



**HAL**  
open science

# **SIMULATION DE LA FISSURATION PAR CHOC THERMIQUE DANS DES ÉPROUVETTES CYLINDRIQUES MINCES À L'AIDE D'UN MODÈLE DE CHAMP DE PHASE**

Marwa Dhahri, Radhi Abdelmoula, Jia Li, Yamen Maalej

► **To cite this version:**

Marwa Dhahri, Radhi Abdelmoula, Jia Li, Yamen Maalej. SIMULATION DE LA FISSURATION PAR CHOC THERMIQUE DANS DES ÉPROUVETTES CYLINDRIQUES MINCES À L'AIDE D'UN MODÈLE DE CHAMP DE PHASE. 25e Congrès Français de Mécanique, Nantes, 29 août-2 septembre 2022, Aug 2022, Nantes, France. hal-04280085

**HAL Id: hal-04280085**

**<https://hal.science/hal-04280085v1>**

Submitted on 10 Nov 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# SIMULATION DE LA FISSURATION PAR CHOC THERMIQUE DANS DES ÉPROUVETTES CYLINDRIQUES MINCES À L'AIDE D'UN MODÈLE DE CHAMP DE PHASE

M. DHAHRI<sup>a</sup>, R. ABDELMOULA<sup>b</sup>, J. LI<sup>c</sup>, Y. MAALEJ<sup>d</sup>

- a. Université de Sorbonne Paris Nord, Laboratoire des sciences des procédés et des matériaux,  
marwadhahri70@yahoo.com
- b. Université de Sorbonne Paris Nord, Laboratoire des sciences des procédés et des  
matériaux, radhi.abdelmouma@univ-paris13.fr
- c. Université de Sorbonne Paris Nord, Laboratoire des sciences des procédés et des matériaux,  
jia.li@univ-paris13.fr
- d. Université de Tunis El Manar, École Nationale d'Ingénieurs de Tunis, Laboratoire de  
Mécanique Appliquée et d'Ingénierie, yamen.maalej@enit.utm.tn

## Résumé :

*Le séchage ou le refroidissement induisent un rétrécissement des matériaux entraînant une contrainte thermique qui conduit à des fissures avec une morphologie particulière répétitive conduisant à la rupture par choc thermique. Par conséquent, pour pouvoir exploiter pleinement le potentiel des matériaux, il est essentiel de comprendre la formation, la morphologie, la propagation des fissures complexes et de prédire leurs amorçages dans les matériaux soumis à un choc thermique. En effet, ces fissures peuvent affaiblir le matériau et modifier sa résistance. Dans ce travail, nous présentons un modèle numérique pour simuler le processus d'endommagement et de rupture des matériaux céramiques dans des conditions de choc thermique. En particulier, le principe variationnel a été appliqué à l'analyse d'endommagement par gradient dans la mise en œuvre du modèle numérique. Les expériences sur les essais de trempe d'éprouvettes circulaires ont été utilisées pour valider l'efficacité du modèle. Il a été prouvé que le modèle proposé est capable de distinguer et de simuler les deux phases de rupture dans des conditions de choc thermique des matériaux céramiques, à savoir la phase d'endommagement uniforme et la phase de fissuration, avec une précision satisfaisante. Les principales caractéristiques des modèles de fissures, telles que la structure périodique et hiérarchique, ont été fidèlement reproduites par les simulations numériques. De plus, les influences de différents paramètres physiques ont été examinées et discutées. Il a été constaté qu'un paramètre d'échelle de longueur interne, qui peut être considéré comme un paramètre matériel, joue un rôle important dans l'ensemble du processus de fracture.*

## Abstract :

*Drying or cooling processes induce shrinking phenomenon of the materials. Those strains are induced by thermal stresses which may lead to cracks formation with a particular repetitive morphology. Therefore, in order to fully exploit the potential applications of thermal-susceptible materials, it is essential to understand the initiation, morphology and propagation of complex cracks. Indeed, thermal cracks make the material weaker and they modify its resistance. In the present work, we present a numerical model to simulate the damage and fracture process occurred in ceramic materials under thermal shock conditions. In particular, the variational principle was applied to gradient damage analysis in the establishment of the numerical model. The experiments on quenching tests of circular specimens were used to validate the efficiency of the model. It proves that the proposed model is capable to distinguish and simulate the two failure steps in under thermal shock conditions of ceramic materials, namely the uniform damage phase and the cracking phase, with a satisfactory accuracy. The main characteristics of the crack patterns, such as the periodic and hierarchical structure, were faithfully reproduced by the numerical simulations. Moreover, influences of different physical parameters were examined and discussed. It was found that an internal length scale parameter, which can be considered as a material parameter, plays an important role in the entire fracture process.*

**Mots clefs : Rupture fragile, choc thermique, modèle de gradient d'endommagement, simulations numériques, céramique, éprouvette cylindrique.**

## 1 Introduction

Dans l'ingénierie moderne, les céramiques sont largement utilisées pour fabriquer composants structuraux essentiels qui fonctionnent dans les conditions de mise en œuvre des serveurs comme dans l'environnement à haute température grâce à leur excellente résistance mécanique, stabilité physico-chimique et propriété anti-corrosion à haute température. Cependant, lorsque la température ambiante change rapidement et en raison de leur fragilité intrinsèque, de nombreux matériaux céramiques souffrent de phénomènes d'endommagement et de fissuration, connus sous le nom de rupture par choc thermique [6], [24]. En général, la rupture par choc thermique est produite pendant un temps très court par déformations thermiques incompatibles dans des régions où la contrainte dépasse localement la contrainte ultime de traction. Ce point faible limite les applications des matériaux céramiques. Par conséquent, l'étude des mécanismes de rupture des céramiques sous choc thermique est essentielle pour leur conception appropriée et leurs applications techniques. Au cours des dernières décennies, des études expérimentales et théoriques ont été menées pour étudier les mécanismes de rupture des céramiques sous choc thermique. Les théories fondamentales de la rupture par choc thermique ont été établies sur la base de critères de contrainte et d'énergie dans les travaux pionniers de [17], [12], et [13]. Par la suite, de nombreux chercheurs ont développé des modèles théoriques et numériques pour évaluer le processus de fracture et étudier l'influence de différents paramètres physiques sur le comportement de la fracture.

[15] et [18] ont développé une approche de minimisation de l'énergie pour estimer les modèles de fissures pendant un essai de trempe des échantillons en céramiques chauffés. Un réseau de fissures régulier a été mis en place dans l'échantillon testé tandis que l'espacement des fissures et la croissance des fissures ont été déterminés en minimisant l'énergie totale. Cette approche du réseau de fissures régulier a également été utilisée dans l'analyse de [29], dans laquelle les principes de la mécanique des fractures finies ont été appliqués. Cette méthode est efficace pour produire un réseau de fissures idéalement distribué dans une géométrie simple, mais difficile à appliquer dans des cas réels d'ingénierie car un réseau de fissures régulier peut ne pas exister.

[19], [20] ont d'abord effectué des simulations par éléments finis en utilisant un modèle d'endommagement non local combinant les critères d'énergie et de résistance. Ces travaux permettent de prédire de manière successivement plus réaliste et le processus de fissuration dans les échantillons céramiques trempés. Les simulations numériques sont alors devenues populaires par leur adaptabilité à divers problèmes de défaillance induits par la chaleur. [31] ont établi un modèle par éléments finis en associant la mécanique de l'endommagement et une distribution hétérogène de la fragilité dans les échantillons trempés. La propagation oscillatoire des fissures dans les plaques de verre soumises à des chocs thermiques a été analysée numériquement à l'aide de la méthode des éléments finis étendue (XFEM) [23]. La méthode des éléments finis associée aux modèles de gradient d'endommagement [3], [30], [5] constituent un outil puissant pour la prédiction de l'évolution des fissures et ont été successivement appliquées aux problèmes de chocs thermiques. Le modèle de gradient de dommage, également appelé modèle de champ de phase, utilise une formulation variationnelle dans un cadre quasi-statique et inclut les principes d'irréversibilité et d'équilibre énergétique. En particulier, le dommage est modélisé par une variable auxiliaire, notamment un champ de phase, qui introduit une technique de régularisation pour suivre la trajectoire de la fissure. Cette approche variationnelle, bien que très efficace dans la prédiction de l'initiation et de la propagation des fissures, nécessite de puissantes capacités de calcul pour les simulations numériques à grande échelle. Dans ce cas, les techniques d'adaptation de maillage peuvent être utilisées pour réduire l'effort de calcul [9].

Une autre technique numérique efficace pour les problèmes thermo-mécaniques est le modèle péri-dynamique. Le principal avantage de la péri-dynamique est que les équations gouvernantes du mouvement naturellement supportent la présence de discontinuités dans le champ de déformation. La réponse à un choc thermique dans des matériaux fragiles a été étudiée en utilisant la péri-dynamique ordinaire basée sur l'état par [8]. Un modèle de péri-dynamique 3D a été établi et a montré une efficacité satisfaisante. Des travaux similaires peuvent être trouvés dans [32], [14], [11]. Tous ces modèles peuvent reproduire partiellement le processus complexe de rupture par choc thermique observé dans les expériences et ont permis d'approfondir la compréhension du comportement de rupture des matériaux céramiques. Cependant, divers aspects fondamentaux du comportement des fractures n'ont pas été entièrement compris et des recherches plus approfondies sont nécessaires pour obtenir des connaissances plus complètes dans ce domaine. Par exemple, la transition de l'endommagement global à la fissuration localisée est un processus complexe. Lorsque l'intensité du choc thermique est suffisamment faible, l'endommagement homogène peut apparaître dans les matériaux céramiques sous forme de microfissures ou de perte de matière [16], [4]. Lorsque l'intensité du choc thermique augmente, l'endommagement

global peut rapidement être localisé et former des fissures macroscopiques. La description de ce processus de bifurcation fournie dans la littérature est encore vague et les facteurs qui influencent cette transition n'ont pas été clairement discutés.

