



**HAL**  
open science

## Approche incrémentale variationnelle pour des composites à phases élasto-endommageables

Ghita Ben-El-Barguia, Sophie Dartois, Radhi Abdelmoulla, Noel Lahellec,  
Djimedo Kondo

► **To cite this version:**

Ghita Ben-El-Barguia, Sophie Dartois, Radhi Abdelmoulla, Noel Lahellec, Djimedo Kondo. Approche incrémentale variationnelle pour des composites à phases élasto-endommageables. 25e Congrès Français de Mécanique, Aug 2022, Nantes, France. hal-04280057

**HAL Id: hal-04280057**

**<https://hal.science/hal-04280057>**

Submitted on 10 Nov 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Approche incrémentale variationnelle pour des composites à phases élasto-endommageables

G. BEN-EL-BARGUIA<sup>a</sup>, S. DARTOIS<sup>a</sup>, N. LAHELLEC<sup>b</sup>, R. ABDELMOULLA<sup>c</sup>, D. KONDO<sup>a</sup>

a. Institut  $\partial$ 'Alembert, UMR 7190 CNRS, Sorbonne Université (Paris 6), Paris, France  
ghita.ben\_el\_barguia@sorbonne-universite.fr, sophie.dartois@sorbonne-universite.fr,  
djimedo.kondo@sorbonne-universite.fr

b. Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA), Marseille, France, lahellec@lma.cnrs-mrs.fr  
c. Université Sorbonne, Paris Nord, France, radhi.abdelmoula@univ-paris13.fr

## Résumé :

*Dans cette étude nous nous intéressons au comportement effectif de composites élasto-endommageables. Lorsqu'ils sont soumis à des sollicitations mécaniques, les matériaux à matrice fragile sont généralement le siège de phénomènes de dégradation de propriétés mécaniques dont l'origine est l'apparition et/ou la croissance de microfissures. La conséquence de cet endommagement est une réponse effective adoucissante susceptible de conduire à une rupture macroscopique. Si des avancées significatives ont été réalisées ces dernières années en matière de modélisation de l'endommagement et des processus de rupture qui en résultent, la prise en compte de cet endommagement dans les approches d'homogénéisation de composites reste encore un domaine de recherche largement ouvert et peu abordé (voir [5] et [4]). L'étude présentée dans cette communication vise à établir un cadre de modélisation des composites à phases élasto-endommageables en se basant sur l'approche incrémentale variationnelle initialement introduite par Lahellec et Suquet [10] et développée dans la littérature pour des composites élasto(visco)plastiques. A cette fin, on formule d'abord une loi d'endommagement isotrope dans le cadre des Matériaux Standard Généralisés, c'est à dire à l'aide de deux potentiels. S'appuyant alors sur la démarche proposée par [10], on propose d'abord une linéarisation relativement simple du comportement local couplant élasticité et endommagement, et d'où l'on déduit un Milieu Linéaire de Comparaison (MLC). Ce dernier est à propriétés homogènes par phase. Le comportement effectif est ensuite estimé à l'aide d'un schéma classique d'homogénéisation linéaire (Hashin-Shtrikman). Nous développons et mettons en oeuvre la procédure incrémentale variationnelle pour des composites constitués de particules sphériques élastiques linéaires réparties de manière aléatoire et isotrope dans une matrice élasto-endommageable. Les prédictions du modèle, aussi bien à l'échelle du composite que celle des phases, sont évaluées et discutées en les comparant à des résultats de simulations en champs complets réalisées sur une cellule 3D en mettant en oeuvre une approche par champ de phase [3].*

## Abstract :

*In this study we investigate the effective behavior of elasto-damageable composites. When subjected to mechanical loadings, brittle matrix composites are prone to exhibit damage due to the occurrence and/or the growth of microcracks. The consequence of such damage growth is an effective response with stress*

