



HAL
open science

A stylus located by monocular vision: application to the measurement of the geometry of a natural quartz

Christian Elmo, Pierre Vacher, Ludovic Charleux, Emile Roux

► To cite this version:

Christian Elmo, Pierre Vacher, Ludovic Charleux, Emile Roux. A stylus located by monocular vision: application to the measurement of the geometry of a natural quartz. 25e Congrès Français de Mécanique, Nantes, 29 août-2 septembre 2022, Aug 2022, Nantes, France. hal-04280107

HAL Id: hal-04280107

<https://hal.science/hal-04280107>

Submitted on 13 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

A stylus located by monocular vision : application to the measurement of the geometry of a natural quartz

C. ELMO KULANESAN^a, P. VACHER^a, L. CHARLEUX^a, E. ROUX^a

a. Université Savoie Mont Blanc Laboratoire SYMME, 74940 Annecy-le-Vieux, France,
christian.elmo-kulanesan@univ-smb.fr, pierre.vacher@univ-smb.fr, ludovic.charleux@univ-smb.fr,
emile.roux@univ-smb.fr

Résumé :

Dans ce travail, nous nous intéressons à la qualification d'un dispositif de numérisation 3D temps réel par palpation, à l'aide d'un stylet manuel dont le déplacement dans l'espace est observé par vision monoculaire.

Ce stylet est composé d'une pointe de sonde constituée, elle-même, d'une sphère en rubis synthétique d'un diamètre de 2 mm et d'une tige d'environ 200 mm de longueur. Le localisateur *LOOB* est positionné au-dessus de la tige. À la surface du localisateur, des marqueurs plans carrés (marqueurs ArUco) sont collés. La principale force de cette méthode réside sur la géométrie du *LOOB* qui peut être arbitraire. En effet, un algorithme de calibration dédié permet de retrouver la position des marqueurs les uns par rapport aux autres quelle que soit leur position. Après ce premier calibrage, toute forme d'objet fixée rigidement au *LOOB* peut être localisée en temps réel par vision monoculaire. L'enregistrement des images et la calibration se font en moins de 10 min.

L'identification de la pointe du stylet est le résultat d'une procédure spécifique. Dans cette phase, la pointe sphérique du stylet est positionnée dans un cône supposé rigide. Des mouvements successifs du stylet sont alors effectués pour permettre la visualisation de tous les marqueurs par la caméra. En théorie, le déplacement du centre de cette sphère doit donc être nul. En utilisant cet ensemble d'images, la position 3D de la pointe du stylet est calculée par optimisation. La position de la pointe du stylet peut ainsi être suivie en temps réel quelles que soient les rotations et translations effectuées.

Dans l'application proposée ici, nous numérisons 12 facettes d'un cristal de quartz naturel d'une hauteur d'environ 23 mm. La caméra utilisée a une résolution de 16.1 mégapixels, elle est positionnée à environ 1 m distance de l'objet et observe un champ d'environ $50 \times 50 \times 50 \text{ cm}^3$. La plus petite facette mesurée sur ce cristal est proche d'un triangle isocèle de base 2 mm et de hauteur 3 mm. Le *LOOB* est composé d'une pierre de forme aléatoire sur laquelle ont été collés 15 marqueurs planaires. Les marqueurs sont répartis aléatoirement sur la pierre. La seule contrainte imposée est qu'au moins 2 marqueurs non coplanaires doivent être détectés dans chaque image.

Dans cette identification, les mouvements du stylet en termes de translation et de rotation sont relativement faibles. Chacune des facettes est numérisée individuellement. Une analyse de planéité est effectuée en minimisant les déviations par rapport à un plan en utilisant une approche par les moindres carrés. Les angles entre chacune des normales à ces plans sont également mesurés. Les résultats obtenus par notre approche sont comparés à une tomographie 3D. Les incertitudes de mesure obtenues dans ce cas montrent qu'il est possible d'utiliser ce stylet et une vision monoculaire pour effectuer une mesure tridimensionnelle avec une incertitude d'environ 0.04 mm^3 .

Abstract :

In this work, we are focused on the qualification of a 3D real-time scanning device by probing, using a manual stylus whose displacement in space is observed by monocular vision.

