



**HAL**  
open science

## Domain of validation for various beam models

Marwan Hariz, Loïc Le Marrec, Jean Lerbet

► **To cite this version:**

Marwan Hariz, Loïc Le Marrec, Jean Lerbet. Domain of validation for various beam models. 25e Congrès Français de Mécanique, Nantes, 29 août-2 septembre 2022, Aug 2022, Nantes, France. hal-04280162

**HAL Id: hal-04280162**

**<https://hal.science/hal-04280162>**

Submitted on 13 Nov 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Domain of validation for various beam models

M. HARIZ<sup>a</sup>, L. LE MARREC<sup>b</sup>, J. LERBET<sup>c</sup>

a. Univ Panthéon Assas, (Paris II), marwan.hariz94@gmail.com

b. Univ Rennes, CNRS, IRMAR - UMR 6625, F-35000 Rennes, France,  
loic.lemarrec@univ-rennes1.fr

c. Univ Evry, LaMME - UMR 8071, F-91037 Evry-Courcouronnes, France, jlerbet@gmail.com

## Résumé :

*L'étude d'une poutre statique soumise à de grandes transformations est abordée de manière analytique à travers trois modèles : le modèle de Timoshenko, le modèle d'Euler-Bernoulli et le modèle de Kirchhoff. Nous montrons comment les deux derniers modèles peuvent être considérés comme des solutions asymptotiques du premier, de manière uniforme.*

## Abstract :

*The static study of a beam under large transformation is approached in an analytical way through three models : the Timoshenko, the Euler-Bernoulli and the Kirchhoff models. We show how the last two models may be seen as asymptotic solutions of the first one, in a uniform way.*

**Mots clefs :** Modèles de poutres, grandes transformations, non-linéarité, solutions analytiques, asymptotique.

## 1 Cinématique et dynamique

La modélisation de la poutre est basée sur la théorie de Cosserat [1]. La poutre est constituée d'une courbe, appelée fibre moyenne  $\mathcal{C}$ , qui définit l'ensemble des centres de masse  $G$  de la section  $\mathcal{S}$ . À chacun des points de la fibre est liée une base vectorielle orthonormale  $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ , nommée base de directeurs de la poutre. Par convention,  $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$  sont liées à la section de la poutre et  $\mathbf{d}_3 = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2$  est normale à la section. La configuration de référence est un segment de longueur  $L$ , la poutre est droite et orientée vers le vecteur cartésien  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$  si bien que le placement de  $G$  est définie par dans la configuration de référence par  $\underline{\varphi}_0(S) = S\mathbf{e}_3$ .

### 1.1 Courbure et déformation

On considère une déformation dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ . Après déformation, le placement est

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}: [0, L] &\longrightarrow \mathcal{E}, & \text{où } \mathcal{E} \text{ est l'espace Euclidien} \\ S &\longrightarrow \underline{\varphi}(S). \end{aligned}$$

Après transformation, les directeurs sont reliés à la base cartésienne par une rotation  $\mathbf{R}(S)$  :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

où  $\theta(S) = \widehat{\mathbf{e}_z, \mathbf{d}_3} = \widehat{\mathbf{e}_x, \mathbf{d}_1}$  mesure la rotation de la section autour de  $\mathbf{d}_2$  ( $= \mathbf{e}_2$ ). La dérivée spatiale des directeurs donne [2] :

$$\frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial S} = \underline{\boldsymbol{\kappa}} \times \mathbf{d}_i, \quad (2)$$

où  $\underline{\boldsymbol{\kappa}} = \kappa_2 \mathbf{d}_2$  est la courbure avec  $\kappa_2(S) = \frac{d\theta}{dS}$ . La déformation de la fibre est mesuré par  $\frac{d\varphi}{dS}$ .

