



**HAL**  
open science

# Sur un estimateur de type Eshelby pour l'évaluation des propriétés thermiques et thermoélastiques d'inclusions ellipsoïdales multi-enrobées

Haboussi Mohamed, Barboura Salma, Mohamed Haboussi

► **To cite this version:**

Haboussi Mohamed, Barboura Salma, Mohamed Haboussi. Sur un estimateur de type Eshelby pour l'évaluation des propriétés thermiques et thermoélastiques d'inclusions ellipsoïdales multi-enrobées. 25e Congrès Français de Mécanique, Nantes, 29 août-2 septembre 2022, Aug 2022, Nantes, France. hal-04280153

**HAL Id: hal-04280153**

**<https://hal.science/hal-04280153v1>**

Submitted on 13 Nov 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur un estimateur de type Eshelby pour l'évaluation des propriétés thermiques et thermoélastiques d'inclusions ellipsoïdales multi-enrobées

Houssem Bousoura<sup>a</sup>, Salma Barboura<sup>b</sup>, Mohamed Haboussi<sup>c</sup>

a. LSPM-CNRS, UPR3407, Université Sorbonne Paris Nord, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430, Villetaneuse, France + [houssem.bousoura@univ-paris13.fr](mailto:houssem.bousoura@univ-paris13.fr)

b. LSPM-CNRS, UPR3407, Université Sorbonne Paris Nord, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430, Villetaneuse, France + [salma.barboura@univ-paris13.fr](mailto:salma.barboura@univ-paris13.fr)

c. LSPM-CNRS, UPR3407, Université Sorbonne Paris Nord, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430, Villetaneuse, France + [haboussi@univ-paris13.fr](mailto:haboussi@univ-paris13.fr)

## Résumé :

*Un estimateur micromécanique à champs moyens, dit GEEE (General Explicit Eshelby-type Estimator), est proposé pour évaluer les conductivités thermiques et les constantes thermoélastiques d'inclusions ellipsoïdales à revêtement multiple (cœur + revêtements). Établi sur la base du schéma d'homogénéisation d'Eshelby, exact lorsque le milieu comprend une inclusion ellipsoïdale unique, GEEE est applicable à l'homogénéisation d'inclusions hétérogènes, sans aucune restriction sur les fractions volumiques des phases constitutives qui peuvent varier de 0 à 1. En guise de validation, les résultats d'homogénéisation d'un milieu périodique composé d'une matrice avec des inclusions simplement enrobées, disposées selon un arrangement carré, obtenus en utilisant l'estimateur GEEE avec Mori Tanaka ou dans un calcul par éléments finis, dans une procédure d'homogénéisation à 2 niveaux, sont comparés à un calcul par éléments finis à un seul niveau ou toutes les phases sont discrétisées.*

## Abstract:

*A micromechanical mean-field estimator, called GEEE (General Explicit Eshelby-type Estimator), is proposed to evaluate the thermal conductivities and thermoelastic constants of multiply coated ellipsoidal inclusions (core + coatings). Based on the Eshelby homogenization scheme, which is accurate when the medium comprises a single ellipsoidal inclusion, GEEE is applicable to the homogenization of heterogeneous inclusions, without any restriction on the volume fractions of the constituent phases, which can vary from 0 to 1. For the validation purpose, homogenization results of a periodic medium composed of a matrix with simply coated inclusions arranged in a square array, obtained using the GEEE estimator with Mori Tanaka or in a finite element calculation, in a 2-level homogenization procedure, are compared to 1-level full finite element calculations where all phases are discretized.*

**Mots clés :** Inclusion multicouche, estimateur à champ moyen, Eshelby, conductivités thermiques effectives, constantes thermoélastiques effectives

## 1 Introduction

Dans un précédent travail, le schéma d'Eshelby a été utilisé pour développer un nouvel estimateur explicite et général (GEEE) pour évaluer le tenseur de rigidité effective d'inclusions multi-enrobées, [1]. Ici, cet estimateur est étendu aux cas de la thermique et de la thermoélasticité.