This stylus is composed of a probe tip made of a synthetic ruby sphere with a diameter of 2 mm, a rod of about 200 mm in length. The localized object *LOOB* is positioned above the rod and on which were stuck square plane markers (ArUco markers). One of the strengths of this method is that the geometry of the LOOB can be completely arbitrary. Indeed, a dedicated calibration algorithm allows finding the position of the markers in relation to each other whatever their positions. After this first calibration, any object shape rigidly attached to the LOOB can be located in real-time by monocular vision. The recording of the images and the calibration are done in less than 10 min.

The identification of the stylus tip is the result of a specific procedure. In this phase, the spherical probing tip is positioned in a cone assumed to be rigid. Any movement of the stylus is then performed to allow the visualization of all the markers by the camera. In theory, the displacement of the center of this sphere must therefore be zero. Using this set of images, the 3D position of the stylus tip is calculated by optimization. The position of the stylus tip can be thus tracked in real-time regardless of the rotations and translations performed.

In the application proposed here, we digitize 12 facets of a natural quartz crystal with a height of about 23 mm. The camera used has a resolution of 16.1 megapixel, it is positioned at about 1 m distance from the object and observes a field of about $50 \times 50 \times 50 \text{ cm}^3$. The smallest facet measured on this crystal is close to an isocèle triangle of base 2 mm and height 3 mm. The LOOB is composed of a stone of random shape on which 15 planar markers have been glued. The markers are randomly distributed on the stone. The only constraints imposed is that at least 2 no-coplanar markers must be detected in each image.

In this identification, movements of the stylus in terms of translation and rotation are relatively small. Each of the facets is digitized individually. A flatness analysis is performed by minimizing the deviations from a plane using a least-squares approach. The angles between each of the normals to these planes are also measured. The results obtained by our approach are compared to a 3D tomography scan. The measurement uncertainties obtained in this case show that it is possible to use this stylus and a monocular vision to make a three-dimensional measurement with an uncertainty of about 0.04 mm^3 .

Mots clefs : Vision monoculaire, bundle ajustement, marqueurs plans, marqueurs 3D, Aruco, Théorie des graphes.

1 Introduction

Notre objectif est l'identification en temps réel et par vision monoculaire du déplacement spatial d'un objet vu à 1 mètre de distance avec une incertitude inférieure au dixième de millimètre. Le volume d'observation de la scène est de $50 \times 50 \times 50 \text{ cm}^3$.

Différentes approches dominent l'estimation de pose 3D en vision monoculaire. Les méthodes les plus récentes utilisent des démarches basées sur des modèles où se distinguent deux approches. Une première est basée sur l'apprentissage profond (*Deep Learning-based*) [1]. Ce type d'approche présente d'excellents résultats en termes de robustesse de détection, et ce, malgré différents niveaux d'occlusion [2]. Cependant, un jeu de données de grande taille est nécessaire pour l'apprentissage. Une seconde méthode repose sur une connaissance a priori de la géométrie de l'objet localisé (*Model-based*) [3, 4]. L'approche présentée ici, fait partie de cette seconde méthode et présente une démarche pour identifier la géométrie du localisateur.

L'observation sur une image des 4 coins d'un marqueur plan carré de dimensions connues associée au modèle sténopé caméra permet en théorie de retrouver la position de cet objet dans l'espace. La position spatiale du marqueur est obtenue par la résolution d'un problème de perspective comme expliqué ici [5], cette opération est appelée estimation de pose. La pose du marqueur est exprimée par une matrice de passage allant du repère marqueur au repère caméra. L'expression de cette matrice de passage est communément réalisée dans le formalisme de Rodrigues [6], sous la forme d'un vecteur rotationnel et translationnel respectivement dans \mathbb{R}^3 , permettant d'établir les 6 DDL du marqueur par rapport au repère caméra.

Dans les faits, la détection sur une seule image des coins de ce carré est assujettie au bruit de mesure. De ce fait, l'identification de la position spatiale de cette géométrie devient incertaine [7, 8]. On parle alors d'ambiguïté de pose, cet aspect est illustré par la figure Fig.1.

En multipliant le nombre de marqueurs collés rigidement sur un objet, il est possible d'éliminer ce phénomène d'ambiguïté de pose [9, 10]. Cet ensemble de marqueur appelé LOOB (*localized object*) forme un marqueur tridimensionnel. Une phase de calibration préalable permet de retrouver la position relative des marqueurs individuels associés à ce LOOB. À la suite de cette étape, cet objet peut être repéré dans l'espace. Dans notre application, nous utiliserons des marqueurs ArUCo [10] qui, associés à des bibliothèques spécifiques permettent une détection individuelle rapide et robuste des coins de ces marqueurs sur une image [11].