Dans le présent travail, nous développons un modèle numérique pour simuler l'ensemble du processus de rupture des céramiques sous choc thermique. Les résultats numériques de ce modèle seront validés en confrontant les expériences réalisées dans les travaux de [18] dans lesquelles des éprouvettes céramiques circulaires chauffées ont été trempées dans l'eau froide afin de créer des chocs thermiques de différentes intensités. Nous avons concentré notre attention sur la description détaillée du processus de transition entre l'endommagement global et la formation de fissures. À cette fin, la théorie de l'endommagement par gradient dans le cadre variationnel a été adoptée pour la mise en œuvre du modèle numérique. Comparativement aux données expérimentales, il s'avère que le modèle numérique proposé présente une excellente efficacité et précision pour reproduire l'endommagement et la fracture des spécimens sous choc thermique. De plus, l'influence de différents paramètres physiques sur le processus de bifurcation et sur les modèles de fissures finaux a été examinée.

## 2 Cadre variationnel des modèles d'endommagement par gradient

Dans cette section, nous rappelons brièvement les ingrédients et les principaux résultats du modèle d'endommagement par gradient couplé à une contrainte thermique présenté dans [30]. Les lecteurs sont invités à se reporter à [28], [26], [27], [10], pour des formulations mathématiques strictes et détaillées. Considérons un matériau élastique homogène, isotrope et linéaire dans le cadre thermo-élastique, dont le comportement d'endommagement est défini comme suit :

1. Le champ de dommage scalaire, noté  $\alpha$ , est supposé être borné dans  $[0, 1]$ ,  $\alpha = 0$  désignant le matériau non endommagé et  $\alpha = 1$  le matériel complètement endommagé.
2. L'état de l'élément de volume est caractérisé par le triplet  $(\varepsilon^e, \alpha, \nabla\alpha)$  où  $\varepsilon^e$ ,  $\alpha$  and  $\nabla\alpha$  désignent respectivement le tenseur de déformation élastique, le champ d'endommagement et le gradient du champ d'endommagement.
3. La densité d'énergie de déformation globale du matériau est représentée par la fonction d'état  $W(\varepsilon^e, \alpha, \nabla\alpha)$ . Le processus de dissipation des dommages est non local en raison du terme de gradient présenté dans l'énergie de déformation. Il introduit une transition lisse entre l'état non endommagé  $\alpha = 0$  et la fissure  $\alpha = 1$ , comme illustré dans la partie droite de Fig. (1). Nous supposons que la densité énergétique globale peut être représentée par la somme de trois termes : l'énergie élastique stockée  $\psi$ , la partie locale de l'énergie dissipée  $w(\alpha)$  et sa partie non locale impliquant  $\nabla\alpha$  :

$$W(\varepsilon^e, \alpha, \nabla\alpha) = \psi(\alpha, \varepsilon^e) + w(\alpha) + \frac{1}{2}w_1\ell^2\nabla\alpha\cdot\nabla\alpha. \quad (1)$$

La fonction  $\alpha \mapsto w(\alpha)$  représente la loi constitutive de l'endommagement déterminant la dissipation locale pendant l'évolution homogène de l'endommagement, et atteint sa valeur maximale lorsque  $\alpha = 1$ .

- Le premier terme de l'équation (1) est l'énergie élastique écrite comme suit :

$$\psi(\alpha, \varepsilon^e) = \frac{1}{2} A(\alpha) (\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon^{th}) \cdot (\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon^{th}), \quad (2)$$

où  $\varepsilon(\mathbf{u})$ ,  $\varepsilon^{th}$  désignent respectivement la déformation linéarisée due au déplacement  $\mathbf{u}$  et le tenseur de la déformation thermique respectivement ;  $\varepsilon^e = \varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon^{th}$  est le tenseur de la déformation élastique.

- La construction du présent modèle d'endommagement est basée sur le choix de deux lois constitutives d'endommagement spécifiques, à savoir  $\alpha \rightarrow A(\alpha)$  et  $\alpha \rightarrow w(\alpha)$ . Dans ce travail, nous avons adopté le modèle de dommage suivant proposé dans [25].

$$A(\alpha) = (1 - \alpha)^2 A_0, \quad w(\alpha) = w_1 \alpha, \quad (3)$$

où  $A_0$  représente le tenseur de rigidité du matériau non endommagé et  $A(\alpha)$  son homologue du matériel endommagé.

- Les deuxième et troisième termes dans l'Eq. (1) sont la partie locale et la partie non locale de la densité d'énergie dissipée par l'endommagement. Elles peuvent être considérées comme les densités fonctionnelles de surface d'une fissure de Griffith équivalente dans les modèles d'endommagement par gradient.

Ce modèle justifie la présence de trois paramètres impliqués dans le processus d'endommagement, à savoir la contrainte critique  $\sigma_c$ , la ténacité effective à la rupture  $G_c$  et la longueur interne  $\ell$ . Les relations suivantes peuvent être trouvées entre ces paramètres [30] :

$$\sigma_c = \sqrt{w_1 E}, \quad w_1 = \frac{3G_c}{8\ell}. \quad (4)$$

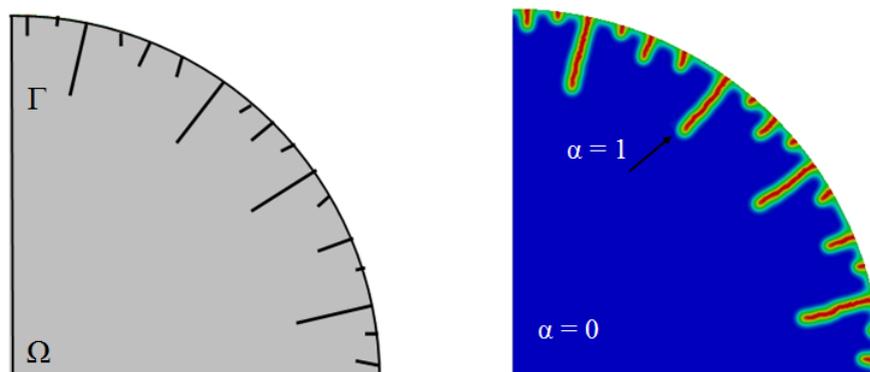
Si  $x$  se réfère à la coordonnée d'épaisseur centrée sur la fissure où  $\alpha(x) = 1$ , le profil d'endommagement est donné par :

$$\alpha(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{2}\ell}\right)^2 & \text{if } |x| < \sqrt{2}\ell, \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \quad (5)$$

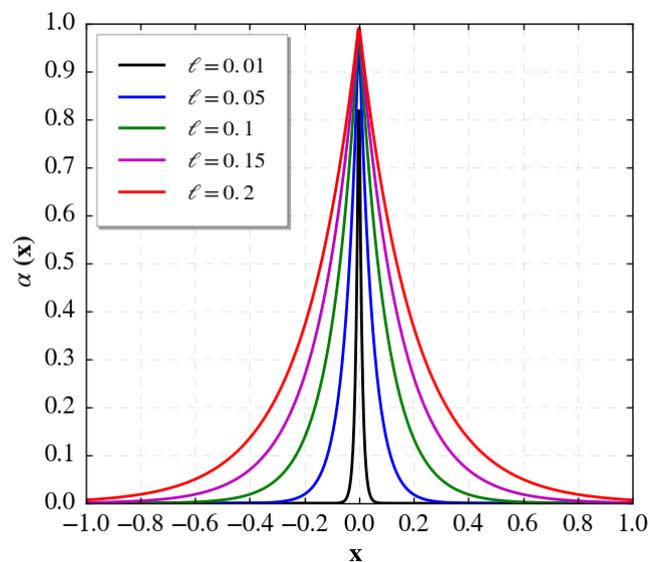
Ce profil est illustré dans la Fig. (2) en fonction de  $\ell$ .

### 3 Le problème thermoélastique

La structure est composée d'un corps dont la configuration de référence naturelle est un disque de section circulaire  $S$  et de rayon  $R$  Fig. (3), dans laquelle le plan  $xy$  coïncide avec le plan médian de la plaque et la direction  $z$  lui est perpendiculaire. La structure est une plaque non endommagée. Aucune condition aux limites imposées sur le champ d'endommagement n'est imposée. Ce dernier peut donc évoluer librement. Le champ de température  $T$  et le champ de contrainte  $\sigma$  dépendent uniquement des coordonnées dans le plan, c'est-à-dire  $T = T(x, y)$ , et  $\sigma = \sigma(x, y)$ .



**Figure1** – Les fissures (à gauche) sont régularisés dans le cas d'un choc thermique par un champ d'endommagement continu (à droite). La zone bleue correspond aux points non endommagés ( $\alpha = 0$ ), la ligne médiane de la zone rouge correspond aux points totalement endommagés ( $\alpha = 1$ ).



**Figure2** – Champs d'endommagements autour d'une fissure unique pour différentes valeurs de  $\ell$

Nous avons supposé que le champ de contrainte dans le plan  $xy$  est présenté par :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y), \\ \sigma_z &= \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Les contraintes thermoélastiques  $\epsilon$ , correspondant au champ de contrainte dans le cadre de la contrainte plane proviennent de la loi d'Hooke :

$$\epsilon = \mathbf{S}\sigma + \epsilon^{th} \quad (7)$$

où  $\epsilon^{th}$  et  $\mathbf{S}$  désignent respectivement le champ de déformation thermique, et le tenseur de souplesse du matériau. Étant donnée que le matériau est isotrope et en vertu de l'hypothèse des contraintes planes,  $\epsilon^{th}$  et  $\mathbf{S}$  peuvent s'écrire :

$$\epsilon^{th} = \Theta(T - T_i)\mathbf{I}, \quad \mathbf{S}_{ijkl} = \frac{1}{E_0}\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{\nu}{E_0}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad i, j, k, l \in \{1, 2\}, \quad (8)$$

où  $E_0$  représente le module d'Young et  $\nu$  est le coefficient de Poisson (qui ne change pas au cours du processus d'endommagement).  $\Theta$  est le coefficient de dilatation thermique du matériau,  $T_i$  est la température initiale pour le disque, et  $\mathbf{I}$  est le tenseur d'identité.