Comme pour l'élasticité, il est fait usage à chaque fois de la solution fondamentale d'Eshelby pour établir l'expression de l'estimateur. Cette solution fondamentale et le schéma d'homogénéisation qui en découle, exact dans le cas d'un milieu infini contenant une inclusion ellipsoïdale unique, est donnée par Hatta et Taya (1986), [2], pour la thermique et par Levin (1967), [3], pour la thermoélasticité.

Une fois les estimateurs formulés, une validation numérique de ceux-ci est proposée. Elle consiste à comparer les résultats d'homogénéisation d'un milieu périodique composé d'une matrice avec des inclusions simplement enrobées, disposées selon un arrangement carré, obtenus avec des approches à deux niveaux, utilisant GEEE pour le premier, et avec une approche à un seul niveau, basée sur la méthode des éléments finis où l'ensemble des phases est discrétisé. GEEE est utilisé successivement avec le schéma de Mori-Tanaka ou dans un calcul par éléments finis pour déterminer les propriétés effectives de l'inclusion équivalente.

## 2 GEEE thermique et thermoélastique

### 2.1 GEEE thermique

L'expression de l'estimateur GEEE est d'abord établi pour le cas à deux phases (cœur + enrobage). Le schéma d'Eshelby proposé par Hatta et Taya (1986), est utilisé pour déterminer les conductivités thermiques effectives d'un milieu contenant une inclusion unique, vu de deux manières différentes. Dans la première, configuration (I), Fig. 1a, le schéma d'Eshelby donne le tenseur des conductivités thermiques effectives suivant :

$$\mathbf{K}_I^{eff} = \mathbf{K}^2 + f_1 \left[ (\mathbf{K}^1 - \mathbf{K}^2) \mathbf{A}_{dil}^1 \right] ; \mathbf{A}_{dil}^1 = \left( \mathbf{I} + \mathbf{S}^1 (\mathbf{K}^2)^{-1} (\mathbf{K}^1 - \mathbf{K}^2) \right)^{-1} \quad (1)$$

où  $f_1$  désigne la fraction volumique de l'inclusion,  $\mathbf{S}^1$ , le tenseur d'Eshelby d'ordre 2,  $\mathbf{K}^1$ , la conductivité de l'inclusion et  $\mathbf{K}^2$ , la conductivité de la matrice.

Dans la deuxième manière, configuration (II) Fig. 1b, l'inclusion est supposée entourée d'un enrobage ellipsoïdale imaginaire de même matériau que la matrice. Après avoir remplacé cette inclusion enrobée par l'inclusion équivalente, la conductivité thermique effective est réévaluée selon le même schéma d'Eshelby, ce qui donne :

$$\mathbf{K}_{II}^{eff} = \mathbf{K}^2 + f_{eq} \left[ (\mathbf{K}^{eq} - \mathbf{K}^2) \mathbf{A}_{dil}^{eq} \right] ; \mathbf{A}_{dil}^{eq} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{S}^{eq} (\mathbf{K}^2)^{-1} (\mathbf{K}^{eq} - \mathbf{K}^2) \right)^{-1} \quad (2)$$

où  $\mathbf{K}^{eq}$  est la conductivité thermique équivalente de l'inclusion enrobée à déterminer,  $f_{eq}$ , la fraction volumique de l'inclusion équivalente par rapport au volume total,  $\mathbf{S}^{eq}$ , le tenseur d'Eshelby d'ordre 2 qui dépend de la forme de l'enrobage.

S'agissant du même milieu, les conductivités effectives doivent être les mêmes. Ce qui permet de trouver :

$$\mathbf{K}^{eq} = \mathbf{K}^2 + \nu_1 \left[ (\mathbf{K}^1 - \mathbf{K}^2)^{-1} + (\mathbf{S}^1 - \nu_1 \mathbf{S}^{eq}) (\mathbf{K}^2)^{-1} \right]^{-1} \quad (3)$$

Où  $\nu_1 = \frac{f_1}{f_{eq}}$  désigne la fraction volumique du cœur par rapport à l'inclusion équivalente.