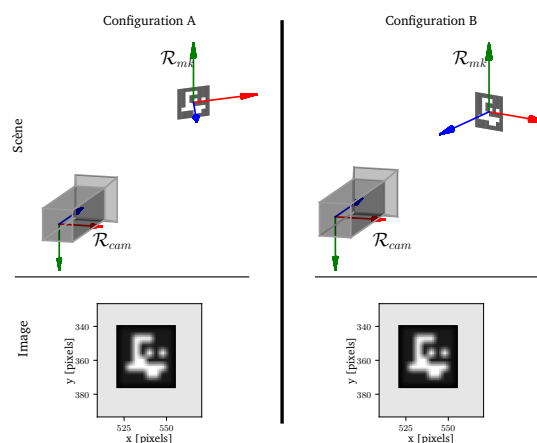


FIGURE 1: Illustration du phénomène d'ambiguïté de pose. Deux configurations virtuelles sont présentées où un marqueur de 10 mm de côté est vu par une caméra à un mètre de distance. L'orientation du marqueur diffère entre les deux situations d'une rotation autour de son axe y, ici en vert. Les images prises pour ces deux situations sont quasi identiques malgré une orientation de marqueur différente.

2 Localisateur tridimensionnel : LOOB

2.1 Identification structurelle du LOOB

La structure du LOOB est identifiée par une méthode d'optimisation sur une série d'images où l'ensemble des marqueurs individuels est présenté à la caméra. En prenant en entrée la pose individuelle des marqueurs sur chaque image, cette optimisation identifie les positions relatives des marqueurs par rapport à un marqueur de référence choisit arbitrairement au sein de l'ensemble. Cependant, comme tout problème d'optimisation, la solution finale trouvée est fortement dépendante de la qualité des données d'entrées, ici les poses individuelles, et de la solution initiale de départ. Il est donc nécessaire d'établir une stratégie pour éliminer les poses erronées issues d'une mauvaise détection ou de l'ambiguïté de pose et d'en formuler une solution initiale crédible.

Le principal apport de notre travail réside sur la formulation de cette solution initiale pertinente qui repose elle-même sur la théorie des graphes et l'utilisation de la base de cycles, indépendamment de la géométrie de l'objet utilisé et de la disposition des marqueurs sur celui-ci.

2.2 Théorie des graphes et base de cycles

Un graphe simple relie les marqueurs et les images aux travers des détections matérialisées par les arêtes du graphe [12]. À partir du graphe formé, une base de cycle est calculé. La base des cycles permet de parcourir l'ensemble des images et des marqueurs d'un graphe fermé. Un exemple simplifié de cette approche est donné Fig.2.

Sur chaque cycle trouvé, on calcule le résidu angulaire associé. Idéalement, si les poses constitutives d'un cycle sont exactes, le résidu angulaire associé est nul. Dans les faits, il y a toujours un bruit sur les détections à partir desquelles sont calculées les poses. C'est pourquoi ce résidu angulaire est comparé à un angle seuil fixé de manière arbitraire à 0.1° . Ainsi, un cycle qui ne répondrait pas à ce critère a toutes les chances de faire intervenir une pose erronée.

D'autre part, du fait de l'ambiguïté de pose, chaque détection de marqueur peut amener jusqu'à deux poses distinctes. Il est possible à partir d'une pose de marqueur d'estimer sa pose alternative comme décrit par [13]. Nous calculerons donc pour chaque détection une première pose et sa pose alternative lorsqu'elle existe.