L'étude est réalisée sur le quart du disque où la configuration de référence est définie comme suit :

$$\Omega = \{(x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0, 0 \leq x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$$

avec des bords  $\Gamma_x$ ,  $\Gamma_y$  et  $\Gamma$  défini comme :

$$\Gamma_x = \{(x_1, x_2), x_1 = 0, 0 \leq x_2 < R\}, \quad \Gamma_y = \{(x_1, x_2), x_2 = 0, 0 \leq x_1 < R\}, \quad \Gamma = \{(x_1, x_2), x_1^2 + x_2^2 = R^2\}.$$

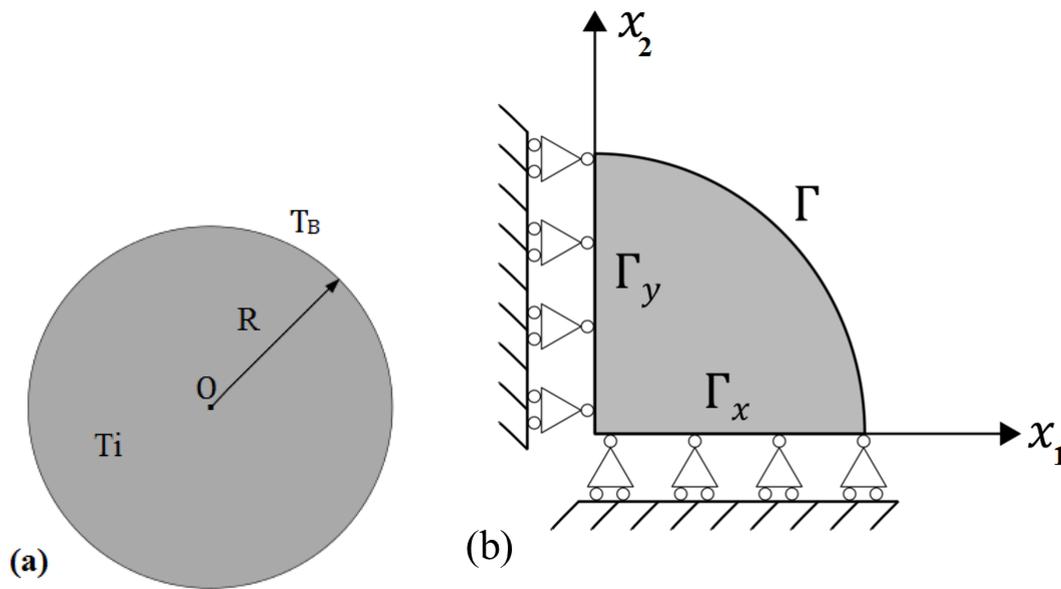
Nous avons supposé que le rayon  $R$  est beaucoup plus grand que la longueur interne  $\ell$  du matériau. Les forces du corps sont négligées. Les côtés  $\Gamma_x$  ou  $\Gamma_y$  sont soumis à des conditions aux limites de sorte que le vecteur normal sortant  $\mathbf{n}$  et la contrainte de cisaillement disparaisse, tandis que le côté  $\Gamma$  est libre. En conséquence, les conditions aux limites mécaniques s'écrivent :

$$u_2 = 0, \quad \sigma_{12} = 0 \quad \text{dans } \Gamma_x, \quad u_1 = 0, \quad \sigma_{21} = 0 \quad \text{dans } \Gamma_y \quad (9)$$

$$\sigma_t \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{dans } \Gamma \quad (10)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal sortant au bord  $\Gamma$ . Tout au long de cette partie, nous utilisons le système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . La plaque est initialement à la température uniforme  $T_i$  jusqu'au temps 0, et donc la plaque est non endommagée et présentée sans contrainte :

$$\mathbf{u}_t(r, \theta) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \epsilon_t^e(r, \theta) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \alpha_t(r, \theta) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \sigma_t(r, \theta) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \forall t \leq 0,$$



**Figure 3** – Géométrie et conditions aux limites du problème (a) conditions limites thermiques, (b) conditions limites mécaniques.

Dans ce travail, nous supposons que l'endommagement du matériau n'a aucune influence sur le processus de transfert de chaleur puisque les fissures sont essentiellement orientées radialement. Dans ce cas, le champ de température peut être déterminé analytiquement, comme expliqué à l'annexe. Ensuite, le champ de contraintes thermo-élastiques et le champ d'endommagement sont évalués par éléments finis.

## 4 Implémentation numérique

Cette section est consacrée à la mise en œuvre numérique de l'approche variationnelle appliquée au problème du choc thermique décrit à la section(3). En résumé, le problème global est décrit comme suit : étant donné un incrément de temps uniforme arbitraire  $dt$  et pour chaque pas de temps  $t_n = ndt$  où  $n \in \mathbb{N}$ , nous recherchons une solution particulière  $(u^n, \alpha^n)$  qui minimise l'énergie totale Eq. (1) et satisfait la condition de stabilité du premier ordre et l'équilibre statique. La discrétisation spatiale est obtenue en utilisant des éléments triangulaires à trois nœuds de taille  $h = 0.05$  mm. La procédure est mise en œuvre par la méthode de minimisation alternée résumée dans l'Algorithme (1).

---

**Algorithm 1** La mise en œuvre numérique basée sur la minimisation alternée du problème de choc thermique de la structure cylindrique

---

- 1: *initialisation* :  $T_i, T_B$
  - 2: Donnez les paramètres de matériau et les paramètres du modèle (voir Tab. (1))
  - 3: Donner la condition de l'étape du chargement précédente  $\mathbf{u}_{t_{j-1}}$  et  $\alpha_{t_{j-1}}$
  - 4: Calculer le champ de température en utilisant l'Eq. (A.18)
  - 5: Calculer le champ de déformation thermique en utilisant l'Eq. (A.19)
  - 6: Minimisation alternée de la fonction Eq. (1)
  - 7: **A** chaque pas de temps  $t_j$ 
    - Tandis que** la convergence n'est pas assurée **Faire**
    - Répéter**
    - Résoudre  $\mathbf{u}_{t_j} = \operatorname{argmin} \mathcal{W}(\mathbf{v}, \alpha_{t_{j-1}})$  par min de l'Eq. (1) en fixant  $\alpha$
    - Résoudre  $\alpha_{t_j} = \operatorname{argmin}_{\alpha \geq \alpha_{t_{j-1}}} \mathcal{W}(\mathbf{u}_{t_j}, \beta)$  par min de l'Eq. (1) en fixant  $\mathbf{u}$
    - jusqu'à** la tolérance est satisfaite
    - Fin Tandis que**
    - Fixer  $t_j = t_{j+1}$
  - 8: **Fin Pour**
- 

L'algorithme est implémenté dans le logiciel FEniCS [22], qui est basé sur la méthode des éléments finis et permet de résoudre des équations différentielles partielles dans un cadre variationnel. Les paramètres mécaniques et thermiques utilisés dans la simulation numérique sont présentés dans le tableau ci-dessous. 1. La longueur interne  $\ell$  est estimée à partir d'une contrainte critique  $\sigma_c$  variant dans la plage de (180 ~ 240) MPa [15, 19], ce qui conduit à  $\ell$  variant de 0.06 à 0.1 mm en fonction de l'Eq. (4).

TABLE 1 – Paramètres thermiques et mécaniques utilisés dans les simulations numériques

Paramètres	Valeur	Description	Références
$E$	370	le module d'Young [GPa]	[18]
$\nu$	0.3	coefficient de Poisson	[18]
$\Theta$	$7.5 \times 10^6$	coefficient de dilatation thermique [ $K^{-1}$ ]	[18]
$\ell$	0.06 ~ 0.1	la longueur interne [mm]	
$G_c$	$24.3 \times 10^{-3}$	la ténacité [N/mm]	[18]
$k_c$	1	diffusivité thermique [ $mm^2/s$ ]	[18]
$R$	6.5	rayon [mm]	[18]
$T_B$	15	température du bord [ $^{\circ}C$ ]	[18]

---

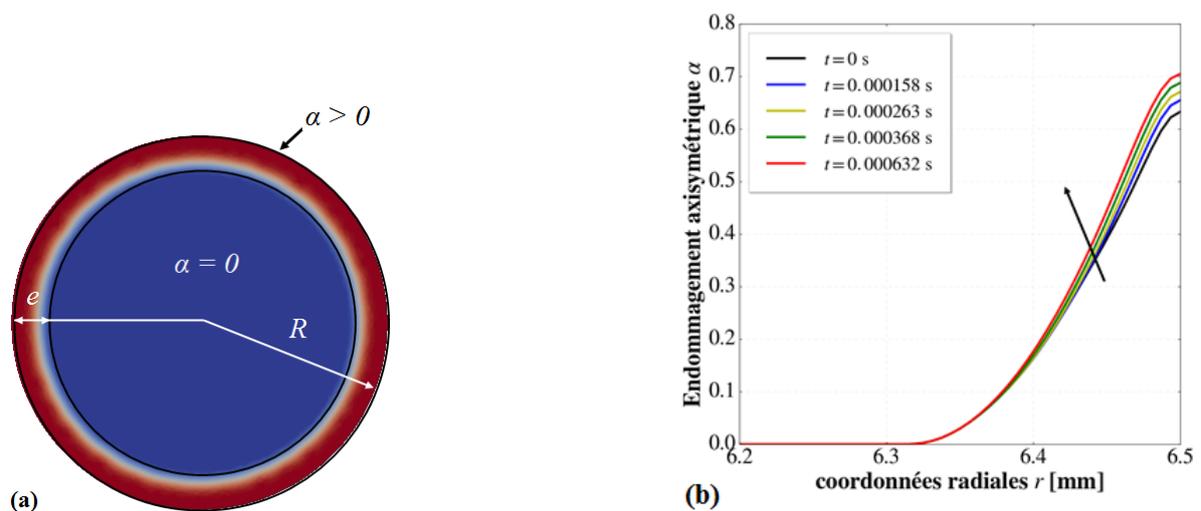
## 5 Résultats numériques

Le processus d'évolution des motifs de fissures dû au choc thermique a été reproduit par des simulations numériques. Dans cette section, nous essayons d'évaluer la formation des motifs de fissures et l'influence des paramètres mécaniques et thermiques tels que la longueur interne  $\ell$  et l'intensité du choc thermique  $\Delta T = T_i - T_B$  sur les phases d'initiation et de propagation des fissures. L'étude sera donc réalisée pour différentes valeurs de  $\ell$  et  $\Delta T$  avec un rayon  $R = 6.5$  mm. L'étude est menée pour  $0 < t < 3$  s. Deux phases d'endommagement peuvent être trouvées dans son processus d'évolution séparées par un temps particulier  $t_b$  :  $0 < t < t_b$ , l'endommagement se développe de manière uniforme, c'est la phase d'endommagement axisymétrique ; pour  $t > t_b$  des fissures apparaissent et se développent, c'est la phase de bifurcation de l'endommagement.

où  $t_b$  est le temps critique à partir duquel il y a une localisation des fissures.

