HAL open science

Impacts de l'hypothèse de vitesse de rotation constante dans l'analyse et la modélisation du comportement de machines tournantes

Adeline Bourdon, Didier Remond

▶ **To cite this version:**

Adeline Bourdon, Didier Remond. Impacts de l'hypothèse de vitesse de rotation constante dans l'analyse et la modélisation du comportement de machines tournantes. 25e Congrès Français de Mécanique, Nantes, 29 août-2 septembre 2022, Aug 2022, Nantes, France. hal-04280077

HAL Id: hal-04280077

https://hal.science/hal-04280077v1

Submitted on 10 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Impacts de l'hypothèse de vitesse de rotation constante dans l'analyse et la modélisation du comportement de machines tournantes

A. BOURDON[a], D. RÉMOND[a]

[a] Univ Lyon, INSA Lyon, CNRS, LaMCoS, UMR5259, 69621 Villeurbanne, France
adeline.bourdon@insa-lyon.fr / didier.remond@insa-lyon.fr

Résumé :

Sur la base de simulations maîtrisées d'un modèle simple comportant deux degrés de liberté, on montre que les hypothèses sur la vitesse de rotation et la nature des excitations externes conduisent à des réponses qui doivent être analysées avec une extrême précaution. Les spectres en fréquences naturelles (Hz), en ordres et en fréquences angulaires (ev/tr) présentent des composantes harmoniques ou sous harmoniques dont les amplitudes peuvent varier en fonction des fluctuations de vitesse qu'induisent ces excitations externes. On montre ainsi qu'une excitation cyclique n'est pas identique à une excitation harmonique et qu'une analyse en ordre n'est pas équivalente à une analyse en fréquences angulaires. Il est primordial de bien prendre en compte les fluctuations de vitesse pour décrire correctement une excitation cyclique d'une part et pour rééchantillonner le signal d'intérêt d'autre part, en vue d'une analyse pertinente soit en fréquences naturelles soit en fréquences angulaires. On montre par ailleurs que la localisation des contenus spectraux peut également être affectée, souvent interprétée à tort comme du glissement affectant la loi cinématique des composants technologiques générateurs d'excitation cyclique.

Abstract:

On the basis of controlled simulations of a simple model with two degrees of freedom, it is shown that assumptions about the speed of rotation and the nature of external excitations lead to responses that must be analysed with extreme care. The spectra in natural frequencies (Hz), orders (ev/rev) and angular frequencies (ev/rev) show harmonic or sub-harmonic components whose amplitudes can vary according to the speed fluctuations induced by these external excitations. It is thus shown that a cyclic excitation is not identical to a harmonic excitation and that an analysis in order is not equivalent to an analysis in angular frequency. It is essential to take rotation speed fluctuations into account in order to correctly describe a cyclic excitation on the one hand and to resample the signal of interest on the other hand, with a view to a relevant analysis either in natural or angular frequencies. It is also shown that the positioning of spectral contents can also be affected, often wrongly interpreted as slip phenomena affecting the kinematic law of the technological components generating cyclic excitation.

Mots clefs : Machine tournante, Géométrie cyclique, Vitesse de rotation, Excitation harmonique, Excitation cyclique, Analyse fréquentielle, Modèle numérique

1. Introduction

Comme tous les systèmes mécaniques, les machines tournantes sont soumises à des excitations périodiques lors de leur fonctionnement. Ces excitations proviennent de la machine elle-même mais également des dispositifs périphériques tels les moteurs et les dispositifs de charge. Pour les machines tournantes, ces excitations sont très souvent liées à la rotation d'éléments présentant des géométries discrètes périodiques (roulements, engrenages, turbines, …). Ces excitations sont donc caractérisées par des fréquences qui évoluent avec la vitesse de rotation, on parle alors d'excitations cycliques par opposition aux excitations harmoniques associées à une fréquence constante, par exemple le 50Hz du réseau électrique. Une première description plus détaillée de ces différents types d'excitation peut être trouvée dans [1].

La compréhension et la maitrise de ces excitations sont nécessaires pour assurer la fiabilité au sens large de ces machines. Ces étapes passent par la réalisation de modèles numériques mais également par l'analyse de signaux expérimentaux. La très grande majorité des modèles, mais également des analyses expérimentales, s'appuient sur l'hypothèse que la vitesse de rotation est parfaitement constante et que, pour cette vitesse de rotation, l'excitation cyclique peut être remplacée par une excitation harmonique équivalente. Cela revient à considérer que la rotation de composants présentant une géométrie cyclique conduira à l'apparition d'excitations de type "effort" source de vibrations mais n'aura aucun impact sur la vitesse de rotation, c'est-à-dire qu'elle ne génère aucun couple. Dans de nombreux dispositifs cette hypothèse est largement discutable : un moteur thermique par exemple peut générer des variations de couple allant jusqu'à 50% du couple nominal.

L'objectif de ce papier est de lever l'hypothèse de vitesse de rotation parfaitement constante et de mettre en évidence les couplages qui apparaissent naturellement entre des fluctuations de vitesse de rotation et des accélérations vibratoires provoquées par une excitation cyclique. On considéra un fonctionnement en régime stationnaire défini par la présence de fluctuations de vitesse autour d'une vitesse nominale constante. On s'appuiera pour cela sur un modèle phénoménologique très simple à 2 ddl : un ddl de rotation associé à une inertie et un ddl de déplacement transverse associé à une masse et une rigidité. On s'assurera de conserver des valeurs réalistes des différents paramètres en particulier pour les valeurs des coefficients d'amortissement. On s'intéressera à des outils d'analyse classiques tels les spectres en fréquences. On distinguera les spectres en fréquences naturelles exprimées en Hertz obtenus à partir de Transformée de Fourier (FFT) du signal échantillonné en temps, les spectres en ordres où les abscisses du précédent spectre sont adimensionnées en divisant les fréquences naturelles par la fréquence de rotation moyenne de l'arbre, et les spectres en fréquences angulaires exprimées en évènements par tour et obtenus par le calcul de la FFT du signal échantillonné en angle. Ces différents spectres ne sont pas identiques. On montrera en particulier que la présence d'une excitation cyclique monofréquence conduit à l'apparition de raies fréquentielles multiples de cette fréquence dans les spectres en fréquences angulaires mais également en ordres. Ces raies n'apparaissent pas si l'excitation est modélisée par une excitation harmonique de fréquence équivalente. On montrera également que la présence de fluctuations de vitesse peut conduire à un décalage des ordres associés à l'excitation. D'un point de vue expérimental, ce décalage pourrait être interprété à tort comme un glissement de la fréquence d'excitation. Enfin, on verra que l'évolution, en fonction de la vitesse de rotation nominale, de l'amplitude des accélérations radiales du système soumis à une excitation cyclique en couple et en effort peut présenter deux maxima : l'un logiquement à la vitesse critique associée au mode propre du système masse-ressort, mais également un second, d'amplitude plus faible, à 50% de cette vitesse critique.

2. Définition du modèle

2.1. Mise en équations, résolution, analyse en fréquences

On considère un système à deux degrés de liberté (ddl), une translation x et une rotation θ. Ce système est constitué d'un disque en acier, de diamètre d, largeur b, de masse M et d'inertie I, tournant à la vitesse $\Omega = \dot{\theta}$. L'inertie est soumise à un couple moteur C_m, à un couple de charge C_r et à un couple d'amortissement visqueux $-\alpha_\theta \Omega$. La masse est soutenue par un support de raideur K_x associé à un amortissement α_x. Des excitations harmoniques de fréquence f_{Hz} et/ou cycliques de fréquence $f_{ev/tr}$ en couple d'amplitude a_c et b_c et en effort, d'amplitude a_F et b_F seront également introduites sous forme de perturbations externes.