Il est possible que plusieurs combinaisons de pose d'un même cycle aient validé le critère angulaire imposé. Ce résultat peut être expliqué d'une part par des images identiques utilisées dans ces cycles aboutissant au moins à deux combinaisons validant du cycle. Et d'autre part, la présence de symétries inopinées d'angle entre les perspectives caméra et les marqueurs peuvent permettre à des poses fausses de se compenser. Il devient alors impératif de procéder à une approche statistique pour dissocier les poses correctes parmi toutes celles calculées. Nous faisons l'hypothèse que les poses correctes auront

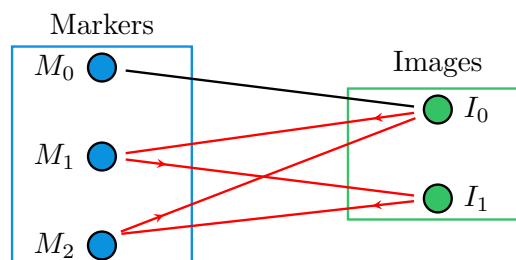


FIGURE 2: Exemple simplifié d'un graphe et d'un cycle associé (rouge). Le graphe est constitué de deux images : I_0 , I_1 et de trois marqueurs : M_0 , M_1 et M_2 . Les marqueurs M_0 , M_1 sont observés sur l'image I_0 . Les marqueurs M_1 , M_2 sont observés sur l'image I_1 . Un seul cycle est identifié : $[M_1 \rightarrow I_0 \rightarrow M_2 \rightarrow I_1 \rightarrow M_1]$. Le marqueur M_0 est exclu de la base de cycle.

plus de chances de valider le critère angulaire que sa pose alternative fautive issue de l'ambiguïté de pose. Le fonctionnement précis de cet algorithme est décrit dans un papier soumis [14].

3 Application : Scan d'un quartz naturel

3.1 Dispositif expérimental

Dans le cadre de notre étude, les essais sont effectués sur un ordinateur portable utilisant un processeur Intel Core i9-9880H avec 32 Go de RAM sous système exploitation libre Ubuntu 20.04 lts. Nous utilisons une caméra SVS-VISTEK 542 MU3 ayant pour résolution 53020×3032 pixels et équipée d'une lentille de focale 16 mm. Les paramètres intrinsèques de la caméra sont identifiés en utilisant une mire de calibration type damier [15]. La scène est éclairée par un éclairage annulaire. La distance de travail est comprise entre 600 mm et 900 mm. Le stylet est présenté figure Fig.3.

Le localisateur utilisé ici est une pierre volcanique de géométrie quelconque dont les dimensions sont d'environ $70 \times 70 \times 60$ mm³. Des marqueurs ArUCo de 12 mm de côté ont été collés sur des morceaux de verre pour garantir leurs planéités. Les plaques de verres sont collés rigidement à la surface de ce rocher. La disposition des marqueurs sur cette surface est aléatoire, en évitant des marqueurs coplanaires.

Une tige inox d'une longueur de 200 mm a été montée rigidement dans cette pierre volcanique pour en faire un stylet. La pointe de ce stylet est constituée d'une sonde de contact de forme sphérique en rubis de diamètre 2 mm.

3.2 Calibrations du stylet

423 images sont enregistrées pour construire le localisateur tridimensionnel à partir de l'ensemble marqueurs-rocher et définir le centre de la sphère de contact. Durant cette étape, la pointe sphérique du stylet est logée dans une surface conique fixe relativement à la caméra. En maintenant le contact entre la pointe et la surface conique, des combinaisons de mouvements du stylet sont effectués avec des rotations d'environ 30° relativement à la verticale caméra. Des rotations autour de l'axe de révolution du stylet pouvant aller jusqu'à 360° sont conjointement réalisées.

Au cours de cette étape, l'ensemble des marqueurs localisés sur la surface du rocher sont présentés à la caméra pour avoir une variété importante de pose (voir Fig.4.a). La méthode présentée précédemment est alors appliquée pour déterminer le positionnement des marqueurs les uns aux autres. La figure 4.b présente le graphe initial obtenu durant l'application de notre méthode. Notre algorithme appelé "**GBU**" est alors appliqué à ce graphe initial pour retenir les poses de marqueurs identifiés comme correctes, voir figure Fig.4.c1-4. Enfin les coordonnées des coins des marqueurs ainsi analysés sont utilisées comme

