix}}_{Z_0} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{q}^1 \\ \tilde{q}^2 \\ \tilde{q}^3 \\ \tilde{q}^4 \end{bmatrix}}_{\tilde{q}^*}$$

L'ensemble des degrés de liberté q de \mathcal{C} s'écrit sous la forme : $q = Z_0 \tilde{q}^* + \hat{q}$ où \tilde{q} sont les déplacements périodiques, \tilde{q}^* sont les déplacements périodiques indépendantes des noeuds de \mathcal{C} . \hat{q} est l'ensemble des déplacements imposé à la cellule unitaire.

Selon la méthode des déplacements, aucun effort n'est appliqué, l'équation d'équilibre du système s'écrit donc : $Kq = 0$ où K est la matrice de raideur de la cellule unitaire. L'équation à résoudre est :

$$Z_0^T K Z_0 \tilde{q}^* = -Z_0^T K \hat{q}$$

Ce qui permet d'exprimer le champ de déplacement périodique en fonction du champ de déplacement imposé.

2.2 Homogénéisation périodique

Le lemme de Hill [2] impose la conservation de l'énergie mécanique entre différentes échelles de description. A l'échelle macroscopique, cette énergie s'écrit $\mathcal{E}_M = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E}$. A l'échelle mésoscopique et pour une cellule unitaire, celle-ci s'écrit $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} q K q$. Avec l'égalité $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_m$, il est possible de trouver une relation analytique pour les composantes du tenseur d'élasticité macroscopique \mathbb{C}

$$\mathbb{C} = \frac{1}{2\mathcal{A}} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} q K q$$

avec \mathcal{A} l'aire de la cellule unitaire.

2.3 Limite de linéarité

Afin d'assurer le comportement linéaire élastique du matériau architecturé, trois critères de limite de linéarité sont définis. Ces trois critères sont ensuite représentés comme une surface au-delà de laquelle le matériau n'est plus dans sa zone d'élasticité linéaire. Pour construire ces surfaces, chaque cas de chargement, imposé par le tenseur \mathbf{E} , doit être testé. De manière générique, ce tenseur est imposé de la manière suivante [3] :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{12} & E_{22} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) \sin(\phi) \end{bmatrix}, \quad \phi \in [-\pi, \pi], \theta \in [0, \pi], \lambda \in \mathbb{R}$$

où le couple (θ, ϕ) représente la direction du chargement et λ représente l'intensité du chargement.

Le premier est un critère à l'échelle microscopique qui permet d'assurer que le matériau constitutif des poutres ne dépasse pas sa limite élastique. Ce matériau constitutif est considéré comme étant homogène, isotrope et ayant la même limite d'élasticité en traction et en compression. L'effort dimensionnant dans le cas des treillis à cellules triangulaires est l'effort normal N [4]. Ce critère s'écrit pour chaque poutre n :

$$\frac{|N_n|}{S_n} < \sigma_e$$

où S_n est la section droite de la poutre n et σ_e est la limite élastique du matériau constitutif.

Le second est un critère d'instabilités à l'échelle mésoscopique. Il sert à détecter les modes de flambement qui se propagent sur une ou plusieurs cellules. En effet, les instabilités à l'échelle mésoscopiques créent des motifs périodiques dans la méso-structure dont la période peut être différente de celle de départ. Le critère permettant de détecter ces instabilités est obtenu par l'utilisation des ondes de Bloch et du théorème de Floquet-Bloch [5, 6] et s'écrit :

$$\lambda_{meso} = \min_{\lambda > 0} \{ \lambda | \det[Z_\eta(\eta_1, \eta_2)^H K(\lambda) Z_\eta(\eta_1, \eta_2)] = 0, 0 < \eta_1 < 1, 0 < \eta_2 < 1 \}$$

avec $K(\lambda)$ la matrice de raideur de la cellule unitaire et $Z_\eta(\eta_1, \eta_2)$ la matrice prenant en compte la condition de périodicité de Bloch où η_1 et η_2 sont les nombres d'ondes de la période déformée suivant les vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 . Pour chaque cas de chargement (θ, ϕ) , un facteur de charge critique λ_{meso} est calculé en fonction des nombres d'ondes η_1 et η_2 permettant de trouver les modes propres potentiels.

Le dernier critère est obtenu en utilisant la convexité de rang un [7, 8], permettant de détecter les instabilités à l'échelle macroscopique du matériau, en considérant un nombre infini de cellule. Il est appliqué directement sur le tenseur homogénéisé du matériau continu \mathbb{H} et s'écrit :

$$\lambda_{macro} = \min_{\lambda > 0} \{ \lambda | \det(\mathbf{k} \cdot \mathbb{H} \cdot \mathbf{k}) = 0 \}$$

avec \mathbf{k} un vecteur non nul unitaire du plan représentant la normale au plan de localisation.