Les équations du mouvement sont alors de la forme

$$(1) \qquad I.\ddot{\theta} = C_m - C_r - \alpha_\theta \dot{\theta} + a_c.\sin(2.\pi.f_{Hz}.t) + b_c.\sin\left(f_{ev/tr}.\theta\right)$$

$$= C_m - C_r - \alpha_\theta \dot{\theta} + C_p(t,\theta)$$

$$(2) \qquad M.\ddot{x} = -\alpha_x \dot{x} - K_x.x + a_F.\sin(2.\pi.f_{Hz}.t) + b_F.\sin\left(f_{ev/tr}.\theta\right)$$

$$= -\alpha_x \dot{x} - K_x.x + F_p(t,\theta)$$

Dans cette approche $\theta(t)$ est la position angulaire instantanée du disque et $\Omega(t)$ est la vitesse de rotation réelle qui ne correspond pas à des petites variations autour d'une position moyenne. On notera également que dans ce modèle la vitesse de rotation est indépendante des déplacements radiaux, il n'y a pas de terme en x ou ses dérivés dans l'équation (1). Dans un dispositif plus complexe, comme par exemple une transmission par engrenage, des couplages entre les accélérations angulaires $\ddot{\theta}$ et les déplacements et vitesses radiaux pourraient apparaitre.

Il faut noter que bien que l'on considère un système mécanique linéaire la présence d'excitations cycliques conduit à l'apparition de couplage non linéaire comme cela est schématisé sur la figure suivante :

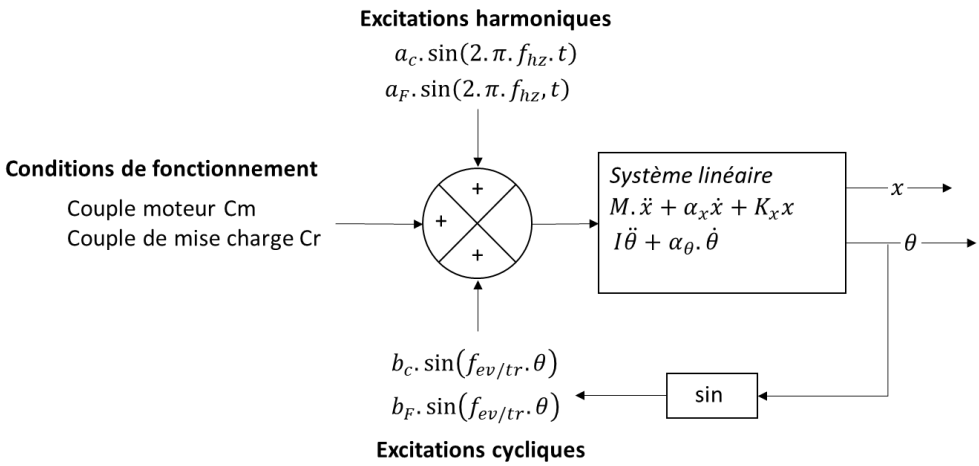

Figure 1. Schématisation du système considéré

Les simulations se feront dans l'environnement ©Matlab et la fonction ODE45 (méthode de résolution explicite de Runge-Kutta) sera utilisée pour résoudre le problème différentiel. Pour cela il est nécessaire d'écrire le système d'équations d'ordre 2 précédent sous la forme d'un système d'équations d'ordre 1 en introduisant la variable vitesse de translation v.

Le système précédent s'écrit alors :

(3) $\dot{\theta} = \Omega$

(4) $\dot{\Omega} = \frac{1}{I}.\left(C_m - C_r - \alpha_\theta \Omega + C_p(t,\theta)\right)$

(5) $\dot{x} = \mathrm{v}$

(6) $\dot{v} = \frac{1}{M}\left(-\alpha_x \mathrm{v} - K.x + F_p(t,\theta)\right)$

Toutes les fonctions ODE de ©Matlab résolvent avec un pas d'intégration variable. A l'issue de la phase de résolution, les signaux obtenus seront ré-échantillonnés à pas de temps dt constant en vue de réaliser des analyses en fréquences naturelles (Hz) et à pas d'angle dθ constant en vue de réaliser des analyses en fréquences angulaires (ev/tr). Dans le cas d'un ré-échantillonage angulaire, pour conserver correctement les informations cycliques il est nécessaire d'avoir un nombre de point d'échantillonnage entier par tours. Pour cela, on définit un entier R, similaire à la résolution d'un codeur expérimental. On a alors :

(7) $d\theta = \frac{2\pi}{R} \qquad R \in \mathbb{N}$

A l'issue de la simulation correspondant à une durée temporelle T_{max}(s) et une durée angulaire θ_{max} (tr) on dispose des signaux temps T, position angulaire θ, et du signal $s(t,\theta)$ que l'on souhaite analyser. Ces signaux sont donc discrétisés avec un pas variable, il est possible de déterminer les pas maximaux en temps Δt_{max} et en angle $\Delta\theta_{max}$. Sous ©Matlab, ce pas peut être contrôlé avec l'option « maxstep ». On choisit alors des pas de ré-échantillonage dt et dθ tels que :

(8) $\mathrm{d}t > 2.\Delta t_{max}$ et $\mathrm{d}\theta > 2.\Delta\theta_{max}$

La pratique montre que l'utilisation de pas de ré-échantillonage plus petits risque d'introduire du bruit numérique supplémentaire important, ce bruit pouvant se traduire par l'apparition de raies sans signification physique (artefacts) dans les spectres [2].

Le signal $s(t,\theta)$ à analyser peut donc être ré-échantillonné en fonction du temps $s_E(\mathrm{d}t)$ ou de la position angulaire $s_E(\mathrm{d}\theta)$. Là encore la pratique montre qu'un ré-échantillonage par interpolation linéaire est suffisant, l'utilisation de fonctions plus complexes telles que des splines conduit souvent à l'apparition d'artefacts dans les spectres.

Pour ces deux nouveaux signaux il est possible de calculer leur transformée de Fourier à l'aide de la fonction FFT. La FFT du signal $s_E(\mathrm{d}t)$ conduira au spectre en fréquences naturelles exprimées en Hz avec un pas de résolution de $\frac{1}{T_{max}}$ Hz, la FFT du signal $s_E(\mathrm{d}\theta)$ conduira aux spectres en fréquences angulaires avec un pas de résolution de $\frac{1}{\theta_{max}}$ ev/tr. Ces résolutions sont déterminées par la durée de la simulation et on s'assure dans tout le document que cette durée est suffisante pour mettre en évidence les phénomènes évoqués.

Si le système tourne avec une vitesse moyenne constante (régime stationnaire) Ω_o soit une fréquence de rotation f_o, il est possible de modifier les valeurs des abscisses du spectre en fréquences naturelles en les divisant par f_o. On parle alors de spectre en ordres.

L'objectif de ce papier est, pour le système défini précédemment, de comparer le contenu fréquentiel de ces différents spectres en fonction des excitations considérées. On s'intéressera aux signaux vitesse de rotation et accélération en translation.

2.2. Choix des paramètres

Le tableau suivant regroupe les paramètres du système mécanique considéré lors des simulations

d (mm)	b (mm)	ρ ($kg.m^{-3}$)	M (kg)	I (kg.m^2)	K (N.m^{-1})	ξ	α_x (N.s.m^{-1})	α_θ (N.m.s.rad^{-1})
84	20	7800	0.8645	7.62 10^{-4}	7.5 10^7	0.01	161	0.0156

Tableau 1. Définition des paramètres de simulation

Comme souvent la difficulté pour effectuer un choix de paramètres significatifs est lié au choix des paramètres d'amortissement. L'approche proposée ici est discutable mais elle a le mérite de présenter des hypothèses et une démarche afin d'avoir des ordres de grandeur réalistes. La principale limite à cette approche est de considérer par la suite que ces coefficients d'amortissement sont constants quelles que soient les conditions de fonctionnement, au même titre que la masse et la raideur du support, même si pour cette dernière des approches alternatives pourraient être envisagées.