### 5.0.1 Phase axisymétrique

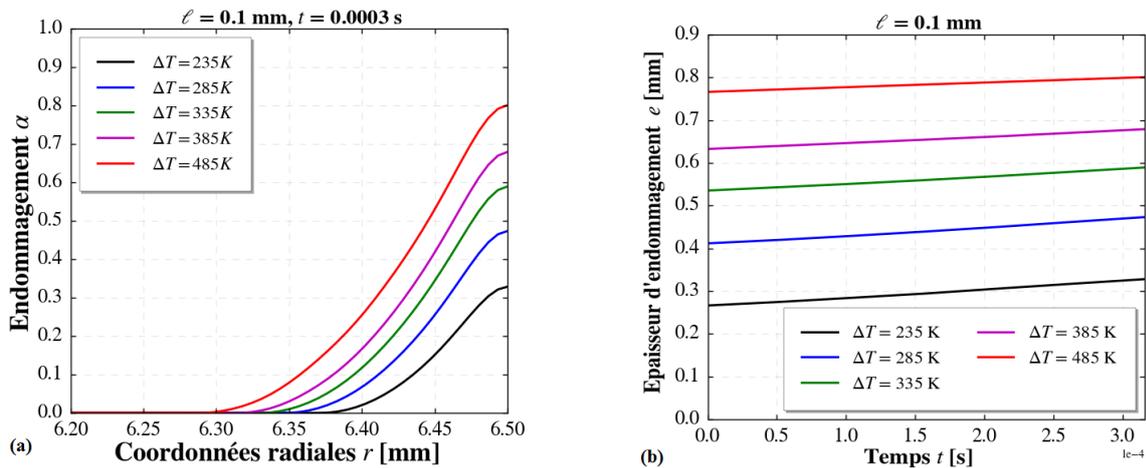
L'endommagement axisymétrique ( $t < t_b$ ) peut se produire au bord du disque avant le processus de fissuration. La taille de la zone d'endommagement et son évolution dépendent de l'intensité du choc thermique  $\Delta T$ . Dans la Fig. (4) (a), nous montrons le profil d'endommagement au niveau de la partie du bord du disque. En général, l'épaisseur de la partie endommagée est très faible et dépend de la valeur du paramètre  $\ell$ . La Fig. (4) (b) illustre l'évolution temporelle de la distribution d'endommagement pendant la phase axisymétrique pour  $\Delta T = 385$  K et pour  $\ell = 0.1$  mm. Comme le choc thermique est un processus très rapide, la température et les champs de déformation au bord de l'éprouvette sont rapidement saturés. Par conséquent, nous pouvons observer que l'endommagement axisymétrique augmente rapidement avec le temps.



**Figure4** – Réponse d'endommagement axisymétrique : (a) un exemple du profil de l'endommagement axisymétrique dans le disque, (b) Évolution temporelle de la solution d'endommagement axisymétriques pour  $\Delta T = 385$  K et  $\ell = 0.1$  mm ;

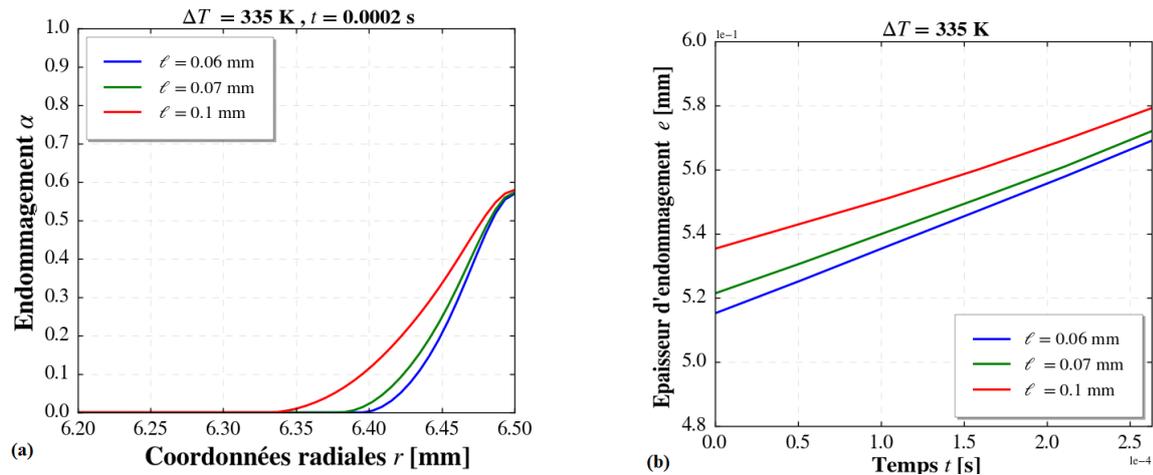
La Fig. (5) montre la dépendance de l'intensité du choc thermique  $\Delta T$  de la solution d'endommagement axisymétrique. À un temps  $t = 0,0003$  s et pour une longueur interne  $\ell = 0.1$

mm, le champ d'endommagement dans la direction radiale  $0 < r < R$  pour cinq intensités de choc thermique  $\Delta T = 250, 235, 285, 335, 358, 458$  K est montré dans la Fig. (5)(a). L'endommagement maximal produit sur la surface latérale où  $r = R$  et augmente avec l'intensité du choc thermique. Comme le montre sur la Fig. (5)(b), l'épaisseur d'endommagement dépend également de l'intensité du choc thermique. Ces Figures montrent clairement que l'intensité du choc thermique  $\Delta T$  est le principal facteur de développement de l'endommagement.



**Figure 5** – (a) Évolution de l'endommagement axisymétrique pour différentes intensités thermiques  $\Delta T$  en [K] à  $t = 0.0003$  s, (b) évolution de l'épaisseur d'endommagement

La Fig. (6) illustre la dépendance de la longueur interne  $\ell$  de la solution d'endommagement axisymétrique. Pour un temps  $t$  et pour une température de choc thermique  $\Delta T$  fixe, le champ d'endommagement le long de la direction radiale  $0 < r < R$  pour trois longueurs internes  $\ell$  est illustré sur la Fig. (6)(a). À partir de la Fig. (6), nous pouvons observer que la valeur maximale de l'endommagement et l'épaisseur de la zone endommagée dépendent de la longueur interne  $\ell$  : elles augmentent lorsque  $\ell$  augmente. Selon l'Eq. (4), la longueur interne  $\ell$  est inversement proportionnelle à la contrainte critique  $\sigma_c$ . En conséquence, à une intensité de choc thermique  $\Delta T$  et à un temps  $t$  fixés, plus la longueur interne  $\ell$  est petite plus l'endommagement se localise au voisinage du bord comme le montre la Fig.(6).

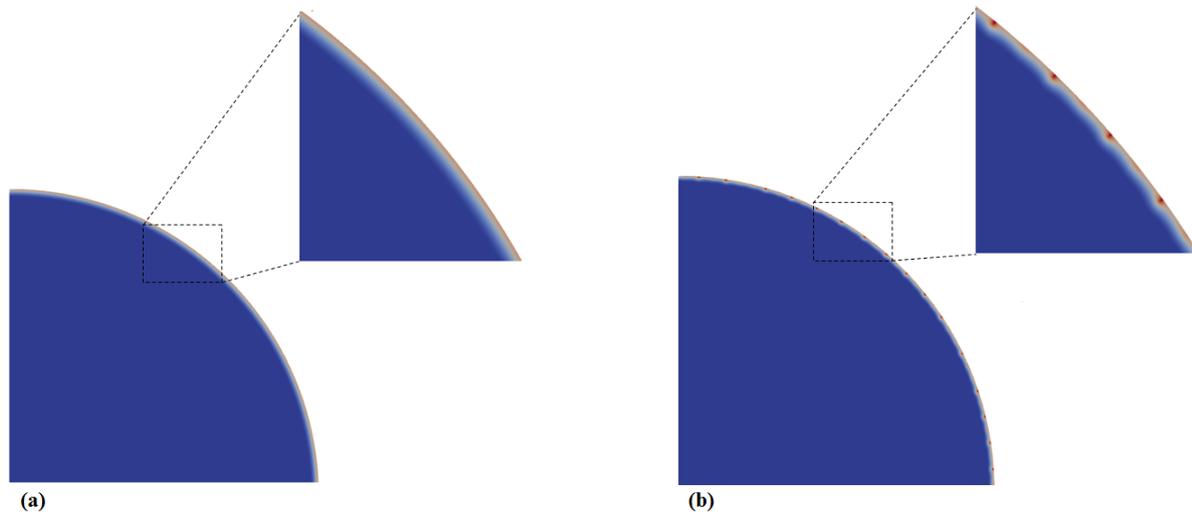


**Figure 6** – (a) Évolution de l’endommagement axisymétrique pour différentes longueurs internes  $\ell$  [mm] à  $t = 0.0002 \text{ s}$ , (b) évolution de l’épaisseur de l’endommagement