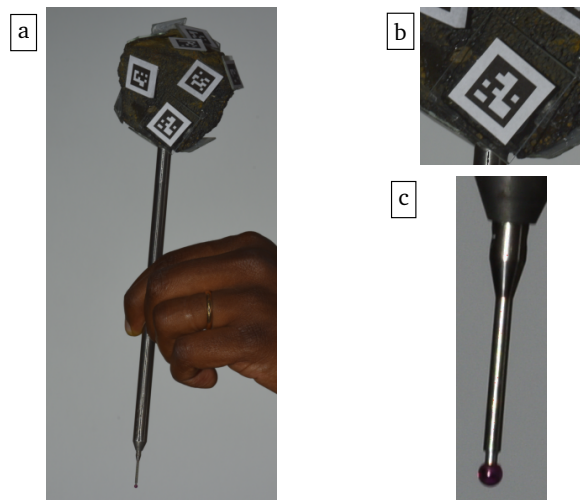


FIGURE 3: Photographies du dispositif expérimental **a** - Stylet surmonté par son localisateur formé à partir d'une roche volcanique et d'un agencement de marqueurs ArUCo. **b** - Marqueur ArUCo collé sur une découpe de verre pour garantir sa planéité. **c** - Sonde de contact du stylet de géométrie sphérique. La calibration permet de retrouver le centre de cette sphère.

solution initiale d'une optimisation moindre carré pour obtenir la position relative des marqueurs par rapport à un marqueur de référence, voir figure Fig.4.d.

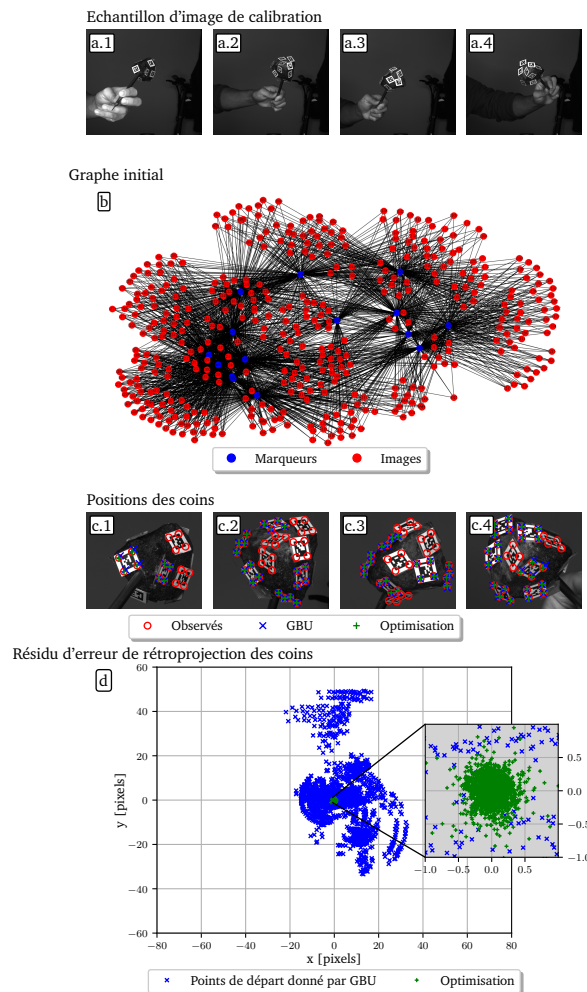


FIGURE 4: Calibration d'un LOOB. **a** - Échantillon d'images prises lors de la calibration du LOOB où une variété hétérogène de poses est observée pour chaque marqueur. **b** - Graphe obtenu à partir des détections réalisées sur les images. **c.1-4** - Positions de chaque coin de chaque marqueur sur les images. En rouge, les positions obtenues en utilisant la méthode de détection AprilTag 2 [11]. En bleu, les positions obtenues après projection des poses estimées par notre algorithme. Et enfin, en vert, les positions obtenues après l'optimisation par les moindres carrés en utilisant les positions bleues comme solutions initiales. **d** - Résidu d'erreurs de reprojection des coins des marqueurs de la méthode GBU et résultats de l'optimisation par la méthode des moindres carrés sur l'ensemble du lot d'images. La majorité des points (98%) après optimisation présente un résidu compris entre ± 0.5 pixels.

Une seconde procédure d'optimisation identifie les coordonnées d'un point fixe appartenant au repère du LOOB dont les coordonnées dans le repère caméra sont identiques sur chacune des images. Ce point sera dorénavant considéré comme étant la pointe du stylet recherchée. Les incertitudes de mesures liées à l'identification de ce point sont données par la dispersion des mesures autour des valeurs moyennes respectivement des coordonnées x , y et z dans le repère caméra et sont illustrées par la figure Fig.5. b.