Choix du coefficient d'amortissement visqueux dans la direction radiale α_x

Ce modèle possède un mode propre de pulsation :

(9) $$\omega_p = \sqrt{\frac{\mathrm{K}_x}{M}} = 9.31\ 10^3 \text{ rad/s}$$

Soit une fréquence propre

(10) $$f_p = 1482\ Hz$$

Le coefficient d'amortissement modal associé est

(11) $$\xi = \frac{1}{2}.\alpha_x.\frac{\omega_p}{\mathrm{K}_x}$$

On propose ici de fixer l'amortissement modal ξ, de l'ordre de quelques pourcents, pour en déduire une valeur de l'amortissement α_x

(12) $$\alpha_x = 2.\xi\ .\frac{\mathrm{K}}{\omega_p}$$

Choix du coefficient d'amortissement visqueux en rotation $\boldsymbol{\alpha_\theta}$

Afin de donner une valeur réaliste au coefficient d'amortissement visqueux équivalent en rotation α_θ, encore moins connu que le précédent, on définit une condition de fonctionnement nominale correspondant à un couple moteur C_{mo} et à une vitesse de rotation Ω_o et on considère que pour ces conditions on a un rendement η. On a alors :

(13) $$\alpha_\theta = \frac{(1-\eta).Cmo}{\Omega o}$$

Si on fait l'hypothèse que ce coefficient est indépendant des conditions de fonctionnement mais que le rendement ne l'est pas, il est possible de choisir d'autres régimes de fonctionnement pour les simulations. Si on fixe par exemple le couple de charge C_r, il est possible de déterminer le couple moteur C_m à appliquer pour obtenir une vitesse de rotation macroscopique $\overline{\Omega}$ donnée :

(14) $$\overline{\Omega} = \frac{C_m - C_r}{\alpha_\theta}$$

Soit :

(15) $$C_m = \alpha_\theta.\ \overline{\Omega} + C_r$$

Les paramètres de fonctionnement nominal choisis par la suite sont indiqués dans le tableau suivant :

Ω_o (rpm)	fo (Hz)	C_{mo} (N.m)	η	C_{ro} (N.m)	α_θ (N.m.s.rad-1)
490	8.16	40	0.98	39.2	0.0156

Tableau 2. Définition des paramètres de fonctionnement nominal

Sans indications complémentaires, les simulations présentées dans la suite de ce document sont réalisées pour ce régime de fonctionnement.

3. Analyses de la vitesse de rotation

On considère dans cette partie un fonctionnement en régime nominal et on analysera la vitesse de rotation du système. On considèrera plusieurs types d'excitation en couple. Dans la réalité, ces variations de couple peuvent provenir du dispositif moteur mais également des variations du couple de charge souvent moins contrôlables.

3.1. Excitation harmonique

On considère une excitation harmonique de fréquence f_{Hz} et d'amplitude proportionnelle au couple moteur :

(16) $$C_p = \beta . C_{mo} . \sin(2.\pi . f_{Hz} . t)$$

A.N : β*=0.01 ;* $f_{Hz} = 50Hz$

Les résultats de ces simulations numériques sont présentés Figure 2 (a). Le jeu de paramètre choisi conduit à des variations de vitesse d'amplitude 15 rpm, ce qui est du même ordre de grandeur que des variations de vitesse mesurées sur un banc d'essais expérimental (b) constitué de deux arbres couplés par un engrenage. La masse et l'inertie retenues pour le modèle correspondent à celles d'un des deux pignons.

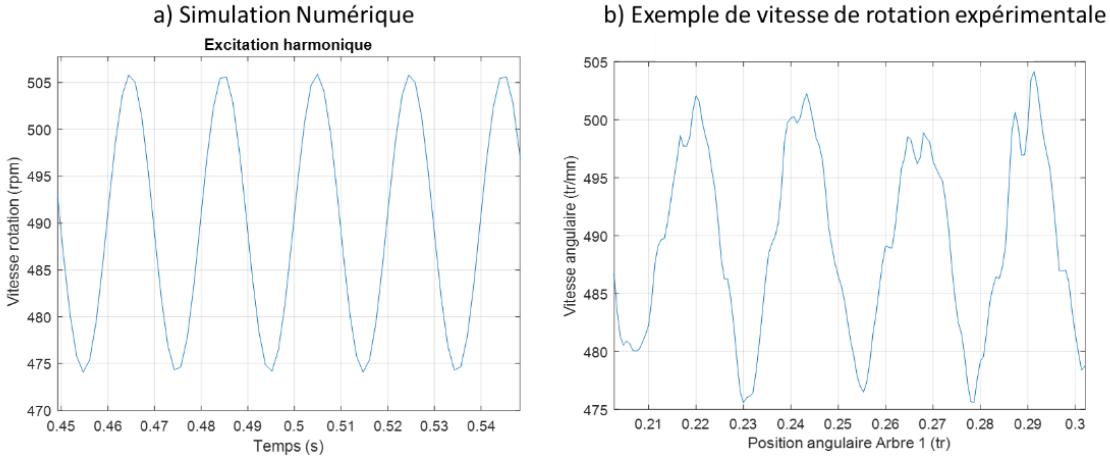

Figure 2. Variations de vitesse issues des simulations (a) et de mesure expérimentale (b)

Les analyses en fréquences naturelles et en ordre de la vitesse (Figure 3) font naturellement apparaitre une raie unique à $f_{Hz} = 50\ Hz$ soit un ordre de $\frac{50}{f_o} = 6.127$

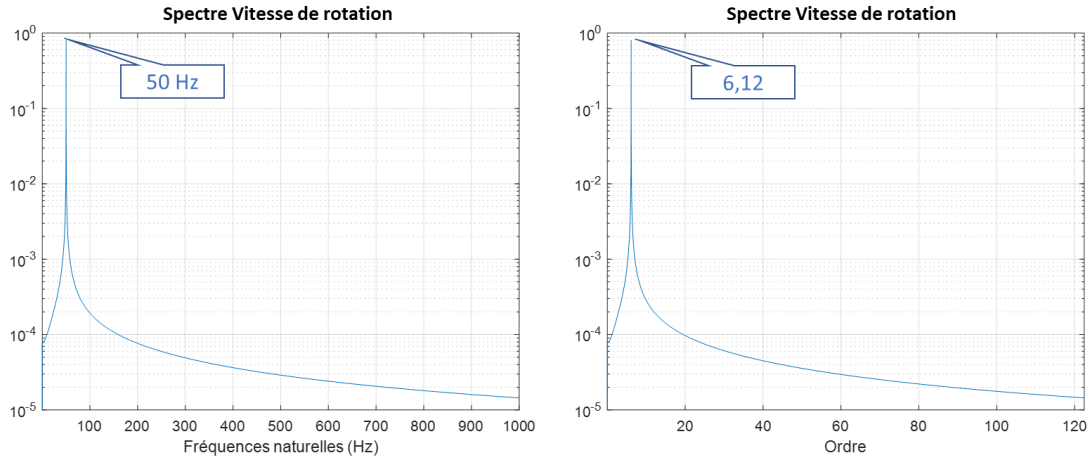

Figure 3. Spectre en fréquences naturelles (précision 0.058 Hz) et en ordres (précision 0.007) du signal vitesse de rotation au régime nominal et dans le cas d'une excitation harmonique à 50 Hz

Une analyse en fréquences angulaires (Figure 4) fait évidemment apparaitre un pic à 6.12 ev/tr (similaire à la valeur en ordre) mais également des multiples de cette fréquence d'amplitude plus faibles. Le nombre et l'amplitude de ces composantes fréquentielles au multiple de la fréquence d'excitation dépend de l'amplitude du couple perturbateur.