*softening which can lead to macroscopic failure. Although significant progress has been achieved in recent years in the field of damage modelling and of the resulting fracture phenomena, taking into account this damage in homogenization approaches still remains a largely open and barely explored issue in solid mechanics (see for instance [5] and [4]). The study presented in this communication aims to establish a homogenization-based framework for elasto-damageable composites by taking advantage of the incremental variational procedure initially introduced by Lahellec and Suquet [10] and developed so far for elasto(visco)plastic composites. To this end, we consider an isotropic damage law within the framework of Generalized Standard Materials, i.e. using two potentials. Based on the approach proposed by [10], we first propose a simple linearization of the local behavior coupling elasticity and damage, and from which a Linear Comparison Composite (LCC) with per-phase homogeneous properties is deduced. The effective behavior is then estimated using classical linear homogenization scheme (Hahsin-Shtrikman). We develop and implement the incremental variational procedure for composites consisting of elastic spherical particles randomly and isotropically distributed in an elasto-damageable matrix. The model predictions, both at the scale of the composite and that of the constitutive phases, are evaluated and discussed by comparing them to the results of full-field simulations carried out on a 3D cell by implementing a phase field approach [3].*

**Mots clefs : Composites non-linéaires, homogénéisation, endommagement et rupture, approche incrémentale variationnelle**

## 1 Introduction

Lorsqu'ils sont soumis à des sollicitations mécaniques, les composites à matrice fragile sont le siège de processus d'endommagement dont l'origine est principalement la nucléation et la croissance de microfissures. Cet endommagement conduit généralement à une réponse effective adoucissante susceptible de mener à la rupture par fissuration dans les phases ultimes de forte localisation de l'endommagement. La mise en place d'outils prédictifs de calculs de structures constituées de matériaux composites à matrice élastique endommageable passe nécessairement par le développement de lois de comportement appropriées. A cette fin, une démarche pertinente et relativement bien développée pour des composites viscoélastiques et/ou élasto(visco)plastiques consiste à la mise en oeuvre de méthode d'homogénéisation en champs moyens, avec comme difficulté la prise en compte du couplage entre l'élasticité et les phénomènes dissipatifs.

L'objet principal de cette étude est la modélisation de la réponse de composites à matrice fragile en mettant en oeuvre une démarche d'homogénéisation non linéaire. À cette fin, on adopte l'approche incrémentale variationnelle initialement proposée par Lahellec et Suquet [10]. Comme précédemment évoqué, la plupart des études réalisées dans le domaine de l'homogénéisation non linéaire ont concerné des composites élasto(visco)plastiques avec et sans écrouissage cinématique linéaire et/ou isotrope [16, 10, 11, 1, 12, 13, 15]. De fait, les très rares travaux portant sur des milieux susceptibles à l'endommagement sont très récents et également dans une phase relativement embryonnaire [5, 4] (voir également [6] dans cette conférence). Dans la présente communication, on se propose d'adapter le cadre variationnel proposé par [10] au cas de composites à matrice élasto-endommageable. Dans ce contexte, on fait appel à des principes variationnels incrémentaux introduits aux échelles locale et globale. Ces principes reposent sur la définition d'un potentiel unique, le potentiel incrémental condensé, tenant compte à la fois

des effets conservatifs et dissipatifs dus aux phénomènes d'endommagement. On procède ensuite à une linéarisation du comportement local élasto-endommageable des phases à l'aide d'un potentiel dont les caractéristiques sont considérées uniformes par phase. Cette démarche débouche sur l'obtention d'un Milieu Linéaire de Comparaison (MLC) à propriétés uniformes par phase. La résolution du problème d'homogénéisation du composite est faite en utilisant les estimations de type Hashin-Shtrikman, ce qui permet également de déterminer les moments d'ordre un et deux des champs locaux au niveau des phases constitutives.