### 5.0.2 Bifurcation de la branche fondamentale

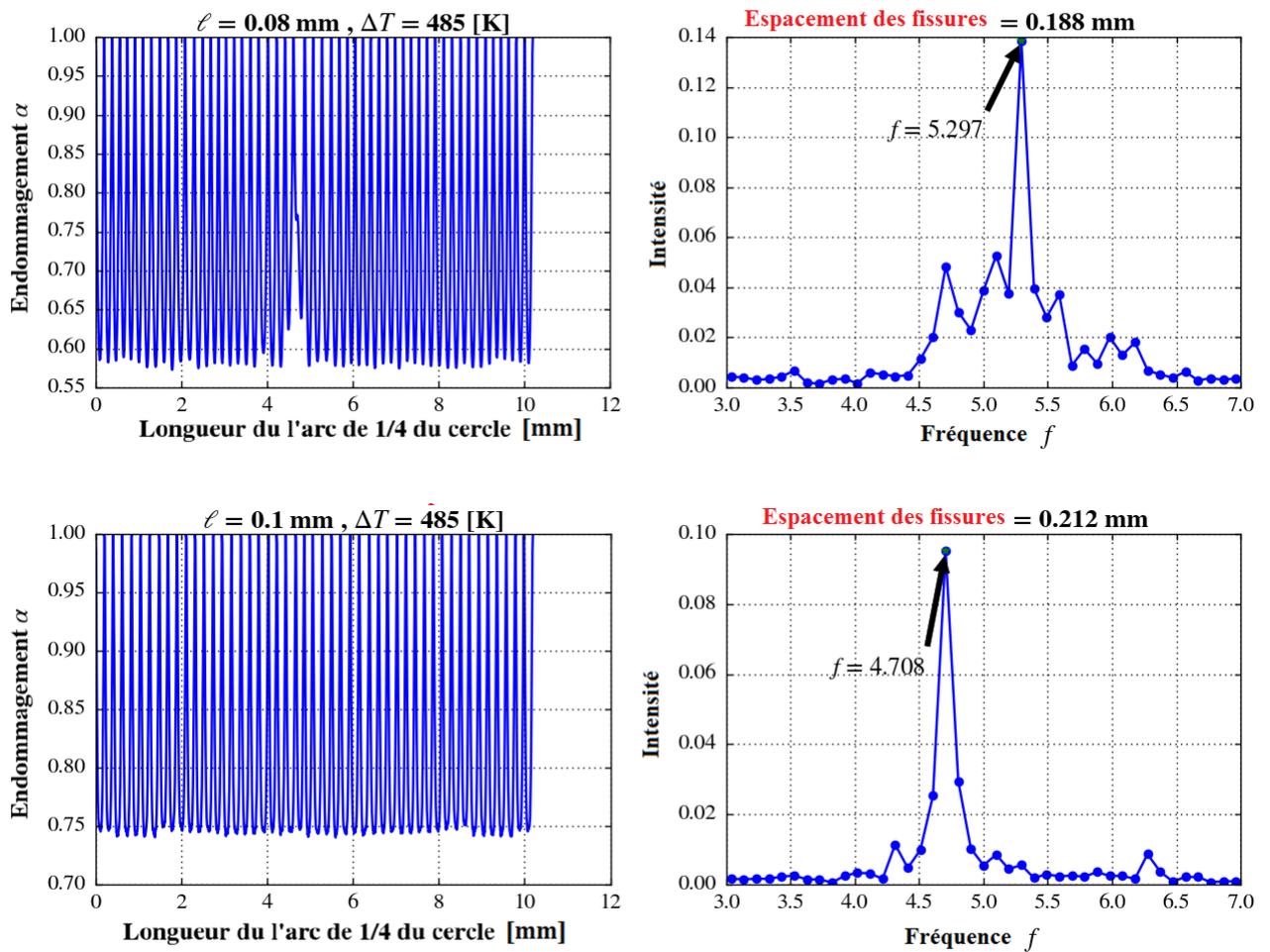
Lorsque la température du choc thermique est inférieure à une température critique  $\Delta T < \Delta T_c$ , les calculs numériques montrent qu’il y a seulement une phase élastique et aucune initiation de fissure n’est observée dans les échantillons. Cependant, lorsque  $\Delta T > \Delta T_c$ , et après un temps très court, le phénomène de bifurcation peut se produire. Les fissures sont initiées presque instantanément. L’influence de différents facteurs sur ce phénomène de bifurcation est discuté ci-après.

La Fig. (7) illustre les résultats de la simulation numérique du champ d’endommagement pour  $\Delta T = 335 \text{ K}$  et pour deux longueurs internes  $\ell = 0.1 \text{ mm}$  et  $\ell = 0.07 \text{ mm}$  à  $t = 0.0006 \text{ s}$ . La Fig. (7) (a) montre que pour  $\ell = 0.1 \text{ mm}$  et à  $t = 0.0006 \text{ s}$ , l’endommagement est toujours dans la phase axisymétrique. Cependant, comme le montre la Fig. (7)(b), une bifurcation de la solution numérique peut être observée pour  $\ell = 0.07 \text{ mm}$  au même instant  $t$ . Nous notons également l’apparition des oscillations angulaires dans le champ d’endommagement, en particulier pour  $r = R$ . En effet, après un certain temps  $t$  et en fonction de la longueur interne  $\ell$ , une distribution périodique d’endommagement peut être observée dans la zone du bord du disque. Ceci indique que la solution numérique a bifurqué de la branche fondamentale qui représente l’endommagement axisymétrique à une branche particulière qui représente le processus de fissuration. La Fig. (7) montre que la longueur interne  $\ell$  a une influence importante sur le temps de bifurcation. En fait, le temps de bifurcation augmente avec l’augmentation de la longueur interne  $\ell$ .



**Figure7** – Champ d’endommagement à  $t = 0.0006$  s et  $\Delta T = 335$  K : pour a)  $\ell = 0.1$  mm et b)  $\ell = 0.07$  mm, un zoom du champ d’endommagement est utilisé pour mieux représenter l’endommagement axisymétrique et la variation angulaire après la bifurcation..

Afin d’évaluer l’influence du paramètre  $\ell$  et  $\Delta T$  sur la bifurcation du champ d’endommagement, nous avons tracé la variation du scalaire  $\alpha$  au bord du disque et le long du périmètre. Des courbes sinusoïdales peuvent être obtenues. Nous pouvons observer que la périodicité n’est pas parfaite. Ces courbes ont été traitées par la méthode de la transformation rapide de Fourier (FFT) afin de déterminer la période dominante  $D$  de la distribution d’endommagement qui représente l’espace entre deux fissures consécutives. Cette méthode est appliquée pour différentes intensités de chocs thermiques et pour différentes longueurs internes. Certains résultats de cette analyse sont présentés dans la Fig. (8).

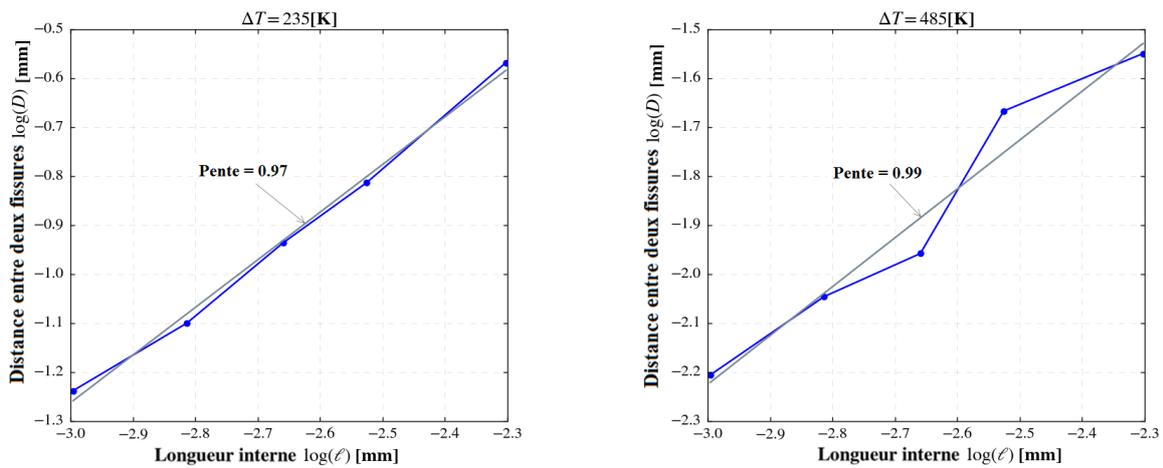


**Figure 8** – Localisation des fissures pour différentes valeurs de  $\ell$  avec  $\Delta T = 485$  K et (a)  $\ell = 0.08$  mm, (b)  $\ell = 0.1$  mm. Le graphique de gauche montre la distribution des dommages le long du périmètre, le graphique de droite montre la distribution de probabilité de la fréquence.  $f = 1/D$

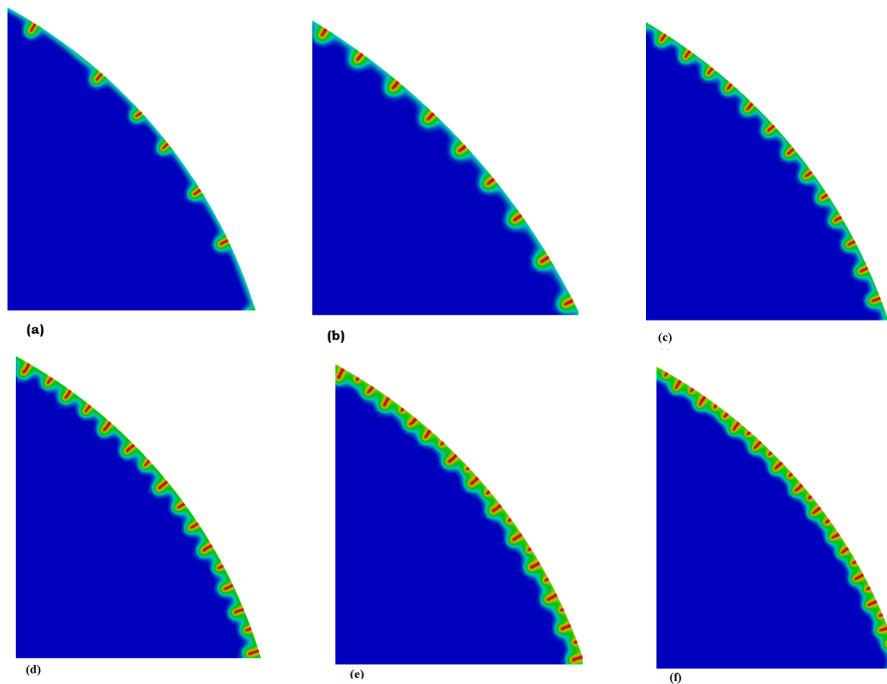
Dans la Fig. (8), nous pouvons observer que la décomposition de la fréquence fournit une fréquence dominante en présence de plusieurs pics plus petits des courbes fréquence-intensité. Pour  $\ell = 0,08$  mm et  $\Delta T = 485$  K, la fréquence la plus dominante est égale à  $f = 5,297$  ce qui donne  $D = 0,188$ mm.