## 1.2 Forces et moments

Les forces et moments internes sont données respectivement par :

$$\underline{\mathbf{N}}(S) = \underline{N}_1(S) \mathbf{d}_1(S) + \underline{N}_3(S) \mathbf{d}_3(S), \quad \underline{\mathbf{M}}(S) = \underline{M}_2(S) \mathbf{d}_2(S). \quad (3)$$

## 2 Équilibre

Les équations statiques d'équilibre sont données par

$$\frac{d\underline{\mathbf{N}}}{dS} = 0, \quad \frac{d\underline{\mathbf{M}}}{dS} + \frac{d\varphi}{dS} \times \underline{\mathbf{N}} = 0. \quad (4)$$

Il faut bien noter que  $\frac{d\varphi}{dS}$  diffère d'un modèle à un autre. Le modèle de Timoshenko prend en considération l'effet de cisaillement suivant  $\mathbf{d}_1$ . Ce n'est pas le cas pour le modèle d'Euler-Bernoulli où le cisaillement est négligé, ni pour la tige de Kirchhoff qui est une poutre d'Euler-Bernoulli inextensible suivant  $\mathbf{d}_3$ . On a ainsi

$$\frac{d\varphi(S)}{dS} = \begin{cases} \varepsilon_1(S) \mathbf{d}_1(S) + \varepsilon_3(S) \mathbf{d}_3(S) & \text{Timoshenko} \\ \varepsilon_3(S) \mathbf{d}_3(S) & \text{Euler-Bernoulli} \\ \mathbf{d}_3(S) & \text{Kirchhoff} \end{cases} \quad (5)$$

Par projection le long des directeurs  $\mathbf{d}_i$ , on écrit l'équilibre pour les trois modèles :

Timoshenko	Euler-Bernoulli	Kirchhoff
$\frac{dN_1}{dS} + N_3 \kappa_2 = 0,$	$\frac{dN_1}{dS} + N_3 \kappa_2 = 0,$	$\frac{dN_1}{dS} + N_3 \kappa_2 = 0,$
$\frac{dN_3}{dS} - N_1 \kappa_2 = 0,$	$\frac{dN_3}{dS} - N_1 \kappa_2 = 0,$	$\frac{dN_3}{dS} - N_1 \kappa_2 = 0,$
$\frac{dM_2}{dS} + N_1 \varepsilon_3 - N_3 \varepsilon_1 = 0.$	$\frac{dM_2}{dS} + N_1 \varepsilon_3 = 0.$	$\frac{dM_2}{dS} + N_1 = 0.$

Les lois de comportement sont données d'une manière linéaire par :

Timoshenko	Euler-Bernoulli	Kirchhoff
$\underline{N}_1(S) = GA\varepsilon_1(S),$		
$\underline{N}_3(S) = EA(\varepsilon_3(S) - 1),$	$\underline{N}_3(S) = EA(\varepsilon_3(S) - 1),$	
$\underline{M}_2(S) = EI\kappa_2(S).$	$\underline{M}_2(S) = EI\kappa_2(S).$	$\underline{M}_2(S) = EI\kappa_2(S).$

où  $E$  est le module de Young,  $G$  est le module de cisaillement et  $I$  est le moment quadratique de la section.

### 3 Adimensionnement

Nous adaptons une formulation non-dimensionnelle unifiée grâce au rayon de gyration  $\varrho = \sqrt{I/A}$ , donc l'abscisse curviligne est donnée d'une manière non-dimensionnelle par  $s = S/\varrho$ . Pour toute variable physique  $\underline{v}(S)$  mentionnée précédemment, nous pouvons associer une variable non-dimensionnelle  $v(s)$  de la manière suivante :

$$\varepsilon_i(s) = \underline{\varepsilon}_i(S), \quad \theta(s) = \underline{\theta}_i(S), \quad \varphi_i(s) = \frac{1}{\varrho}\underline{\varphi}_i(S), \quad \kappa_2(s) = \underline{\kappa}_2(S). \quad (6)$$

Force  $\underline{N}_i(S)$  et moment  $\underline{M}_2(S)$  ont également une forme non-dimensionnelle définie par :

$$N_i(s) = \frac{1}{EA}\underline{N}_i(S), \quad M_2(s) = \frac{1}{\varrho EA}\underline{M}_2(S). \quad (7)$$

Compte tenu du fait que  $\frac{d}{ds} = \frac{1}{\varrho}\frac{d}{dS}$ , nous réécrivons l'équilibre sous une forme non-dimensionnelle pour les trois modèles :

Timoshenko	Euler-Bernoulli	Kirchhoff
$\frac{1}{g}\varepsilon_1' + (\varepsilon_3 - 1)\kappa_2 = 0,$	$N_1' + (\varepsilon_3 - 1)\kappa_2 = 0,$	$N_1' + N_3\kappa_2 = 0,$
$\varepsilon_3' - \frac{1}{g}\varepsilon_1\kappa_2 = 0,$	$\varepsilon_3' - N_1\kappa_2 = 0,$	$N_3' - N_1\kappa_2 = 0,$
$\kappa_2' + \varepsilon_1 + \left(\frac{1}{g} - 1\right)\varepsilon_1\varepsilon_3 = 0.$	$\kappa_2' + N_1\varepsilon_3 = 0.$	$\kappa_2' + N_1 = 0.$

où  $g = E/G$ .