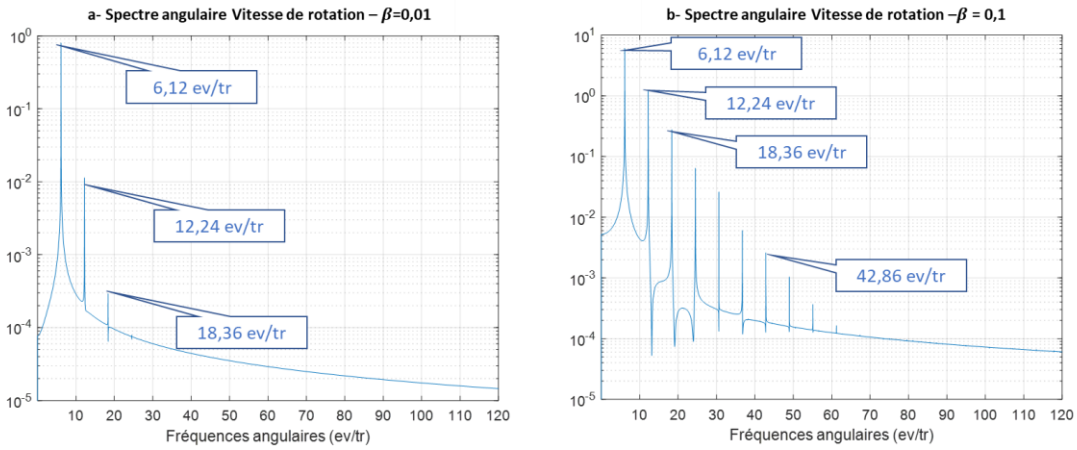

Figure 4. Spectre en fréquences angulaires (précision 0.007 ev/tr) du signal vitesse de rotation au régime nominal dans le cas d'une excitation harmonique à 50 Hz Influence de l'amplitude du couple et donc de la vitesse

Pour comprendre ces différences entre les spectres en fréquences naturelles et ceux en fréquences angulaires, considérons l'équation du mouvement associée à la rotation dans le cas d'une excitation harmonique :

$$I.\dot{\Omega} = C_m - C_r - \alpha_\theta \Omega + \beta.C_{mo}.\sin(2.\pi.f_{Hz}.t) \quad (17)$$

Il s'agit d'une équation différentielle canonique dont la solution est de la forme :

$$\Omega(t) = \Omega_o + B.\sin(2.\pi.f_{Hz}t + \varphi) \quad (18)$$

Avec B et φ dépendant de f_{Hz} et des caractéristiques du modèle. Cette fonction peut facilement être intégrée pour obtenir le signal de position angulaire $\theta(t)$.

$$\theta(t) = \Omega_o t - \frac{B}{2.\pi.f_{Hz}}.\cos(2.\pi.f_{Hz}t + \varphi) = \Omega_o t + \frac{B}{2.\pi.f_{Hz}}.\sin\left(2.\pi.f_{Hz}t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (19)$$

Cette fonction est monotone croissante (le système tourne toujours dans le même sens) donc inversible. Mais son inverse $t = g(\theta)$ n'est pas exprimable analytiquement mais on peut l'obtenir numériquement

et réaliser son spectre en fréquences angulaires. La fonction $g(\theta)$ étant croissante il est nécessaire d'appliquer un fenêtrage de type Hanning pour visualiser les composantes de ce spectre (Figure 5).

La fonction angle-temps $g(\theta)$ a donc des composantes cycliques aux multiples de la fondamentale.

La fonction :

(20) $$\Omega(\theta) = \Omega_o + B.\sin(2.\pi.f_{Hz}.g(\theta) + \varphi)$$

va donc également avoir des composantes cycliques aux multiples de la fondamentale.

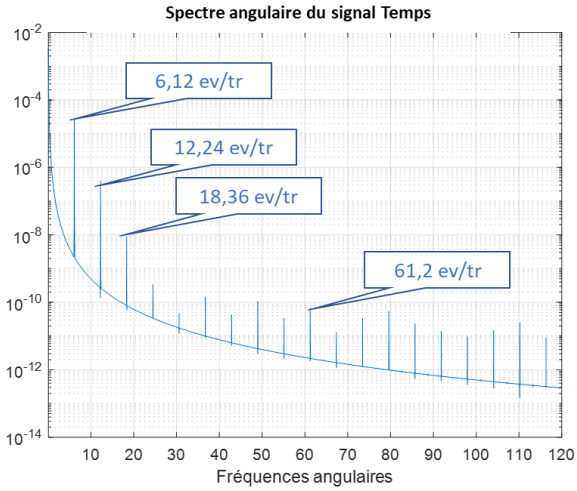

Figure 5. Spectre angulaire (précision 0.007 ev/tr) de la fonction $g(\theta)$

Conclusion 1 :

Cette première étude a permis de montrer que si la vitesse angulaire présente de petites fluctuations harmoniques, le contenu du spectre en ordre n'est pas identique au contenu du spectre en fréquences angulaires qui présente un contenu plus riche. Cette différence provient du fait que la vitesse de rotation n'est pas parfaitement constante et que $\theta(t) \neq \Omega_o t$. Pour passer de l'un à l'autre, le rééchantillonnage doit tenir compte des fluctuations de vitesse

3.2. Excitation cyclique

On considère ici une excitation cyclique de fréquence $f_{ev/tr}$ équivalente à la fréquence harmonique précédente et d'amplitude proportionnelle au couple moteur :

(21) $$C_p = \beta.C_{mo}.\sin\left(f_{ev/tr}.\theta\right)$$

AN: $\beta = 0.01$; $f_{ev/tr} = 6.124$ *ev/tr*

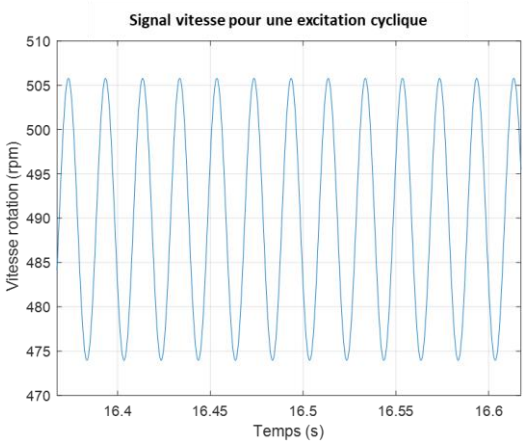

Figure 6. Signal vitesse pour une excitation cyclique de fréquence $f_{ev/tr}$=6.124 ev/tr

La réponse (Figure 7) semble très similaire à celle obtenue pour une excitation harmonique mais le contenu fréquentiel est différent (Figure 7). Les spectres en fréquences angulaires et en ordres sont plus similaires que dans le cas précédent faisant apparaitre dans les deux cas, des raies à des multiples de la fréquence d'excitation.

Cette seconde étude montre donc que pour une vitesse de rotation non parfaitement constante, la réponse à une excitation cyclique n'est pas identique à la réponse à une excitation harmonique.

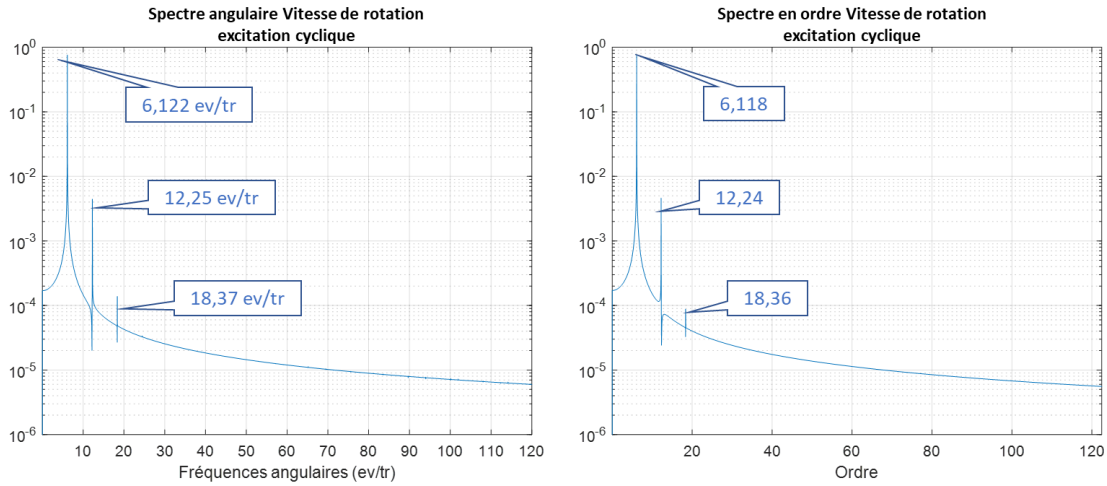

Figure 7. Comparaison des spectres en fréquence angulaires (précision 0.0035 ev/tr) et en ordre (précision 0.0034) du signal vitesse de rotation dans le cas d'une excitation cyclique

Le premier point « notable », mais pas forcément intuitif, est que la réponse en vitesse à une excitation en couple cyclique monofréquence contient des multiples de fréquence fondamentale. La méconnaissance de ce phénomène peut perturber l'analyse de résultats expérimentaux, en particulier pour des applications de détection de défaut (apparition de raies à 2 fois la BPFO pour un roulement sain par exemple).