Selon les résultats obtenus, nous avons illustré sur la Fig. (9), la longueur la période en fonction de la longueur caractéristique  $\ell$  pour chaque température d'impact sur une échelle logarithmique. À partir de ces résultats, nous pouvons clairement observer l'influence de la longueur interne  $\ell$  sur la densité des fissures émises suite à un choc thermique : le nombre de fissures diminue lorsque  $\ell$  augmente, indépendamment de l'intensité du choc thermique  $\Delta T$ .

La Fig. (10) montre le schéma de fissuration pour différentes intensités de choc thermique  $\Delta T$  avec une longueur interne fixe  $\ell = 0.07$  mm à  $t = 0.0011$  s. En effet, la figure montre que la densité des fissures augmente avec l'intensité du choc thermique. Afin de vérifier l'influence de l'intensité du choc thermique sur la distance entre deux fissures consécutives, nous avons étudié la distribution de l'endommagement le long du périmètre du disque pour une longueur interne fixe  $\ell$  et pour différentes intensités du choc thermique  $\Delta T$ .

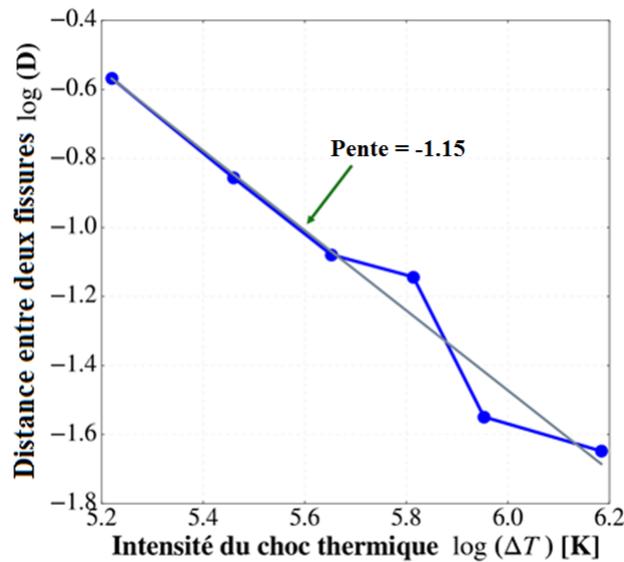


**Figure9** – Distance entre deux fissures consécutives en fonction de la longueur interne  $\ell$  pour, (a)  $\Delta T = 235$  K et (b)  $\Delta T = 485$  K



**Figure10** – Espacement des fissures au stade de l'initiation pour différentes intensités du choc thermique  $\Delta T$  avec  $\ell = 0.07$  mm à  $t = 0.0011$  s, (a)  $\Delta T = 185$  K, (b)  $\Delta T = 235$  K, (c)  $\Delta T = 285$  K, (d)  $\Delta T = 335$  K, (e)  $\Delta T = 385$  K et (f)  $\Delta T = 485$  K

La méthode FFT a été utilisée pour déterminer la période du motif de fissure. Cette dernière diminue avec l'augmentation de l'intensité du choc thermique  $\Delta T$ . Ensuite, nous avons représenté sur la Fig. (11) la longueur d'onde sur une échelle logarithmique en fonction de l'intensité du choc thermique  $\Delta T$ .



**Figure11** – Distance entre deux fissures consécutives en fonction de l’intensité du choc thermique  $\Delta T$  avec  $\ell = 0.07$  mm

Approximativement, la distance moyenne entre deux fissures consécutives peut être exprimé par la relation suivante :

$$D = \mathcal{F} \frac{\ell}{\Delta T} \quad (11)$$

où  $\mathcal{F}$  est un coefficient dépendant uniquement des paramètres du matériau. Les résultats mentionnés ci-dessus montrent que la longueur interne  $\ell$  joue un rôle important dans la phase d’endommagement axisymétrique et dans la phase d’initiation de la fissure. La taille de la zone endommagée, le temps critique de la bifurcation et l’intervalle des fissures consécutives sont tous influencés par la valeur de cette longueur interne  $\ell$ . Bien que, la phase de propagation des fissures est essentiellement contrôlée par l’énergie de rupture  $G_c$  [15], elle ne semble plus suffisante pour décrire précisément les étapes d’endommagement et d’initiation des fissures. Cette dernière doit être étudiée en utilisant deux paramètres parmi  $G_c$ ,  $\sigma_c$  et  $\ell$ .

### 5.0.3 Caractéristiques du modèle des fissures

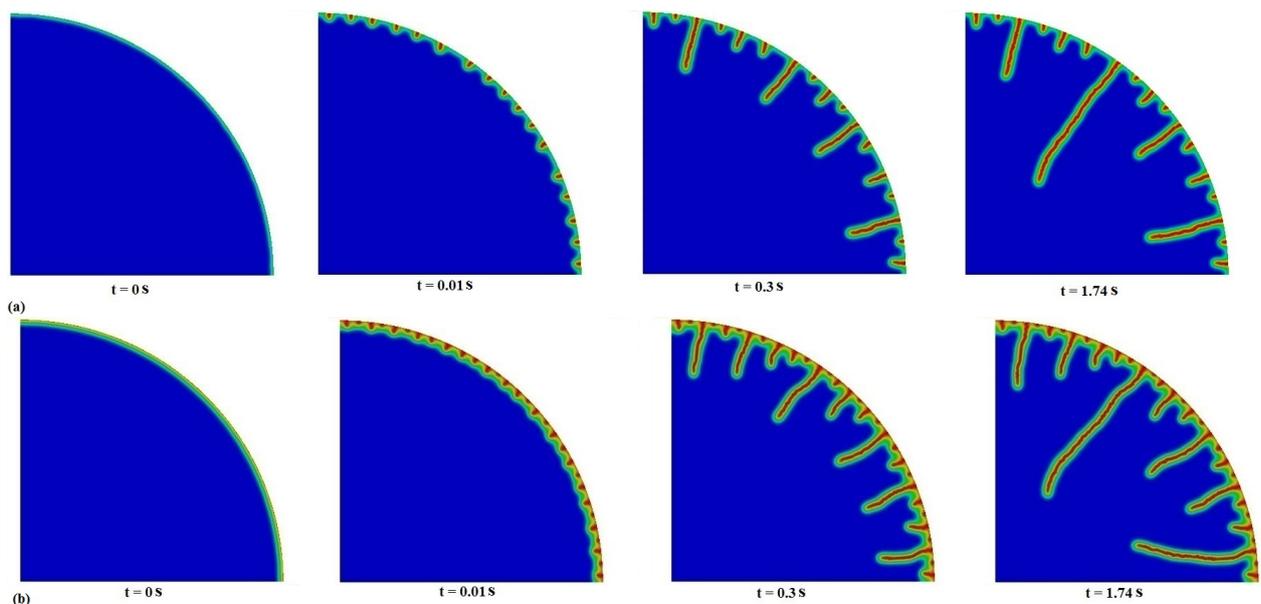
Les motifs de fissures obtenus à l’aide des simulations numériques, en prenant une longueur interne fixe  $\ell = 0.1$  mm, une taille du maillage  $h = 0.05$  mm et un incrément du temps  $dt = 0.005$ , sont illustrées sur la Fig. (12). Ce dernier présente pour différents temps  $t$ , l’évolution des fissures dues à des chocs thermiques de différentes températures. Les caractéristiques périodiques et hiérarchiques des motifs de fissures peuvent être clairement révélées par les simulations numériques. En effet, des fissures multiples sont obtenues pour différentes températures de choc thermique.

Les principales étapes de l’évolution de l’endommagement sont représentées dans la Fig. (12). Au début du refroidissement, une bande d’endommagement axisymétrique se crée sur la surface exposée au choc thermique. Ensuite, la Fig. (12) (Phase 2), montre que certaines fissures sont initiées à la surface de l’échantillon en contact avec l’eau à  $t = 0.01$  s, ce qui est induit

par le fort gradient thermique. C'est la phase de bifurcation ou l'apparition d'un réseau de fissures, réparti périodiquement émanant du bord du cylindre. En effet, la Fig. (12) (a)(Phase 2), présente la phase de localisation de l'endommagement qui se termine par la construction d'une fissure. Nous pouvons également observer sur la Fig. (12) (a)(Phase 2), que les fissures dues au choc thermique, qui sont des fissures de traction, sont perpendiculaires au bord du cercle et pointent vers le centre. Lorsque le front de refroidissement pénètre plus profondément  $t = 0.3s - 1.74s$ , certaines fissures formées initialement cessent de croître tandis que d'autres continuent à se propager Fig. (12) (a)(Phase 3). La dernière phase, est la phase de l'arrêt des fissures Fig. (12)(a) (Phase 4).

Le processus de la fissuration thermique peut être obtenu lorsque la température de la trempe des éprouvettes est égale à  $\Delta T = 285K, 485K$  comme le montre la Fig. (12)(a) et (b). En effet, initialement, à un temps critique, les fissures apparaissent sur le bord avec un espacement presque égal, puis elles se propagent à l'intérieur des structures rapidement et uniformément. Ensuite, la vitesse de propagation diminue progressivement jusqu'à ce que certaines d'entre elles cessent de croître. Seule une partie des fissures continuent à se propager avec un doublement approximatif de la période, de sorte que l'espacement des fissures augmente.