3 Résultats

Grâce à l'homogénéisation périodique, il est possible d'écrire analytiquement les différentes composantes du tenseur d'élasticité \mathbb{C} en fonction des différents paramètres géométriques de la méso-structure (β, γ, L) , des raideurs des poutres (S_n, I_n) et du matériau constitutif des poutres (E_n) [9].

$$\mathbb{C}_{ijkl} = f(\beta, \gamma, L, S_n, I_n, E_n)$$

Une fois établis, les différents critères peuvent être affichés sous forme de surfaces. Pour la géométrie et le matériau donné Table 1, on obtient les surfaces de la Figure 3. Ces surfaces nous renseignent sur l'ensemble des sollicitations admissibles par le matériau assurant sa réponse dans le domaine élastique linéaire et renseigne sur le type de non linéarité rencontré. Si cette non linéarité correspond au critère mésoscopique, alors il est possible de prédire le potentiel mode propre [10].

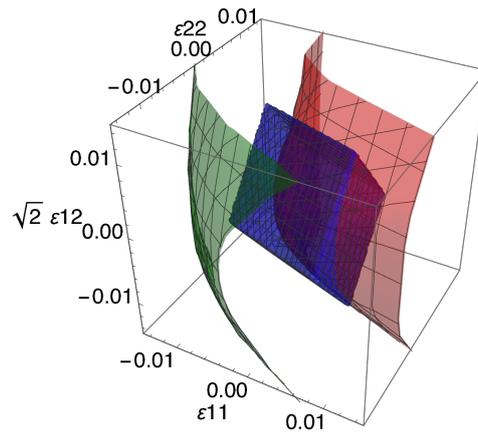


FIGURE 3 – Surfaces limite de linéarité obtenues pour des cellules triangulaires régulières (— critère microscopique — instabilités mésoscopiques — instabilités macroscopiques).

β (rad)	γ (rad)	L (mm)	b_n (mm)	h (mm)	S_n (mm ²)	I_n (mm ⁴)	E (MPa)	σ_e (MPa)
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	10	$b_1 = 1$ $b_2 = 1$ $b_3 = 1$	1	$b_n h$	$\frac{b_n^3 h}{12}$	72000	500

TABLE 1 – Jeu de données pour les surfaces affichées Fig. 3

Grâce à cette étude, les deux verrous énoncés en introduction sont donc levés. La composantes analytiques de \mathbb{C} permettent de faire facilement un choix optimal pour le treillis constitutif et les différents critères assurent une réponse linéaire élastique du matériau.

Références

- [1] R.S. Elliott, J.A. Shaw, N. Triantafyllidis. Stability of crystalline solids-II : Application to temperature-induced martensitic phase transformations in a bi-atomic crystal *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 54.1, 2006.
- [2] M. Bornert, T. Bretheau, P. Gilormini, Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques *Hermes science*, 2001.
- [3] N. Triantafyllidis, M.W. Schraad. Onset of failure in aluminum honeycombs under general in-plane loading *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46.6 (1998) 1089-1124.
- [4] V.S. Deshpande, M.F. Ashby, N.A. Fleck. Foam topology : bending versus stretching dominated architectures *Acta materiala*, 49.6 (2001) 1035-1040.
- [5] K. Bertoldi, M.C. Boyce, S. Deschanel, S.M. Prange, T. Mullin. Mechanics of deformation-triggered pattern transformations and superelastic behavior in periodic elastomeric structures, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 56.8, 2008.
- [6] G. Bordiga, L. Cabras, A. Piccolroaz, D. Bigoni. Dynamics of prestressed elastic lattices : Homogenization, instabilities, and strain localization *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 146, 2021.

-
- [7] C. Combescure, P. Henry, R.S. Elliott. Post-bifurcation and stability of a finitely strained hexagonal honeycomb subjected to equi-biaxial in-plane loading *International Journal of Solids and Structures*, 88-89 (2016) 296-318.
- [8] C. Truesdell, W. Noll. The non-linear field theories of mechanics *Ed. Stuart S. Antman. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2004.*
- [9] M.L.M. Francois, L. Chen, M. Coret. Elasticity and symmetry of triangular lattice materials *International Journal of Solids and Structures*, 129 (2017) 18-27.
- [10] S.H. Kang, S. Shan, A. Kosmrlj, W.L. Noorduyn, S. Shian, J.C. Weaver, D.R. Clarke, K. Bertoldi. Complex ordered patterns in mechanical instability induced geometrically frustrated triangular cellular structures *Physical Review Letters* 112.9, 2014.