Pour comprendre ce phénomène, il faudrait résoudre l'équation différentielle en θ :

(22) $$I.\ddot{\theta} = C_{mo} - C_{ro} - \alpha.\dot{\theta} + A.\sin(f_{ev/tr}.\theta)$$

Dont, à notre connaissance, il n'existe pas de solution analytique simple. A l'inverse, imaginons un signal vitesse de rotation qui ne comporterait qu'une composante cyclique :

(23) $$\Omega(t) = \Omega_o + B.\sin\left(f_{ev/tr}.\theta\right)$$

Cette vitesse serait la réponse à une excitation en couple h(θ), que l'on cherche à estimer, telle que

(24) $$I.\dot{\Omega} = C_{mo} - C_{ro} - \alpha.\Omega + \mathrm{h}(\theta)$$

Soit

(25) $$\mathrm{h}(\theta) = I.\dot{\Omega} - C_{mo} + C_{ro} + \alpha.\Omega$$

Le régime stationnaire sans perturbation correspond à $\Omega(t) = \Omega_o$

Soit

(26) $$C_{mo} - C_{ro} - \alpha.\Omega_o = 0$$

La dérivée de la vitesse s'exprime par :

(27) $$\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\Omega}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = B.f_{ev/tr}.\cos\left(f_{ev/tr}.\theta\right)\Omega$$

D'où

(28)
$$\begin{aligned}
\mathrm{h}(\theta) &= I.B.f_{ev/tr}.\cos\left(f_{ev/tr}.\theta\right)\Omega - C_{mo} + C_{ro} + \alpha.\Omega \\
&= I.B.f_{ev/tr}.\cos\left(f_{ev/tr}.\theta\right)\Omega - C_{mo} + C_{ro} + \alpha.\left(\Omega_o + B.\sin\left(f_{ev/tr}.\theta\right)\right) \\
&= I.B.f_{ev/tr}.\cos\left(f_{ev/tr}.\theta\right)\Omega + \alpha.B.\sin\left(f_{ev/tr}.\theta\right) \\
&= I.B.f_{ev/tr}.\cos\left(f_{ev/tr}.\theta\right)\left(\Omega_o + B.\sin\left(f_{ev/tr}.\theta\right)\right) + \alpha.B.\sin\left(f_{ev/tr}.\theta\right) \\
&= \alpha.B.\sin\left(f_{ev/tr}.\theta\right) + I.B.f_{ev/tr}.\Omega_o\cos\left(f_{ev/tr}.\theta\right) + \\
&\quad I.B^2.f_{ev/tr}.\cos\left(f_{ev/tr}.\theta\right)\sin\left(f_{ev/tr}.\theta\right) \\
&= \alpha.B.\sin\left(f_{ev/tr}.\theta\right) + I.B.f_{ev/tr}.\Omega_o\cos\left(f_{ev/tr}.\theta\right) + \\
&\quad \boldsymbol{\frac{1}{2}I.B^2.f_{ev/tr}.\sin\left(2f_{ev/tr}.\theta\right)}
\end{aligned}$$

Cela signifie que pour que le signal vitesse de rotation ne contienne qu'une unique composante cyclique $f_{ev/tr}$ l'excitation générant cette composante devra avoir des composantes à $f_{ev/tr}$ mais également à $2.f_{ev/tr}$ et les amplitudes de ces excitations dépendront de la vitesse moyenne de rotation Ω_o et de la fréquence d'excitation $f_{ev/tr}$.

Les termes en gras de l'équation précédente n'apparaissent pas si on considère une composante harmonique et non cyclique dans la vitesse de rotation.

En effet si on cherche l'excitation h(t) telle que

(29)
$$\Omega(t) = \Omega_o + B.\sin(2.\pi f_{hz}.t)$$

On a

(30)
$$\dot{\Omega} = B.2.\pi.f_{hz}.\cos(2.\pi f_{hz}.t)$$

D'où

(31)
$$\begin{aligned}
\mathrm{h}(t) &= I.\dot{\Omega} - C_{mo} + C_{ro} + \alpha.\Omega \\
&= I.(B.2.\pi.f_{Hz}.\cos(2.\pi f_{hz}.t)) - C_{mo} + C_{ro} + \alpha.(\Omega_o + B.\sin(2.\pi f_{hz}.t)) \\
&= \alpha.B.\sin(2.\pi f_{hz}.t) + I.B.2.\pi.f_{hz}.\cos(2.\pi f_{hz}.t)
\end{aligned}$$

Conclusion 2 :

Même dans le cas d'un régime de fonctionnement stationnaire à une vitesse de rotation moyenne de fréquence f_o, la réponse du système à une excitation harmonique de type $sin(2.\pi f_{hz}.t)$ sera différente de celle obtenue en considérant une excitation cyclique de type $sin\left(\frac{f_{hz}}{f_o}.\theta\right)$.

Cela correspond à une nouvelle limite des modèles remplaçant des excitations cycliques par des excitations harmoniques en assimilant θ et $\Omega_o t$.

Le second point intéressant est un décalage de l'ordre (6.118) par rapport à la fréquence angulaire (6.122), décalage légèrement supérieur au pas en de résolution en fréquence. Afin de valider l'existence de ce phénomène une nouvelle simulation est réalisée avec une variation de couple d'amplitude plus grande (a=0.1) ce qui conduit à des variations de vitesse plus grandes également (Figure 8).

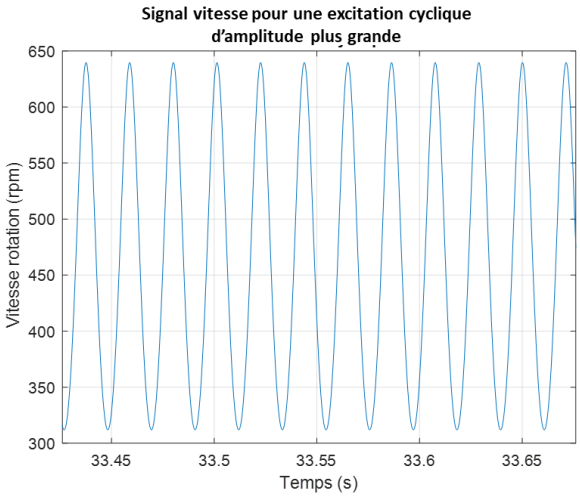

Figure 8. Signal vitesse pour une excitation en couple cyclique de fréquence $f_{ev/tr}$=6.124 ev/tr et d'amplitude $0.1C_{mo}$

La Figure 9 présente les spectres en fréquences angulaires et en ordre de ce signal. On note une augmentation du nombre de pics émergeant dans l'analyse en fréquences angulaires (7) par rapport à une analyse en ordres (5). L'amplitude des pics plus hautes fréquences étant également plus grande pour le spectre en fréquences angulaires. Il apparait également un décalage entre les valeurs des fréquences angulaires (6.12 ev/tr) et l'ordre (5.76), ce décalage en ordre de 0.36 est 100 fois plus grand que la précision en ordre.