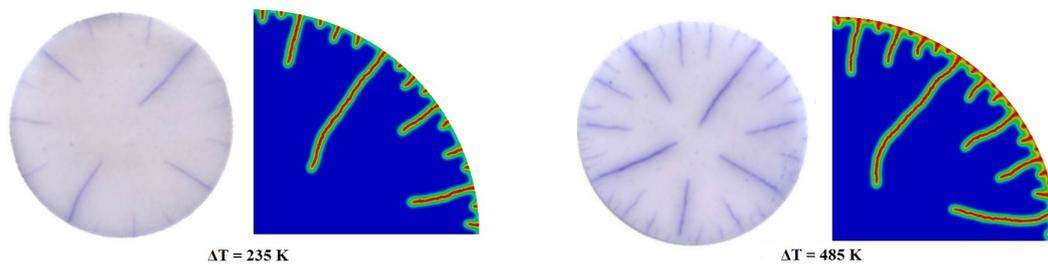
La Fig. (12) montre que la distance entre deux fissures diminue lorsque la température de la structure augmente. De plus, une structure hiérarchique des fissures avec plusieurs niveaux de longueur peut être observée dans les modèles de fissures finaux. Ces caractéristiques hiérarchiques de l'espacement et de la longueur des fissures sont causées par les multiples fissures en interaction. Nous pouvons remarquer que les fissures les plus longues continuent à se propager lorsque l'intensité du choc thermique augmente. Ces caractéristiques se retrouvent dans la plupart des essais de trempe des matériaux céramiques.



**Figure12** – Modèles de fissures pendant le processus de trempe pour différentes intensités de choc thermique (a)  $\Delta T = 235 K$ , (b)  $\Delta T = 485 K$

#### 5.0.4 Comparaison avec les expériences

Afin de réaliser une comparaison avec les expériences, l'ensemble du processus de fissuration a été simulé pour différentes intensités de choc thermique avec une longueur interne fixe  $\ell = 0.1$  mm et une taille du maillage  $h = 0.05$  mm. La Fig. (13) présente la comparaison entre les modèles de fissures finaux obtenus expérimentalement et numériquement. Les résultats indiquent que plusieurs fissures sont initiées à partir du bord et se propagent ensuite dans la structure. Nous pouvons observer que les motifs de fissures de choc thermique obtenus à partir des simulations numériques sont bien en accord avec les observations expérimentales [18].



**Figure 13** – Comparaison des modèles de fissures de choc thermique finales à différentes températures de choc thermique obtenus à partir des essais numériques et des observations expérimentales [18].

Les résultats de la simulation numérique montrent que de nombreux fissures thermiques sont introduites sur le bord des éprouvettes circulaires en céramiques et se propagent vers le centre des échantillons. Les cheminements de croissance des fissures obtenus par les simulations numériques et par les essais expérimentaux sont similaires. La structure hiérarchique et périodique des motifs de fissures présenté dans les expériences est fidèlement reproduite au moyen des simulations numériques. En effet, le modèle numérique proposé a la capacité de capturer les fissures multiples périodiques et hiérarchiques des solides fragiles dans les essais de trempe.

De même, les différents motifs de fissures dues au choc thermique de cinq échantillons, montrent que le nombre de fissures thermiques augmente avec l'augmentation de la température de la trempe comme le montre la Fig. (13). Nous pouvons également constater, que le nombre total de fissures obtenu par les simulations numériques est légèrement supérieur à celui observé dans les expériences. Cette légère différence peut s'expliquer par le fait que les conditions aux limites réelles ne sont pas exactement appliquées dans le modèle numérique. En effet, comme la condition aux limites de type Dirichlet est utilisée à la place de la condition aux limites de convection thermique, le flux de chaleur à la limite est surestimé de sorte que le nombre calculé de fissures courtes est plus grand que celui observé dans les expériences. Ces fissures courtes sont très rapidement arrêtées pendant la propagation. Par conséquent, le nombre de fissures plus longues est presque le même que dans les échantillons testés.

Afin d'analyser la structure hiérarchique des motifs de fissures, nous pouvons distinguer un phénomène particulier selon lequel la longueur des fissures suite à des essais de trempe peut être

répartie en différents niveaux. Nous pouvons remarquer qu'il existe trois niveaux hiérarchiques différents, classés en fonction de leurs longueurs, à savoir les fissures courtes ( $< 1.5$ ) mm, les fissures moyennes ( $1.5 \sim 3.5$ ) mm et les fissures longues  $> 3.5$  mm.

TABLE 2 – Longueur des fissures : comparaisons entre expériences et simulations [mm]

	Longueur courte $P1$			Longueur moyenne $P2$			Longueur longue $P3$		
	Essai		Simulation	Essai		Simulation	Essai		Simulation
	moyenne	erreur		moyenne	erreur		moyenne	erreur	
$\Delta T = 235$ K	1.28	$\pm 0.32$	1.47	2.35	$\pm 0.45$	2.04	4.05	$\pm 0.5$	4.37
$\Delta T = 285$ K	1	$\pm 0.4$	0.96	2.2	$\pm 0.35$	2.37	4.9	$\pm 0.2$	4.55
$\Delta T = 335$ K	0.8	$\pm 0.17$	0.81	2.45	$\pm 1.15$	2.46	5	$\pm 0.2$	4.83
$\Delta T = 385$ K	0.75	$\pm 0.11$	0.78	2.35	$\pm 1.15$	2.8	5.2	$\pm 0.35$	5.18
$\Delta T = 485$ K	0.6	$\pm 0.2$	0.63	2.25	$\pm 1.15$	3.28	5.15	$\pm 0.45$	5.31

La Tab. (2) compare les longueurs moyennes des trois classes de fissures obtenues à partir des simulations avec les résultats expérimentaux. Les longueurs des fissures courtes, moyennes et longues prédites par les simulations numériques sont en bon accord avec celles observées dans les expériences. De plus, on peut remarquer que lorsque l'intensité du choc thermique augmente, les fissures longues et moyennes deviennent plus longues et les fissures courtes plus courtes. Le modèle numérique proposé permet alors de prédire la plupart des caractéristiques des motifs de fissures des échantillons de céramique soumis au choc thermique, et montre un accord global avec les expériences. En résumé, nous pouvons noter qu'il est très difficile d'observer expérimentalement l'initiation et la croissance des fissures dans un matériau soumis au choc thermique. Par conséquent, la méthode numérique proposée peut être une bonne alternative pour évaluer l'initiation et la croissance rapide des fissures dans des conditions de choc thermique. En outre, la méthode numérique proposée peut fournir des informations supplémentaires pour comprendre les mécanismes de fracture des matériaux soumis au choc thermique.

## 6 Conclusions

Dans cet article, un modèle d'endommagement variationnel a été proposé pour prédire l'initiation et la propagation des fissures dans un disque en céramique soumis à un choc thermique. L'implémentation du modèle d'endommagement dans un code d'éléments finis fournit une solution numérique précise et efficace pour la prédiction de la formation et de la propagation

des fissures. En se basant sur les résultats numériques obtenus, on peut tirer les conclusions suivantes faites :

1. L'ensemble du processus de fissuration d'une éprouvette en céramique pendant l'essai de trempe, de la phase d'endommagement axisymétrique à la phase de propagation de la fissure, peut être simulé à l'aide du modèle numérique variationnel proposé.
2. Sur la base du modèle de gradient d'endommagement, des simulations numériques ont été développées pour étudier l'évolution des modèles de fissures pendant le processus de choc thermique. Le champ de température est obtenu en utilisant une solution analytique. La condition limite de chaleur conduit à une valeur maximale de la contrainte à la surface exposée au choc thermique. Le champ de contrainte est obtenu par la méthode des éléments finis.
3. L'analyse numérique de l'endommagement montre l'existence de deux phases de rupture. La première phase est une phase de dommage uniforme sur la surface du choc. La deuxième phase décrit la propagation de la fissure, caractérisée par la formation d'une fissure lorsque le paramètre d'endommagement est atteints.
4. En utilisant ce modèle de gradient d'endommagement, les simulations numériques peuvent reproduire le processus d'évolution des modèles de fissures sous choc thermique. Les résultats obtenus ont été validés en les comparant aux résultats expérimentaux sous des intensités de chocs thermiques.
5. Les résultats numériques fournissent des modèles périodiques et hiérarchiques de fissures dues au choc thermique qui varient avec la température du choc thermique. En effet, les principales caractéristiques des motifs de fissures sont reproduites. Il a été démontré que plus l'intensité du choc thermique est élevée, plus les fissures sont nombreuses. Ensuite, la distance entre deux fissures consécutives est évaluée.
6. Les résultats numériques montrent que la longueur interne  $\ell$  joue un rôle important dans la phase d'endommagement axi-symétrique et dans la phase d'initiation de la fissure. la longueur interne  $\ell$  (qui peut être liée à la contrainte de rupture critique  $\sigma_c$  et la résistance à la rupture  $G_c$ ) peut être utilisé comme un paramètre du matériau pour mieux décrire l'ensemble du processus de fissuration des céramiques pendant un choc thermique.

## Références

- [1] N.P Padture, M. Gell , E. H Jordan, Thermal barrier coatings for gas-turbine engine applications. *Materials Science*, 296 (5566) (2002) 280–284.
- [2] S. R. Levine , E. J. Opila , M. C. Halbig , J. D. Kiser , M. Singh , J. A. Salem, Evaluation of ultra-high temperature ceramics for aeropropulsion use, *Journal of the European Ceramic Society*, 22 (14-15) (2002) 2757–2767.
- [3] B. Bourdin , J.J. Marigo , C. Maurini , P. Sicsic, Morphogenesis and propagation of complex cracks induced by thermal shocks. *Physical Review Letters*, 112(1) (2014) 0143011–0143015.
- [4] A. Bohm , S. Dudczig , J. Fruhstorfer , A. Mertke , C. G. Aneziris , J. Malzbender, Thermal shock and thermo-mechanical behavior of carbon-reduced and carbon-free refractories, *Journal of Ceramic Science and Technology*, 73(5) (2016) 155–164.