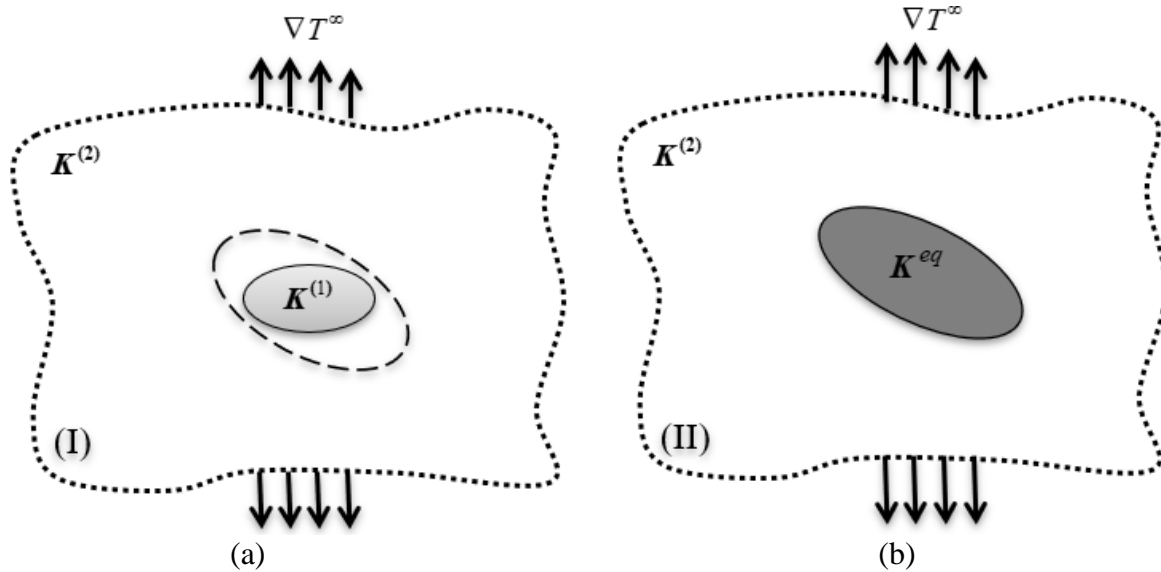


Figure 1. (a) Inclusion ellipsoïdale dans une matrice infinie (b) Inclusion ellipsoïdale et son enrobage imaginaire remplacée par l'inclusion équivalente

L'estimateur est généralisé au cas à n phases par une démarche récursive.

## 2.2 GEEE thermoélastique

En suivant la même démarche que précédemment et le schéma d'Eshelby dû à Levin (1967), l'expression suivante de GEEE est obtenue pour les constantes thermoélastiques effectives d'une inclusion à 2 phases (phase 1 cœur, et phase 2 matrice) :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}^{eq} &= \boldsymbol{\lambda}^2 + \frac{f_1}{f_{eq}} \left( (\mathbf{A}_{dil}^{eq})^T \right)^{-1} (\mathbf{A}_{dil}^1)^T (\boldsymbol{\lambda}^1 - \boldsymbol{\lambda}^2) \\ \mathbf{A}_{dil}^{eq} &= (\mathbb{I} + \mathbf{S}^{eq} (\mathbf{C}^2)^{-1} (\mathbf{C}^{eq} - \mathbf{C}^2))^{-1} \\ \mathbf{A}_{dil}^1 &= (\mathbb{I} + \mathbf{S}^1 (\mathbf{C}^2)^{-1} (\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^2))^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

$\boldsymbol{\lambda}^{eq}$  est le tenseur des constantes thermoélastiques effectives de l'inhomogénéité équivalente,  $f_{eq}$ , sa fraction volumique, et  $\mathbf{S}^{eq}$ , son tenseur d'Eshelby,

Le tenseur de dilatation thermique de l'inclusion équivalente peut être déduit grâce à la relation suivante :

$$\boldsymbol{\alpha}^{eq} = (\mathbf{C}^{eq})^{-1} \boldsymbol{\lambda}^{eq} \quad (5)$$

### 3. Validation numérique

Dans les figures 4 et 5, les conductivités et les dilatations thermiques effectives d'un milieu périodique composé d'une matrice avec des inclusions simplement enrobées, disposées selon un arrangement carré, obtenus de différentes manières sont comparés.