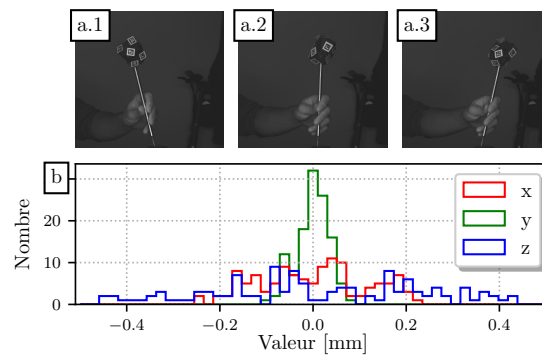


FIGURE 5: Calibration du stylet. **a.1-3** - Échantillon d'images prises lors de la calibration du stylet. Les mouvements effectués font intervenir les rotations de la liaison rotule à identifier. **b** - Dispersion des coordonnées de la pointe du stylet autour de leurs valeurs moyennes respectives.

On mesure un écart-type des déplacements du centre de la sphère suivant x , y et z respectivement de $120\ \mu\text{m}$, $40\ \mu\text{m}$ et $240\ \mu\text{m}$. Comme attendu, les incertitudes liées aux déplacements selon l'axe optique caméra (axe z) sont les plus importantes. En effet, à déplacement équivalent, un mouvement hors plan des coins d'un marqueur entrainera des déplacements en pixels bien moindres que lors de déplacements parallèles au plan image. Par ailleurs, les déplacements du stylet ont été effectués majoritairement selon l'axe horizontal caméra (axe x), par conséquent, les incertitudes sont plus fortes selon cet axe.

3.3 Analyse comparative de facettes d'un quartz naturel

Pour valider notre approche, nous nous proposons de caractériser les facettes d'un cristal de quartz naturel [16, 17] d'une hauteur d'environ 23 mm voir figure Fig.6. a-b. Les 12 facettes planes de ce cristal sont palpées à l'aide du stylet surmonté du marqueur composite (30 à 50 points par face, Fig.6. c).

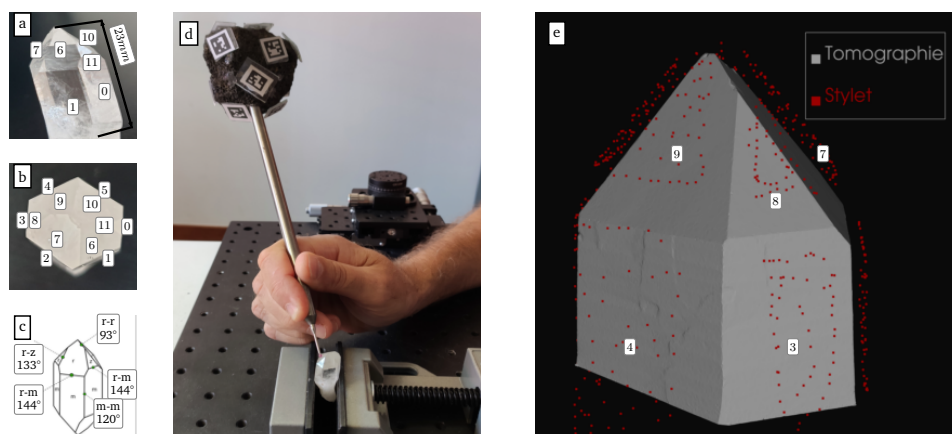


FIGURE 6: Quartz Naturel (Alevard, Alpes françaises). **a** - Vue trois quarts de 5 facettes du quartz. **b** - Vue de dessus des 12 facettes du quartz. **c** - Identification des différents types facettes cristallines [18]. **d** - Palpation des 12 facettes du quartz à l'aide du stylet. **e** - Scan du quartz par tomographie (gris) et points 3D mesurés avec notre stylet (rouge). Un décalage est observé entre les deux scans correspondant au rayon de la sphère de la sonde de contact du stylet. Certaines facettes font apparaître des imperfections de croissance. Cet aspect est notamment visible sur la facette n° 4 du scan tomographique.

Pour obtenir une mesure comparative mieux résolue, ce cristal a également été numérisé par tomographie (8 millions de points) avec une taille de voxel de 26 micromètres, voir figure Fig.6. e.