### 4 Reformulation du problème

L'équilibre non-dimensionnel est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}' &= 0 \\ \mathbf{M}' + \boldsymbol{\varphi}' \times \mathbf{N} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

D'après la première équation de (8), le vecteur  $\mathbf{N}(S) = \mathbf{N}(\ell)$  est constant le long de la fibre avec une amplitude donnée par  $N_\ell = |\mathbf{N}_\ell|$ . En revanche, l'orientation des directeurs n'est pas uniforme. Cela motive l'introduction d'un angle  $\phi(s)$  qui donne l'orientation de  $\mathbf{N}_\ell$  par rapport à  $\mathbf{d}_3$ . Ces idées sont développées explicitement dans [3] et illustrées dans la figure 1. En particulier,  $\phi(s)$  est relié à l'orientation (fixe) de  $\mathbf{N}_\ell$  par rapport à  $\mathbf{e}_3$  par

$$\hat{\phi} = \theta(s) + \phi(s) \quad (9)$$

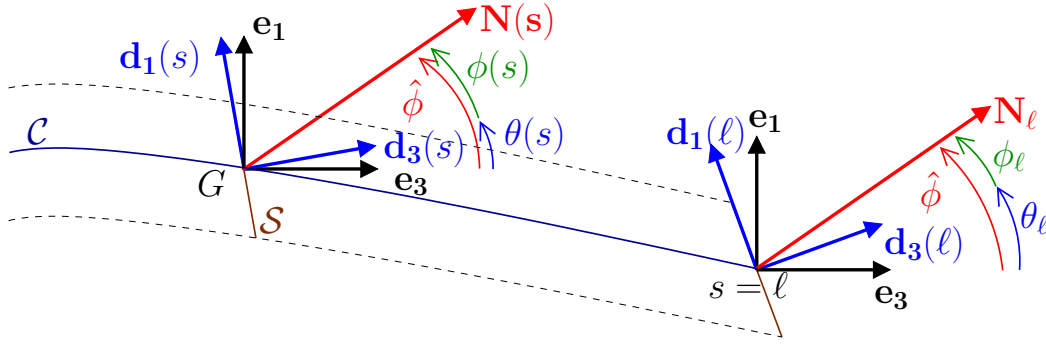


FIGURE 1 – Paramétrisation d'une configuration actuelle d'une poutre. À une abscisse curviligne donnée  $s$ , le centre de masse  $G$  et la section  $\mathcal{S}$  sont donnés. Les directeurs  $\mathbf{d}_1(s)$  et  $\mathbf{d}_3(s)$  de cette section sont obtenus par une rotation  $\theta(s)$  autour de  $\mathbf{e}_2$ . À  $s = \ell$  la force extérieure  $\mathbf{N}_\ell$  fait un angle  $\phi(\ell) = \phi_\ell$  avec la normale  $\mathbf{d}_3(\ell)$  de la dernière section et  $\hat{\phi}$  avec  $\mathbf{e}_3$ .

Munies de ces conventions, les relations entre les forces, le moment et  $\phi$  sont données, quelque soit le modèle considéré, par

$$N_1(s) = N_\ell \sin(\phi(s)), \quad N_3(s) = N_\ell \cos(\phi(s)), \quad M_2(s) = -\phi'(s). \quad (10)$$

Cette indépendance vis-à-vis du modèle est un élément clé de l'étude.

## 4.1 Équilibre scalaire

Les lois de comportement, quand elles existent (ce qui n'est pas systématiquement le cas pour tous les modèles conformément à (10)), permettent d'exprimer les déformations  $\varepsilon_i$  et courbures  $\kappa_2$  en fonction des efforts mentionnés en (10). On déduit :

$$\varepsilon_1(s) = gN_\ell \sin(\phi(s)), \quad \varepsilon_3(s) = 1 + N_\ell \cos(\phi(s)), \quad \kappa_2(s) = -\phi'(s). \quad (11)$$