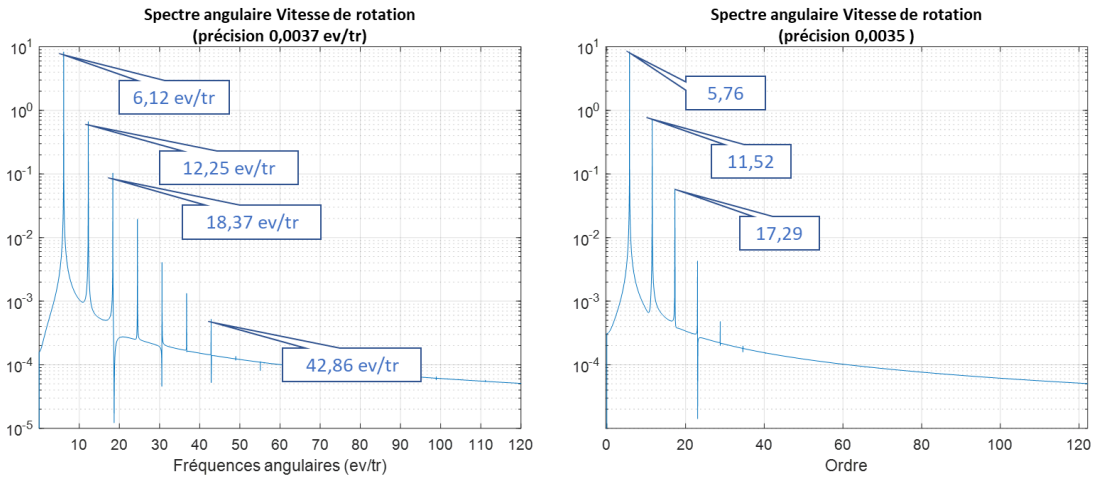

Figure 9. Comparaison des spectres en fréquence angulaires (précision 0,0037) et en ordre (précision 0.0035) du signal vitesse de rotation dans le cas d'une excitation cyclique de fréquence $f_{ev/tr}$=6.124 ev/tr et d'amplitude $0.1C_{mo}$

Ce phénomène peut rendre délicat l'analyse de courbes expérimentales en ordre, car même en connaissant la vitesse macroscopique il sera compliqué d'identifier la source d'excitation et on pourrait imaginer à tort un « glissement » de la fréquence d'excitation.

Conclusion 3 :

Lorsque la vitesse de rotation n'est pas parfaitement constante car le système est soumis à une excitation cyclique monofréquence en couple, les analyses en ordre et en fréquences angulaires ne sont pas identiques : le nombre de pics est différent mais surtout la valeur identifiable en ordre est différente de la valeur identifiable en fréquence angulaire. Cette dernière est bien égale à celle de l'excitation alors que la valeur en ordre est plus faible.

4. Analyse des accélérations

On s'intéresse dans cette partie au signal accélération radiale γ. Ce n'est pas une sortie directe de la résolution du problème différentiel et il doit être calculé lors du post-traitement par :

(32) $$\gamma = \frac{1}{M}\left(-\alpha_x.\mathrm{v} + F_p(t,\theta)\right)$$

4.1. Sans variation de vitesse

On considère ici une excitation en effort cyclique et une vitesse parfaitement constante

(33) $$F_p = b_F.\sin(f_{ev/tr}.\theta) \text{ et } C_p = 0$$

AN: $b_F = 50N$; $f_{ev/tr} = 42\ ev/tr$

La figure suivante présente l'évolution de ces accélérations.

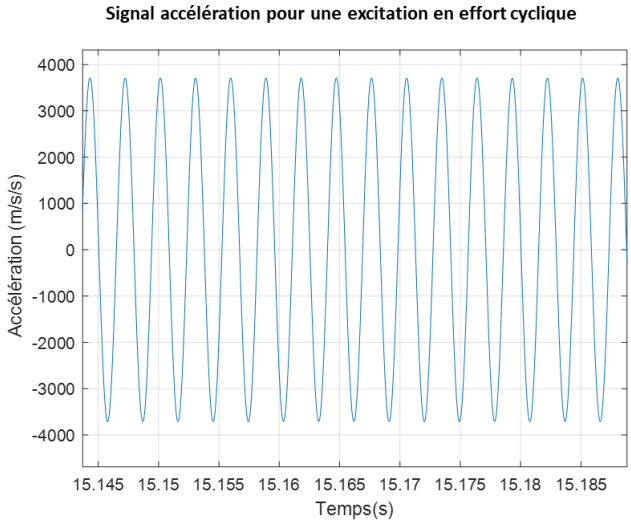

Figure 10. Signal accélération radiale pour une excitation radiale cyclique de 42 ev/tr et une vitesse de rotation parfaitement constante

On vérifie que pour ce cas de simulation, les analyses en ordres et en fréquences angulaires sont identiques et ne font apparaitre qu'un seul pic.

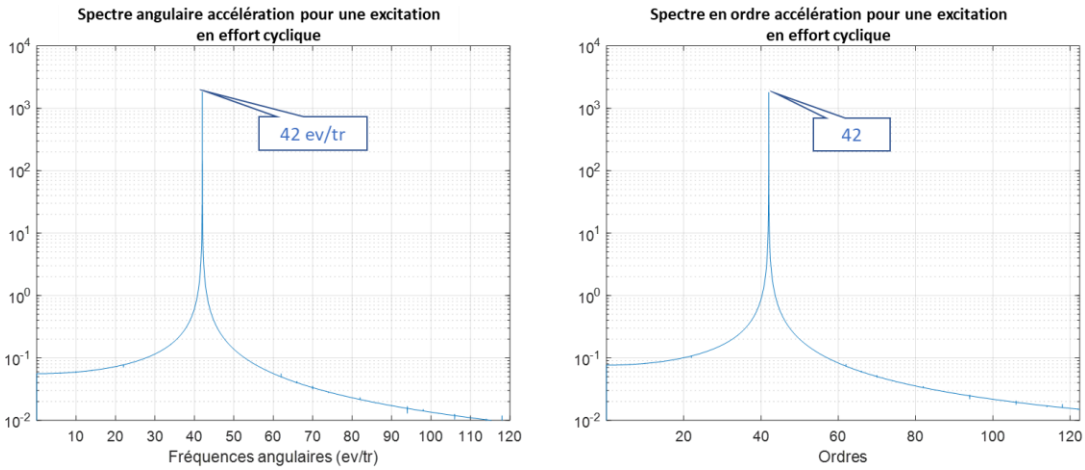

Figure 11. Comparaison des spectres en fréquence angulaires et en ordre du signal accélération dans le cas d'une excitation cyclique en effort

4.2. Avec variation de vitesse à la même fréquence cyclique

On considère dans cette partie une excitation mixte en couple et en effort et on analyse les accélérations radiales résultantes de la masse M.

(34) $$F_p = b_F.\sin(f_{ev/tr}.\theta)$$

(35) $$C_p = \beta.C_{mo}.\sin(f_{ev/tr}.\theta)$$

AN: b_F.=50N; β=0.05; $f_{ev/tr}$= 42 ev/tr.

Les variations de vitesses résultantes sont présentées sur la figure suivante.

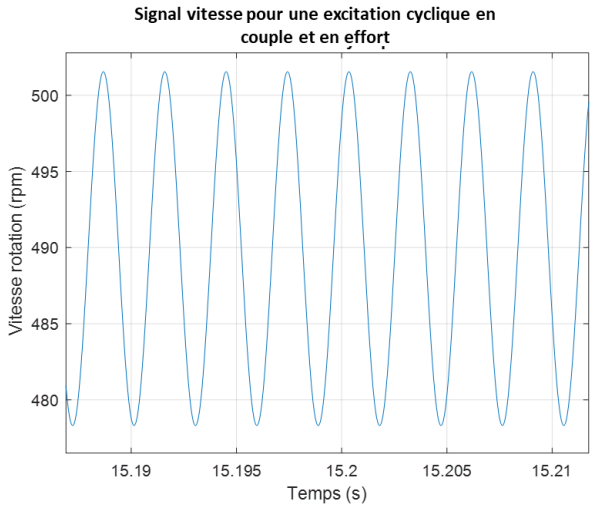

Figure 12. Signal vitesse pour une excitation cyclique de fréquence $f_{ev/tr}$=42 ev/tr

Avec ces variations de vitesse modérées, les analyses en fréquences angulaires et en ordre du signal accélération font apparaitre des raies aux multiples de la fréquence d'excitation. On note également un léger décalage des ordres similaires à ceux évoqués dans la partie précédente.