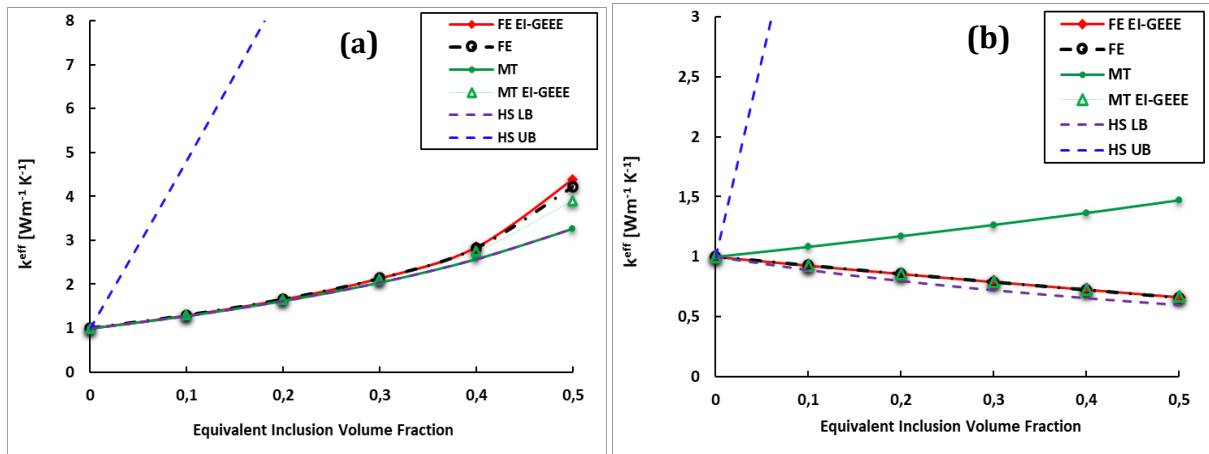


Figure 4. Evolution de la conductivité thermique effective du milieu périodique en fonction de la fraction volumique de l'inclusion équivalente

$$(a) k_{core} = 100 \text{Wm}^{-1} \text{K}^{-1}, k_{coat} = 10 \text{Wm}^{-1} \text{K}^{-1}, k_{mat} = 1 \text{Wm}^{-1} \text{K}^{-1}$$

$$(b) k_{core} = 100 \text{Wm}^{-1} \text{K}^{-1}, k_{coat} = 0.1 \text{Wm}^{-1} \text{K}^{-1}, k_{mat} = 1 \text{Wm}^{-1} \text{K}^{-1}$$