En injectant ces relations dans l'équilibre non-dimensionnel, on remarque que les deux premières équations d'équilibre sont directement satisfaites pour tous les modèles. La dernière devient une équation différentielle ordinaire en  $\phi$ , distincte pour chaque modèle :

$$\begin{aligned} \phi'' &= N_\ell \sin(\phi) \left( 1 + (1-g)N_\ell \cos(\phi) \right), & \text{Timoshenko} \\ \phi'' &= N_\ell \sin(\phi) \left( 1 + N_\ell \cos(\phi) \right), & \text{Euler-Bernoulli} \\ \phi'' &= N_\ell \sin(\phi). & \text{Kirchhoff} \end{aligned} \quad (12)$$

**Remarque 1** On constate directement une relation fondamentale entre les modèles, en effet :

- Le modèle d'Euler-Bernoulli est obtenu en imposant  $g = 0$  dans celui de Timoshenko.
- Le modèle de Kirchhoff est obtenu en imposant  $g = 1$  dans celui de Timoshenko.

## 4.2 Solutions analytiques

Les solutions triviales de l'elastica et tension/compression sont obtenues si  $\phi'' = 0$  [3] et dorénavant, on considère  $\phi'' \neq 0$ . Les équations différentielles (12) précédentes, peuvent être intégrées

une fois pour obtenir une équation différentielle du premier ordre :

$$\begin{aligned} \phi'^2 + 2N_\ell \cos(\phi) + (1-g)N_\ell^2 \cos^2(\phi) &= \mu, & \text{Timoshenko} \\ \phi'^2 + 2N_\ell \cos(\phi) + N_\ell^2 \cos^2(\phi) &= \mu, & \text{Euler-Bernoulli} \\ \phi'^2 + 2N_\ell \cos(\phi) &= \mu. & \text{Kirchhoff} \end{aligned} \quad (13)$$

où la constante d'intégration est définie à partir des efforts soumis à une extrémité de la poutre :

$$\begin{aligned} \mu &= M_2(\ell)^2 + 2N_3(\ell) + (1-g)N_3(\ell)^2 & \text{Timoshenko} \\ \mu &= M_2(\ell)^2 + 2N_3(\ell) + N_3(\ell)^2 & \text{Euler-Bernoulli} \\ \mu &= M_2(\ell)^2 + 2N_3(\ell) & \text{Kirchhoff} \end{aligned} \quad (14)$$

La constante d'intégration (17) tout comme ces équations différentielles (13), respectent la remarque 1 donnée en fin de section 4.1.

**Remarque 2 :** Pour des efforts fixés à une extrémité, soit  $N_\ell := \|\mathbf{N}_\ell\|$ ,  $\phi_\ell := \phi(\ell)$  et  $M_\ell := M_2(\ell)$  fixés, le problème d'équilibre donné en fonction de  $\phi(s)$  est un problème de Cauchy, dont l'existence et l'unicité des solutions sont assurées.

Pour résoudre l'équilibre, quel que soit le modèle, on exploite le changement de variable  $t(s) = \tan(\phi(s)/2)$ , qui induit par conséquent :

$$\cos(\phi) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(\phi) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \phi' = \frac{2t'}{1+t^2}. \quad (15)$$

Les précédentes équations différentielles scalaires s'écrivent comme  $t'^2 = at^4 + bt^2 + c$  et pour  $a \neq 0$  :

$$t'^2 = a(t^2 - \alpha_-)(t^2 + \alpha_+) \quad (16)$$

avec, quelque soit le modèle :

$$a = \frac{\mu - \mu_a}{4}, \quad b = \frac{2\mu + \mu_a + \mu_c}{4}, \quad c = \frac{\mu - \mu_c}{4}, \quad \alpha_\pm = \frac{\pm b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

cette formulation générale ne se distingue en fonction des modèles qu'à travers les deux constantes introduites :

$$\begin{aligned} \mu_a &= -2N_\ell + (1-g)N_\ell^2 & \mu_c &= 2N_\ell + (1-g)N_\ell^2 & \text{Timoshenko} \\ \mu_a &= -2N_\ell + N_\ell^2 & \mu_c &= 2N_\ell + N_\ell^2 & \text{Euler-Bernoulli} \\ \mu_a &= -2N_\ell & \mu_c &= 2N_\ell & \text{Kirchhoff} \end{aligned} \quad (17)$$

ce qui est conforme à la remarque 1.