Les équations pour chacune des facettes numérisées par stylet et par tomographie sont obtenues à partir d'une procédure d'optimisation. Pour les deux types de scans, cette optimisation moindres carrés prend

en paramètres les coefficients des plans associés aux facettes et minimise la distance entre les nuages de points et les plans optimisés. Notons tout d'abord que ces facettes ne sont pas parfaitement planes, des stries de croissance apparaissent sur la surface qui altèrent très légèrement la planéité des faces. Les différences moyennes entre les points scannés et les facettes optimisés sont fournies dans le tableau Tab.1.

Facettes	Tomographie		Stylet	
	\bar{X} [mm]	σ [mm]	\bar{X} [mm]	σ [mm]
Facette_00	0.009	0.0071	0.1182	0.1047
Facette_01	0.0141	0.0217	0.0316	0.0234
Facette_02	0.008	0.0066	0.0094	0.0072
Facette_03	0.0119	0.0104	0.0422	0.0313
Facette_04	0.0101	0.0087	0.065	0.0527
Facette_05	0.0119	0.0093	0.0176	0.0147
Facette_06	0.0102	0.0195	0.0313	0.0298
Facette_07	0.008	0.0124	0.0083	0.006
Facette_08	0.0198	0.0796	0.0312	0.0278
Facette_09	0.0064	0.0165	0.0217	0.0166
Facette_10	0.0111	0.0276	0.0093	0.0075
Facette_11	0.0025	0.0023	0.0336	0.0279

TABLE 1: Comparaison entre les facettes retrouvées par tomographie et par le stylet. Pour chaque méthode, la valeur moyenne et l'écart relatif de la distance entre les points scannés et les facettes optimisées sont donnés.

Les écarts entre les points mesurés et les plans optimisés sont de l'ordre de 4 centièmes de millimètre (à l'exception de la *facette_00*) pour les mesures réalisées avec le stylet. Ces écarts sont de l'ordre du centième de millimètre pour la mesure issue d'analyse tomographique. En raison, des faibles amplitudes de déplacements du stylet, nous observons des incertitudes bien plus faibles que lors la phase de calibration du stylet où les déplacements effectués étaient décimétriques et des rotations imposées jusqu'à 360°. Les angles entre les normales à ces facettes sont ensuite analysés, pour ne pas surcharger les résultats, seules les angles entre les facettes de type r-r, m-m, r-z et r/z-m sont fournis en figure Fig.7.

Les déviations angulaires moyennes entre les facettes identifiées à partir de l'analyse tomographique et de notre dispositif sont au maximum de 0,42°, avec un écart-type maximal de 1.15°.

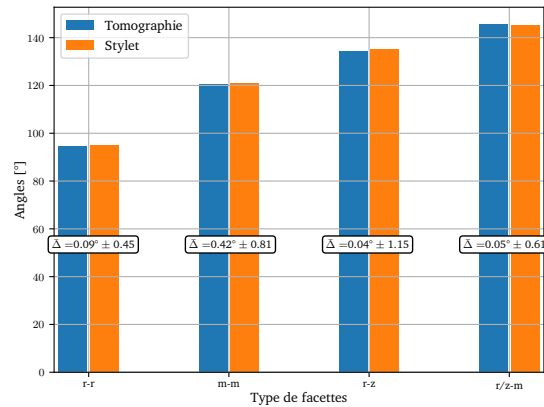


FIGURE 7: Histogramme des angles entre les normales des facettes identifiées par classe d'association de facettes. Les valeurs trouvées en tomographie et avec notre stylet sont respectivement en bleu et orange. L'écart angulaire moyen pour chaque classe entre les deux méthodes ainsi que l'écart-type associé sont donnés en annotation.

4 Conclusion

Pour cette application, nous utilisons un stylet surmonté d'un objet de géométrie quelconque autour duquel une multitude de marqueurs plans ont été collés de manière aléatoire. Une première phase de calibration permet de retrouver les positions relatives des marqueurs collés sur cet objet en observant simplement les images de cet objet manipulé à main levée devant une caméra. La méthode de calibration est basée sur la théorie des graphes. L'application proposée consiste à palper les facettes d'un quartz naturel. Ce dernier est également numérisé par tomographie RX afin d'avoir une référence mieux résolue. La comparaison des résultats en termes de défaut de planéité de l'ordre du dixième de millimètre et d'angle entre facettes généralement inférieur au degré montre la pertinence du résultat obtenu. Ce palpeur utilisable en vision monoculaire ouvre un champ d'utilisation pour des applications de localisation sub-millimétrique (sculpture, numérisation tridimensionnelle). Une application en navigation chirurgicale est actuellement à l'œuvre pour la mise en place d'implant orthopédique avec un localisateur relié à l'implant et un second relié au dispositif de perçage.