- [5] C.J. Cyron , J. J. Marigo , P. Sicsic , Cohesive model approach to the nucleation and propagation of cracks due to a thermal shock. *International Journal of Fracture*, 187 (2014) 51–75.
- [6] R. Danzer , T. Lube , P. Supancic , R. Damani, Fracture of ceramics. *Advanced Engineering Materials*, 10 (4) (2008) 275–298.
- [7] Y. S. Daniel, Laminar Convective Boundary Layer Slip Flow over a Flat Plate using Homotopy Analysis Method, *Journal of The Institution of Engineers*, 97 (2016) 115–121.
- [8] P. D’Antuono , M. Morandini, Thermal shock response via weakly coupled peridynamic thermo-mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 129 (2017) 74–89.
- [9] N. Ferro, S. Micheletti , S. Perotto, Anisotropic mesh adaptation for crack propagation induced by a thermal shock in 2D, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 331 (2018) 138–158.
- [10] G. A. Francfort, J. J. Marigo, Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8) (1998) 1319–1342.
- [11] I. N. Giannakeas , T. K. Papathanasiou , H. Bahai, Simulation of thermal shock cracking in ceramics using bond-based peridynamics and FEM. *Journal of the European Ceramic Society*, 38(8) (2018) 3037–3048.
- [12] D. P. H. Hasselman, Elastic energy at fracture and surface energy as design criteria for thermal shock, *Journal of the American Ceramic Society*, 46(11) (1963) 535–540.
- [13] D. P. H. Hasselman, Unified theory of thermal shock fracture initiation and crack propagation in brittle ceramics. *Journal of the American Ceramic Society*, 52(11) (1969) 600–604.
- [14] D. He , D. Huang , D. Jiang , Modeling and studies of fracture in functionally graded materials under thermal shock loading using peridynamics, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 111(1) (2021) 102–852.
- [15] C. P. Jiang, X. F. Wu, J. Li , F. Song , Y. F. Shao , X. H. Xu, P. Yan, A study of the mechanism of formation and numerical simulation of crack patterns in ceramic subjected to thermal shock, *Acta Materilia* 60(11) (2012) 4540–4550.
- [16] A. Kawasaki , R. Watanabe, Thermal shock and Thermal Fatigue Behavior of Advanced Ceramics/ Thermal Shock Fracture Mechanism of Metal. *Ceramic Functionally Gradient Materials*, pringer Science Busniss Media, B.V. (1993) 241.
- [17] W. D. Kingery, Factors affecting thermal stress resistance of ceramic material, *Journal of the American Ceramic Society* 38(1) (1955) 3–15.
- [18] Y. Liu, X. Wu , Q. Guo , C. P. Jiang , F. Song, J. Li, Experiments and numerical simulations of thermal shock crack patterns in thin circular ceramic specimens, *Ceramics International* 41(1) (2015) 1107–1114.
- [19] J. Li , F. Song , C. P. Jiang, Direct numerical simulations on crack formation in ceramic materials under thermal shock by using a non-local fracture model, *Journal of the European Ceramic Society* 33 (13-14) (2013) 2677–2687.
- [20] J. Li, F. Song , C. P. Jiang, A non-local approach to crack process modeling in ceramic materials subjected to thermal shock, *Engineering Fracture Mechanics* 133(13-14) (2015) 85–98.

- [21] T. Li , R. Abdelmoula, Gradient damage analysis of a cylinder under torsion : Bifurcation and size effects, *Journal of Elasticity* 143(2) (2021) 209–237.
- [22] A. Logg , K. A. Mardal , G. Wells (Editors) (2012), *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method : The FEniCS Book*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 84(5) (2012) 85–95.
- [23] T. Menouillard , T. Belytschko, Analysis and computations of oscillating crack propagation in a heated strip, *International Journal of Fracture*, 167(1) (2011) 57–70.
- [24] W. E. Pompe , *Thermal Shock Behavior of Ceramic Materials Modelling and Measurement*. In : Schneider GA, Petzow G(Editors), *Thermal shock and thermal fatigue behavior of advanced ceramics*, 241 (1993) 3–14.
- [25] K. Pham , H. Amor , J. J. Marigo , C. Maurini, Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture. *International Journal of Damage Mechanics* 20(4) (2011) 618–652.
- [26] K. Pham K, J. J. Marigo, The variational approach to damage : I. The foundations. *Comptes Rendus Mécanique* 338(4) (2010) 191–198.
- [27] K. Pham , J. J. Marigo, The variational approach to damage : II. The gradient damage models, *Comptes Rendus Mécanique* 338(4) (2010) 199–206.
- [28] K. Pham , J. J. Marigo, From the onset of damage to rupture : construction of responses with damage localization for a general class of gradient damage models. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 25 (2013) 147–171.
- [29] L. F. Ricardo LF, D. Leguillon , G. Parray , A. Doitrand, Modeling the thermal shock induced cracking in ceramics, *Journal of the European Ceramic Society* 40(1) (2020) 1513–1521.
- [30] P. Sicsic , J. J. Marigo , C. Maurini, Initiation of a periodic array of cracks in the thermal shock problem : a gradient damage modeling, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 63 (2014) 256–284.
- [31] S. B. Tang , H. Zhang , C. A. Tang , Y. H. Liu , Numerical model of the cracking behavior of heterogeneous brittle solids subjected to thermal shock. *International Journal of Solids and Structures*, 80 (2016) 520–531.
- [32] Y. T. Wang , X. P. Zhou , M. M. Kou, An improved coupled thermo-mechanic bond-based peridynamic model for cracking behaviors in brittle solids subjected to thermal shocks, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 73 (2019) 282-305.

## Annexe

### Champ de température

Nous avons imposé instantanément au temps  $t = 0$ , une température  $T_B$  de surface du côté  $r = R$ , et nous avons désigné par  $T = T(r, t)$  la température au temps  $t$ . La distribution de la température à l'intérieur du corps est régie par l'équation de la chaleur dans un cylindre, nous avons supposé que l'évolution d'endommagement n'influence pas le champ de température. Pour  $t \geq 0$ , nous écrivons les équations de transfert de chaleur et les conditions aux limites thermiques comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{k_c} \frac{\partial T}{\partial t} & \text{dans } \Omega \\ T(r, t = 0) = T_i & \text{dans } \Omega \\ T(r = R, t) = T_B \quad \forall t > 0 \\ \Delta T = T_i - T_B & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

On adopte ici la condition aux limites de type Dirichlet. Dans le cas où le coefficient de transfert de chaleur est suffisamment grand, comme dans le présent essai de trempe, la condition aux limites de type Dirichlet est un choix simple et précis. Une nouvelle variable  $T^* = T - T_B$  est ensuite introduit dans l'Eq. (A.12), les conditions initiales et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} T^*(r, t = 0) = T_i - T_B, & \text{dans } \Omega \\ T^*(r = R, t) = 0, \quad \forall t > 0 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

La température peut être décomposée en un produit de fonctions en, forme séparable  $T^*(r, t) = X(r)Y(t)$ . Nous obtenons alors le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$Y'(t) = -k_c \lambda^2 Y(t), \quad X''(r) + \frac{1}{r} X'(r) + \lambda^2 X(r) = 0, \quad (\text{A.14})$$

où  $\lambda$  est une constante car les deux fonctions X et Y sont indépendantes. En intégrant les équations ci-dessus, on obtient :

$$Y(t) = A \exp(-k_c \lambda_n^2 t), \quad X(r) = B J_0(\lambda r) + C Y_0(\lambda r)$$

where  $J_0$  est la fonction de Bessel de première espèce non modifiée d'ordre 0,  $Y_0$  est la fonction de Bessel de 2<sup>nd</sup> espèces non modifiées de l'ordre 0, et où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des constantes arbitraires.  $\lambda_n$  sont les nombres caractéristiques du problème.

Nous pouvons en déduire que les solutions de l'Eq. (A.12) ont la forme suivante :

$$T^*(r, t) = A \exp(-k_c \lambda_n^2 t) [B J_0(\lambda r) + C Y_0(\lambda r)] \quad (\text{A.15})$$

On sait que parmi les principales propriétés des fonctions de Bessel que,  $Y_0(0) = -\infty$  qui requiert  $C = 0$ . En utilisant l'équation limite  $T^*(R, t) = 0, \forall t > 0$ , nous obtenons  $J_0(\lambda_n R) = 0$ .  $J_0(\lambda_n r)$  sont les fonctions caractéristiques ou spécifiques du problème.

Le théorème de superposition des solutions nous permet d'écrire la solution générale de l'Eq.

(A.12) sous la forme de :

$$T^*(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n \exp(-k_c \lambda_n^2 t) J_0(\lambda_n r) \quad (\text{A.16})$$

Nous multiplions chaque membre de l'équation par  $r J_0(\lambda_n r)$  et ensuite l'intégrer entre 0 et R. En utilisant l'orthogonalité de  $J_0(\lambda_n r)$  et la propriété de la fonction de Bessel :

$$\int_0^R J_0(\lambda_n r) r J_0(\lambda_m r) dr = 0, \quad \text{for } n \neq m, \quad \int_0^R r [J_0(\lambda_n r)]^2 dr = \frac{R^2}{2} [J_1(\lambda_n R)]^2 \quad (\text{A.17})$$

$$\int_0^R r J_0(\lambda_n r) dr = \frac{R}{\lambda_n} J_1(\lambda_n R)$$

et en utilisant la relation  $T^* = T - T_B$ , la solution de l'Eq. (A.12) se lit :

$$T(t, r) = T_B + \sum_{n=1}^N \frac{2(T_i - T_B) J_0(\lambda_n r) \exp(-k_c \lambda_n^2 t)}{\lambda_n R J_1(\lambda_n R)} \quad (\text{A.18})$$

où  $J_1$  est la fonction de Bessel de première espèce non modifiée d'ordre 1. Le champ de déformation thermique  $\varepsilon^{th}$  est donné par :  $\varepsilon^{th} = \Theta(T(t, r) - T_i) \mathbf{I}$  où  $\Theta$  et  $\mathbf{I}$  représentent, respectivement, le coefficient de dilatation thermique du matériau et le tenseur d'identité. En conséquence, les champs thermiques et élastiques se lisent comme suit :

$$\varepsilon^{th} = \varepsilon^{th}(t, r) = \Theta(T_B - T_i) \left( 1 - \sum_{n=1}^N \frac{2J_0(\lambda_n r) \exp(-\lambda_n^2 k_c t)}{\lambda_n R J_1(\lambda_n R)} \right) \mathbf{I}, \quad \varepsilon^e(t, r) = \varepsilon(\mathbf{u})(t, r) - \varepsilon^{th}(t, r) \quad (\text{A.19})$$

où  $\varepsilon(\mathbf{u})(t, r)$  est la partie symétrisée du gradient de  $\mathbf{u}(t, r)$ .