Par une manipulation mathématique [3], on trouve la solution de l'équation différentielle donnée sous forme d'une fonction elliptique de Jacobi [4], notamment :

$$t(s) = \pm \sqrt{\alpha_+} \operatorname{cs}(\zeta | m) \quad \text{où} \quad \zeta = \sqrt{a\alpha_+}(s + s_0) \quad \text{et} \quad m = \frac{\alpha_+ + \alpha_-}{\alpha_+}. \quad (18)$$

En utilisant les equations (15) et (18), on trouve les variables dynamiques :

$$\begin{aligned} N_1(s) &= N_\ell \frac{2\sqrt{\alpha_+} \operatorname{cs}(\zeta | m)}{1 + \alpha_+ \operatorname{cs}^2(\zeta | m)}, \\ N_3(s) &= N_\ell \frac{1 - \alpha_+ \operatorname{cs}^2(\zeta | m)}{1 + \alpha_+ \operatorname{cs}^2(\zeta | m)}, \\ M_2(s) &= \sqrt{ag} \frac{2\alpha_+ \operatorname{ns}(\zeta | m) \operatorname{ds}(\zeta | m)}{1 + \alpha_+ \operatorname{cs}^2(\zeta | m)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Puis, par l'équation (11), on trouve les déformations et la courbure :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(s) &= gN_\ell \frac{2\sqrt{\alpha_+} \operatorname{cs}(\zeta | m)}{1 + \alpha_+ \operatorname{cs}^2(\zeta | m)}, & \varepsilon_3(s) &= 1 + N_\ell \frac{1 - \alpha_+ \operatorname{cs}^2(\zeta | m)}{1 + \alpha_+ \operatorname{cs}^2(\zeta | m)}, \\ \kappa_2(s) &= \sqrt{ag} \frac{2\alpha_+ \operatorname{ns}(\zeta | m) \operatorname{ds}(\zeta | m)}{1 + \alpha_+ \operatorname{cs}^2(\zeta | m)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Ces formulations sont identiques pour tous les modèles et on peut dégénérer le modèle de Timochenko pour obtenir les deux autres en imposant a posteriori  $g = 1$  ou  $g = 0$ , conformément à la remarque 1.

### 4.3 Placement et rotation

La rotation de la section  $\theta(s)$  est directement obtenue par (9) :

$$\theta(s) = \hat{\phi} - 2 \arctan(t(s)). \quad (21)$$

Pour déterminer le placement, une nouvelle base orthonormale fixe  $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_n)$  est défini avec  $\mathbf{e}_n = \mathbf{N}_\ell / \|\mathbf{N}_\ell\|$  et  $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_n$ . Le placement est alors recherché en déterminant ses composantes dans cette base :  $\varphi(s) = \varphi_n(s)\mathbf{e}_n + \varphi_t(s)\mathbf{e}_t$ .

La deuxième équation d'équilibre (8) impose après intégration  $\mathbf{M}(s) - \mathbf{M}(0) + (\varphi(s) - \varphi(0)) \times \mathbf{N}_\ell = 0$  donc par projection

$$\varphi_t(s) = \varphi_t(0) + \frac{M_2(s) - M_2(0)}{N_\ell} \quad (22)$$

La relation (22) est vérifiée pour les trois modèles.

Ce n'est pas le cas pour  $\varphi_n(s)$ . En effet, nous rappelons que  $\varphi'_n \mathbf{e}_n + \varphi'_t \mathbf{e}_t = \boldsymbol{\varepsilon}$ , où (5) détermine l'expression de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en fonction des modèles. Donc par projection de cette identité le long de  $\mathbf{e}_n$  et sachant que  $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{d}_3(s) = \cos(\phi(s))$  et  $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{d}_1(s) = \sin(\phi(s))$ , on obtient pour les trois modèles :

	Timoshenko	Euler-Bernoulli	Kirchhoff
$\varphi'_n =$	$\varepsilon_1(s) \sin(\phi(s)) + \varepsilon_3(s) \cos(\phi(s))$	$\varepsilon_3(s) \cos(\phi(s))$	$\cos(\phi(s))$
$\varphi'_n =$	$gN_1(s) \sin(\phi(s)) + (N_3 + 1) \cos(\phi(s))$	$(N_3 + 1) \cos(\phi(s))$	$\frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\varphi'_n =$	$gN_\ell \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + N_\ell \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$N_\ell \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}$	