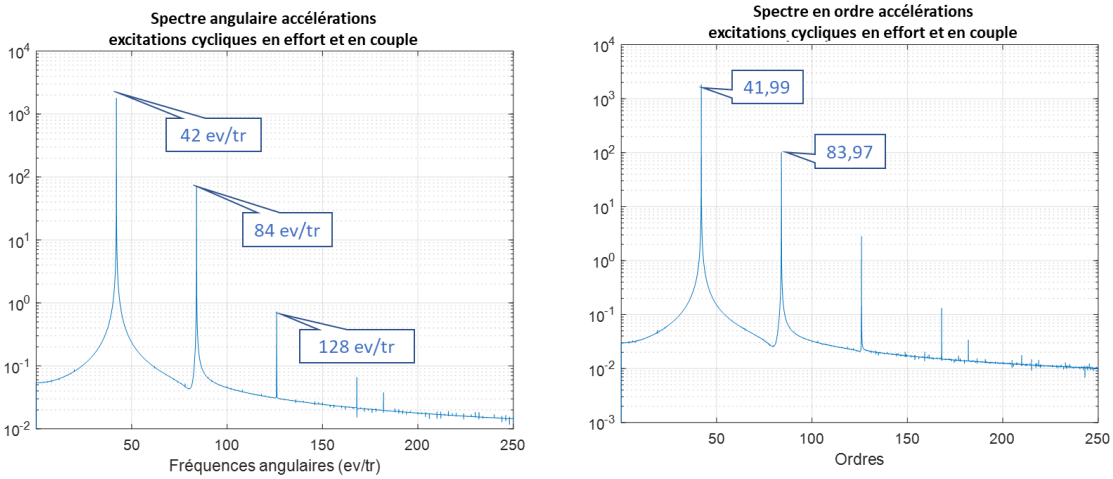

Figure 13. Comparaison des spectres en fréquence angulaires et en ordre du signal accélération dans le cas d'excitations cycliques mixtes en effort et en couple.

Si on remplace l'excitation cyclique en effort par une excitation harmonique similaire comme cela est fait dans les approches classiques, c'est-à-dire que l'on considère :

(36) $$F_p = b_F.\sin(f_{ev/tr}.\Omega_o t)$$

On vérifie, Figure 14, que le spectre en ordre est différent avec seulement la fréquence d'excitation, et pour le spectre en fréquences angulaires les amplitudes des pics aux multiples de la fréquence fondamentale sont plus faibles.

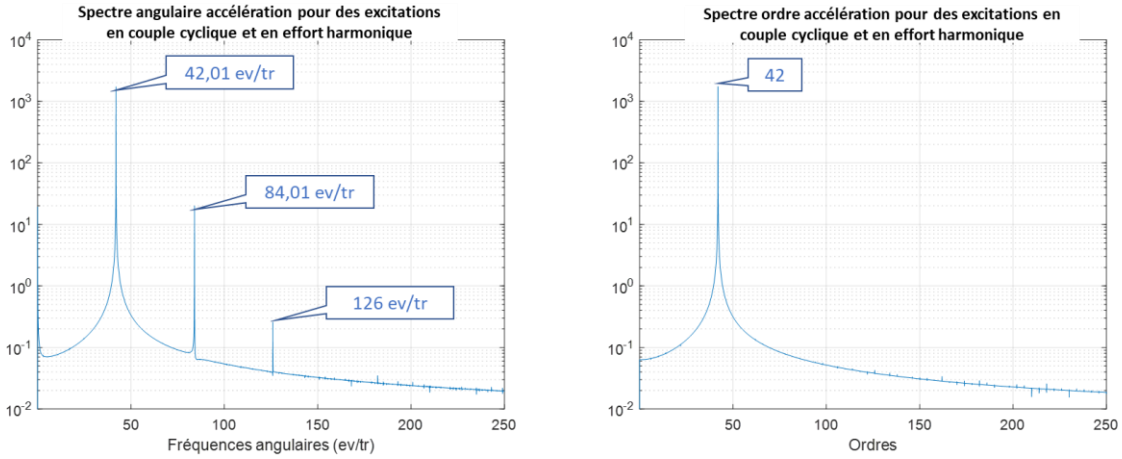

Figure 14. Comparaison des spectres en fréquence angulaires (précision 0.007 ev/tr) et en ordre (précision 0.007) du signal accélération dans le cas d'excitation cyclique en couple (amplitude 0.05Cmo) et harmonique en effort.

On note également une augmentation de la fréquence angulaire associée à l'excitation harmonique, ce décalage de 0.01 ev/tr est supérieur à la précision de la résolution (0.007 ev/tr). La Figure 15 présente les résultats obtenus pour une amplitude du couple perturbateur deux fois plus élevé (β=0.1) et donc des amplitudes de variations de vitesse plus importantes. On vérifie que le décalage des fréquences angulaires est bien lié aux variations de vitesse, on note aussi une augmentation des amplitudes de ces pics.

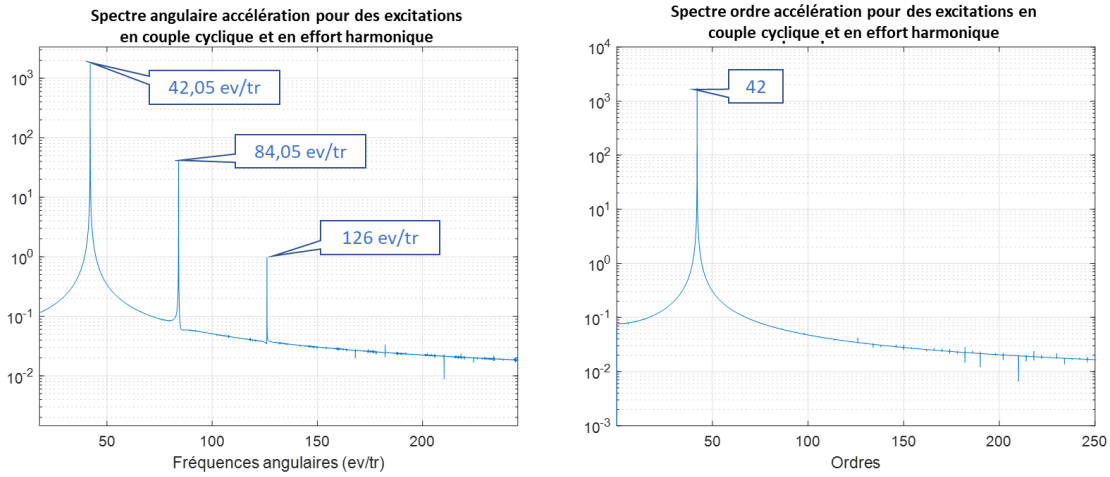

Figure 15. Comparaison des spectres du signal accélération en fréquence angulaires (précision 0.007 ev/tr) et en ordre (précision 0.007) dans le cas d'excitation cyclique en couple (amplitude 0.1Cmo) et harmonique en effort.

Conclusion 4 :

Dans le cas de systèmes présentant des variations cycliques de la vitesse de rotation, les analyses en fréquences et en ordre des signaux accélérations ne sont pertinentes que si on connait le type d'excitation que l'on souhaite identifier. Analyser une fréquence en ordre si l'excitation est cyclique ou analyser une fréquence angulaire si l'excitation est harmonique conduira à une erreur d'identification supérieure au pas de résolution. Dans tous les cas il semble nécessaire de connaitre/mesurer le signal vitesse de rotation.