Références

- [1] Y. Chen, Y. Tian, and M. He, "Monocular human pose estimation : A survey of deep learning-based methods," *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 192, p. 102897, Mar. 2020.
- [2] V. Balntas, A. Doumanoglou, C. Sahin, J. Sock, R. Kouskouridas, and T.-K. Kim, "Pose Guided RGBD Feature Learning for 3D Object Pose Estimation," pp. 3856–3864, 2017.
- [3] V. Lepetit and P. Fua, *Monocular model-based 3D tracking of rigid objects*. Now Publishers Inc, 2005.
- [4] H. Lim and Y. S. Lee, "Real-time single camera slam using fiducial markers," in *2009 ICCAS-SICE*, pp. 177–182, IEEE, 2009.
- [5] V. Lepetit, F. Moreno-Noguer, and P. Fua, "Epn : An accurate o (n) solution to the pnp problem," *International journal of computer vision*, vol. 81, no. 2, pp. 155–166, 2009.
- [6] G. Terzakis, M. Lourakis, and D. Ait-Boudaoud, "Modified Rodrigues Parameters : An Efficient Representation of Orientation in 3D Vision and Graphics," *J Math Imaging Vis*, vol. 60, pp. 422–442, Mar. 2018.

- [7] D. Oberkampf, D. F. DeMenthon, and L. S. Davis, “Iterative Pose Estimation Using Coplanar Feature Points,” *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 63, pp. 495–511, May 1996.
- [8] R. Muñoz-Salinas and R. Medina-Carnicer, “UcoSLAM : Simultaneous localization and mapping by fusion of keypoints and squared planar markers,” *Pattern Recognition*, vol. 101, p. 107193, May 2020.
- [9] P.-C. Wu, R. Wang, K. Kin, C. Twigg, S. Han, M.-H. Yang, and S.-Y. Chien, “DodecaPen : Accurate 6DoF Tracking of a Passive Stylus,” in *Proceedings of the 30th Annual ACM Symposium on User Interface Software and Technology*, UIST ’17, (Québec City, QC, Canada), pp. 365–374, Association for Computing Machinery, Oct. 2017.
- [10] S. Garrido-Jurado, R. Muñoz-Salinas, F. Madrid-Cuevas, and M. Marín-Jiménez, “Automatic generation and detection of highly reliable fiducial markers under occlusion,” *Pattern Recognition*, vol. 47, pp. 2280–2292, June 2014.
- [11] J. Wang and E. Olson, “AprilTag 2 : Efficient and robust fiducial detection,” in *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pp. 4193–4198, Oct. 2016. ISSN : 2153-0866.
- [12] K. Paton, “An algorithm for finding a fundamental set of cycles of a graph,” *Commun. ACM*, vol. 12, pp. 514–518, Sept. 1969.
- [13] G. Schweighofer and A. Pinz, “Robust Pose Estimation from a Planar Target,” *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 28, pp. 2024–2030, Dec. 2006. Conference Name : IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.
- [14] C. Elmo, L. Charleux, E. Roux, and P. Vacher, “The Good, the Bad and the Undetermined algorithm : a pose classifier for bundle adjustment of planar markers from monocular vision,” *Submitted paper*, p. 12.
- [15] A. De la Escalera and J. M. Armingol, “Automatic chessboard detection for intrinsic and extrinsic camera parameter calibration,” *Sensors*, vol. 10, no. 3, pp. 2027–2044, 2010.
- [16] Y. Le Page and G. Donnay, “Refinement of the crystal structure of low-quartz,” *Acta Crystallographica Section B : Structural Crystallography and Crystal Chemistry*, vol. 32, no. 8, pp. 2456–2459, 1976.
- [17] J. R. Hook and H. E. Hall, *Solid state physics*. John Wiley & Sons, 2013.
- [18] A. R. West, *Basic solid state chemistry*. John Wiley & Sons Incorporated, 1999.