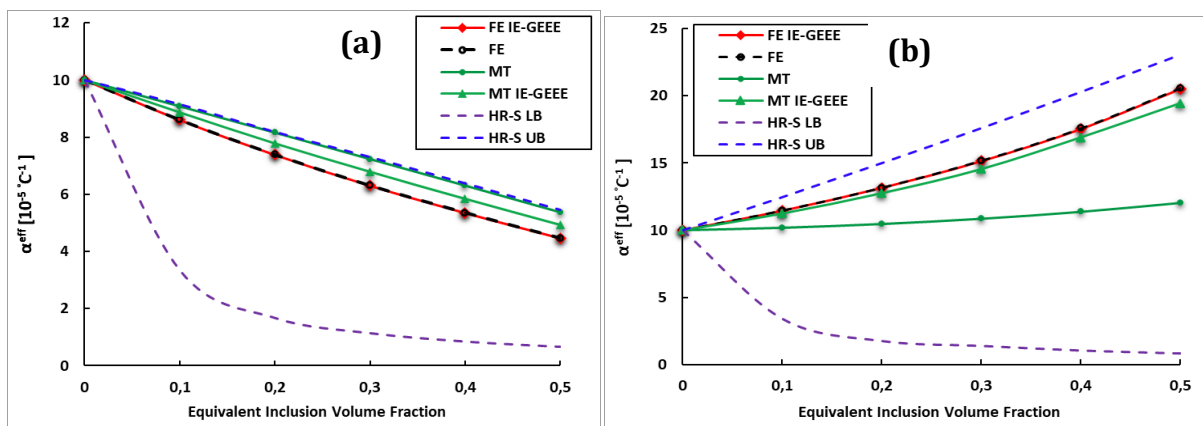


Figure 5. Evolution du coefficient de dilatation thermique effectif du composite en fonction de la fraction volumique de l'inclusion équivalente,  $v_{core} = v_{coat} = v_{mat} = 0.3$

$$(a) E_{core} = 100 \text{GPa}, \alpha_{core} = 10^{-6} \text{C}^{-1}, E_{coat} = 10 \text{GPa}, \alpha_{coat} = 10^{-5} \text{C}^{-1}, E_{mat} = 1 \text{GPa}, \alpha_{coat} = 10^{-4} \text{C}^{-1}$$

$$(b) E_{core} = 100 \text{GPa}, \alpha_{core} = 10^{-6} \text{C}^{-1}, E_{coat} = 0.1 \text{GPa}, \alpha_{coat} = 10^{-3} \text{C}^{-1}, E_{mat} = 1 \text{GPa}, \alpha_{coat} = 10^{-4} \text{C}^{-1}$$

D'abord, les propriétés effectives du milieu à trois phases (cœur/enrobage/matrice) sont obtenues grâce un calcul par éléments finis, à un seul niveau, réalisé dans Abaqus en discrétisant les 3 phases en présence (Courbes FE dans les graphes).

Ensuite, l'ensemble cœur + enrobage est remplacé par une inclusion équivalente dont les propriétés sont déterminées par l'estimateur GEEE. Les propriétés effectives du nouveau système (inclusion équivalente/matrice) sont recalculées par éléments finis (FE EI-GEEE) ou en utilisant le schéma de Mori-Tanaka (MT EI-GEEE) selon une démarche à 2 niveaux. Un calcul utilisant le modèle de Mori-Tanaka à un seul niveau (MT) est également effectué. Dans les différents calculs, la fraction volumique du cœur est égale à celle de l'enrobage.

Il ressort des résultats reportés dans les figures 4 et 5 que GEEE combiné avec les éléments finis (EF IE-GEEE) ou Mori-Tanaka (MT IE-GEEE) donnent des résultats très proches à ceux obtenus par élément finis (EF), même pour des fractions volumiques élevées de l'inclusion équivalente et dans les deux cas étudiés où les propriétés des phases sont très différentes. Ce qui n'est pas le cas pour MT seul. Il est à noter que pour toutes les méthodes de calcul, les bornes de Hashin-Shtrikman sont respectées.

## Références bibliographiques

- [1] A. Ghazavizadeh, M. Haboussi, A. Abdul-Latif, et A. Jafari, A general and explicit Eshelby-type estimator for evaluating the equivalent stiffness of multiply coated ellipsoidal heterogeneities, *International Journal of Solids and Structures*, 2019.
- [2] Hatta, H., et Taya, M. (1986a). Equivalent inclusion method for steady state heat conduction in composites. *International Journal of Engineering Science*, 24(7), 1159- 1172. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(86\)90011-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(86)90011-X)
- [3] Levin, V. M., On the coefficients of thermal expansion of heterogeneous materials, *Mekh. Tverdogo Tela*, 88-94, 1967.