4.3. Amplitudes des accélérations en fonction de la vitesse

Nous venons de voir que lorsque le système considéré est soumis à une excitation cyclique en couple et en effort, le signal accélération comporte des composantes cycliques aux multiples de la fréquence fondamentale. L'objectif de la prochaine analyse est d'estimer le comportement du système quand ces composantes sont identiques à la fréquence propre f_p c'est-à-dire lorsque la vitesse de rotation est un sous-multiple de la vitesse critique.

Pour cela, on va considérer que le couple de charge C_{ro} est constant et on va déterminer le couple moteur C_{mi} nécessaire pour atteindre, en régime stationnaire une vitesse de rotation Ω_i (rad/s) choisie. Le couple moteur nécessaire pour atteindre cette vitesse macroscopique est

(37) $$C_{mi} = \alpha_\theta . \Omega_i + C_{ro}$$

On considère une excitation cyclique en couple de fréquence f_θ d'amplitude proportionnelle au couple moteur.

(38) $$C_p = \beta . C_{mi} . \sin(f_{ev/tr} . \theta),$$

Et une excitation cyclique en effort de même fréquence et d'amplitude constante

(39) $$F_p = b_F . \sin(f_{ev/tr} . \theta)$$

Une fois ce régime stationnaire atteint, on détermine l'amplitude maximale des accélérations résultantes.

La vitesse critique où la fréquence d'excitation cyclique croise la fréquence de résonance du système f_p est

(40) $$\Omega_c = \frac{f_p}{f_\theta} . 60\ rpm$$

AN: $f_{ev/tr} = 42$; $b_F = 50N$; $\Omega_c = 2118$ rpm

La Figure 16 présente les courbes résultantes pour différentes valeurs du coefficients β définissant l'amplitude du couple perturbateur. La vitesse critique et ses sous-multiples sont repérés par une ligne pointillée et l'amplitude des variations de vitesses associées sont indiquées en pourcentage.

Il apparait naturellement un extrema à la vitesse critique. L'amplitude de cet extrema est indépendante de β et donc de l'amplitude des variations de vitesse résultantes.

Lorsque l'amplitude des variations de vitesses sont « suffisantes » d'autres maxima apparaissent aux sous-multiples de la vitesse de rotation, ce sont les fréquences multiples de la fréquence principale $f_{ev/tr}$ qui excitent le mode propre du système. L'amplitude de ces pics secondaires dépendent directement de β et donc de l'amplitude des variations de vitesses.

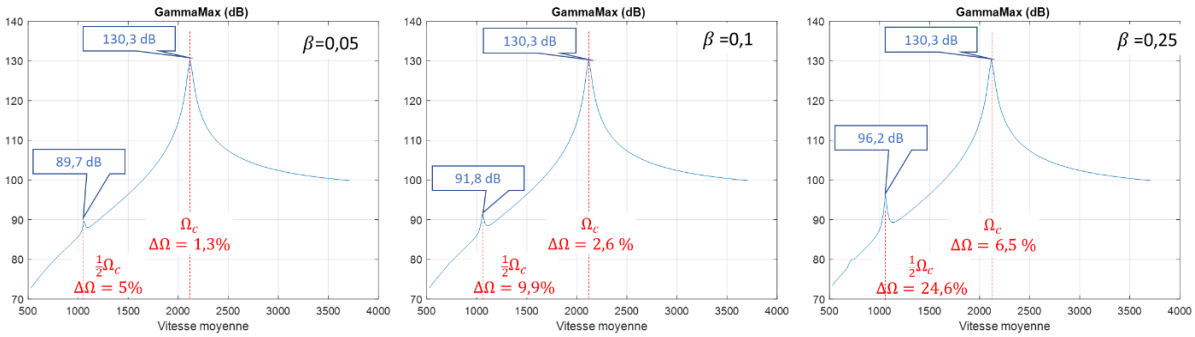

Figure 16. Evolution de l'amplitude des accélérations stationnaires en fonction de la vitesse moyenne de rotation dans le cas d'excitations cycliques mixtes en effort et en couple.

5. Conclusion

A partir d'un modèle numérique extrêmement simple à 2 ddl mais en considérant la vitesse de rotation comme un signal réponse au même titre que l'accélération et en supprimant l'hypothèse de vitesse de rotation parfaitement constante (hypothèse qui est couramment faite mais rarement justifiée) nous avons montré qu'une excitation cyclique n'était pas identique à une excitation harmonique et qu'une analyse en ordre n'était pas équivalente à une analyse en fréquences angulaires. Ces constatations peuvent également s'intuiter à partir du graphe de la figure suivante où les éléments en rouge mettent en évidence les effets non linéaires de la variable position angulaire instantanée θ.

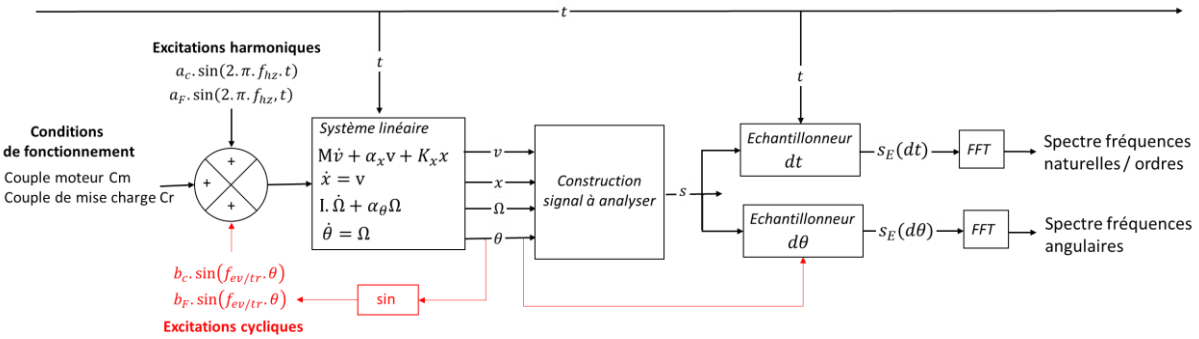

Figure 17. Illustration du processus de calcul et de post-traitement.

On a montré que l'existence de ces couplages non linéaires conduit à l'apparitions de phénomènes non-intuitifs comme le fait que la réponse à une excitation cyclique monofréquence contient des multiples de cette excitation dont le nombre et l'amplitude augmentent avec l'amplitude des variations de vitesse résultantes. De même, en présence de variations cycliques de la vitesse de rotation, une excitation en force à la même fréquence peut conduire à des augmentations du niveau vibratoire pour des vitesses sous-multiples de la vitesse critique.

Il est important d'avoir ces phénomènes en tête lorsque l'on réalise et analyse des simulations numériques. Il serait également très intéressant de vérifier leur existence d'un point de vue expérimental. Il faudrait avoir pour cela un banc dédié permettant d'introduire des perturbations harmoniques et cycliques maitrisées et également un dispositif d'acquisition permettant d'obtenir de manière simultanée des signaux échantillonnés en temps et en angle.

Références

Les auteurs sont parfaitement conscients que leurs références bibliographiques sont quasiment inexistantes. Cela traduit le fait qu'ils n'ont pas trouvé d'articles traitant de sujets similaires, ils sont néanmoins très intéressés par toute suggestion permettant d'enrichir leur point de vue.

[1] D. Rémond, J. Antoni and R.B. Randall, Editorial for the special issue on Instantaneous Angular Speed (IAS) processing and angular applications, Mechanical Systems and Signal Processing (2014) 44
[2] H. André, F. Girardin, A. Bourdon, J. Antoni and D. Rémond, Precision of the IAS monitoring system based on the elapsed time method in the spectral domain, Mechanical Systems and Signal Processing (2014) 44 (1-2), 14-30.