Par une simple intégration on trouve  $\varphi$ . Les solutions sont obtenues d'une manière explicite et on peut alors illustrer le placement avec la section transversale pour les trois modèles. Les trois différentes modèles sont présentés dans la figure (2) pour trois valeurs différentes de  $N_\ell$  avec

$$\varphi(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad M_\ell = 0.2, \quad \phi_\ell = \frac{2\pi}{3}, \quad \ell = 20, \quad g = 2.5. \quad (23)$$

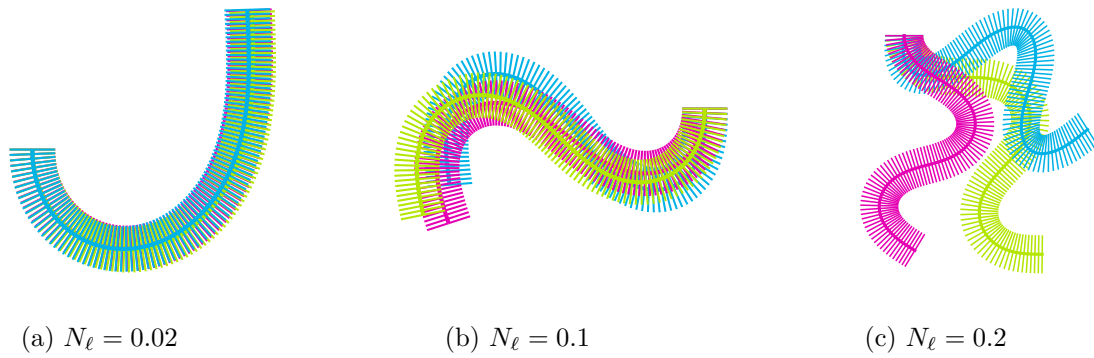


FIGURE 2 – Formes déformées non-dimensionnelle d’une poutre de Timoshenko (bleu), d’une poutre d’Euler (violet) et d’une tige de Kirchhoff (vert) collées à  $s = 0$  où la force exercée forme un angle  $\phi_\ell = 2\pi/3$  avec la normale de la dernière section ( $s = \ell$ ). L’intensité de la force est donnée et un moment de flexion  $M_\ell = 0.2$  est imposé à cette dernière également.

On remarque que pour  $N_\ell$  petit, les 3 modèles sont presque identiques, cette ressemblance disparaît quand  $N_\ell$  augmente.

## 5 Conclusion

Dans cet article, on a proposé une étude analytique d’une transformation large mais plane d’une structure unidimensionnelle soumise à des forces et moment externes et avec une loi de comportement linéaire. La formulation de Cosserat a été utilisée en modélisant la poutre comme une ligne curviligne avec une base de directeur mobile.

L’objectif était de comparer trois modèles de structures, à savoir le modèle de poutre de Timoshenko, de poutre d’Euler-Bernoulli et de tige de Kirchhoff. Les relations d’équilibres ont été trouvées pour les trois modèles d’une manière adimensionnelle.

La formulation suivie dans le présent article conduit à un problème de Cauchy, contrôlé par les trois variables  $(N_\ell, M_\ell, \phi_\ell)$ . D’où l’existence et l’unicité des solutions, de plus ces solutions sont obtenues explicitement sous forme des fonctions de Jacobi.

En outre, on a démontré que le modèle de Timoshenko converge asymptotiquement vers les modèles d’Euler et de Kirchhoff. Cette convergence est explicite et dépend uniquement du paramètre  $g = E/G$  pour ce qui est de l’expression des courbures, forces et moments. En revanche, la convergence des variables cinématiques (plus précisément du placement normal à la force imposée) est contrôlé par l’intensité de la force.

Il serait pertinent d’étendre cette étude au cas dynamique.

## Références

- [1] E. Cosserat, F. Cosserat, *Theorie des corps déformables*, A. Hermann et fils, 1909.
- [2] L. Le Marrec, J. Lerbet, L. R. Rakotomanana, Vibration of a timoshenko beam supporting arbitrary large pre-deformation, *Acta Mechanica* 229 (1) (2018) 109–132.
- [3] M. Hariz, L. Le Marrec, J. Lerbet, Explicit analysis of large transformation of a timoshenko beam : post-buckling solution, bifurcation, and catastrophes, *Acta Mechanica* (2021) 1–25.
- [4] F. W. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark, *NIST handbook of mathematical functions* hardback and CD-ROM, Cambridge university press, 2010.