La procédure incrémentale variationnelle développée est ensuite mise en oeuvre pour des composites constitués d'une matrice isotrope élasto-endommageable contenant des inclusions sphériques élastiques linéaires. La communication s'achève sur une évaluation et une discussion des prédictions du modèle, aussi bien à l'échelle du composite que celle des phases, en les comparant à des résultats de simulations en champs complets réalisées sur une cellule 3D en mettant en oeuvre une approche variationnelle par champ de phase [3].

## 2 Matériaux composites à phases élasto-endommageables

### 2.1 Comportement local et principes variationnels incrémentaux

On considère un Volume Élémentaire Représentatif (VER)  $\Omega$  d'un matériau composite à N-phases avec  $\Omega^{(r)}$  le volume de la phase  $r$  ( $r = 1, \dots, N$ ). On suppose que les phases ont un comportement local élasto-endommageable pouvant être modélisé dans le cadre des Matériaux Standard Généralisés (MSG). Ainsi, le modèle de comportement mécanique de ces phases peut être formulé en considérant les variables d'état que sont la déformation  $\varepsilon$  et une variable interne  $d$  (choisie sous la forme d'un scalaire positif, de sorte à ne considérer que des processus d'endommagement isotrope) et en choisissant deux potentiels convexes que nous préciserons par la suite.

La répartition des phases est caractérisée par la fonction indicatrice

$$\chi^{(r)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega^{(r)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

Le premier potentiel convexe est l'énergie libre  $w(\varepsilon, d)$ , fonction de la déformation  $\varepsilon$  et de l'endommagement  $d$ .

$$w(\varepsilon, d) = \sum_{r=1}^N w^{(r)}(\varepsilon, d) \chi^{(r)}(x) \quad (2)$$

À partir de ce potentiel on peut déduire les lois d'état. L'analyse de la dissipation intrinsèque dans le cas présent où la déformation n'est pas une variable dissipative conduit à :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, d) \\ \mathcal{Y} = -\frac{\partial w}{\partial d}(\varepsilon, d) \end{cases} \quad (3)$$

dans laquelle le taux de restitution de l'énergie d'endommagement,  $\mathcal{Y}$ , est la force thermodynamique irréversible associée à l'endommagement.

La formulation de la loi d'évolution de l'endommagement ( $\mathcal{Y}$  en fonction du flux d'endommagement  $\dot{d}$ )

requiert le choix d'un potentiel  $\varphi$ , dit de dissipation, fonction convexe à valeurs scalaires positives du flux  $\dot{d}$ , et minimale en 0. Il vient :

$$\varphi(\dot{d}) = \sum_{r=1}^N \varphi^{(r)}(\dot{d}) \chi^{(r)}(x), \quad \mathcal{Y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{d}}(\dot{d}) \quad (4)$$

Sur la base de (3) et (4)<sub>2</sub>, les équations constitutives de la loi d'endommagement se résument sous la forme

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, d), \quad \frac{\partial w}{\partial d}(\varepsilon, d) + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{d}}(\dot{d}) = 0 \quad (5)$$

A l'instar de Lahellec et Suquet [10], une approximation de ces équations constitutives peut être obtenue comme suit, en utilisant un schéma d'Euler implicite

$$\sigma_{n+1} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{n+1}}(\varepsilon_{n+1}, d_{n+1}) \quad \frac{\partial w}{\partial d_{n+1}}(\varepsilon_{n+1}, d_{n+1}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{d}_{n+1}}\left(\frac{d_{n+1} - d_n}{\Delta t}\right) = 0 \quad (6)$$

L'intervalle de temps de l'étude  $[0, T]$  est discrétisé en  $N$  pas de temps et on définit  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ . Par ailleurs, la notation  $f_n$  indique la valeur  $f(t_n)$  de la fonction  $f$  au temps  $t_n$ <sup>1</sup>.

A ce stade, on introduit le potentiel incrémental condensé  $J$  tel que l'équation (6)<sub>2</sub> corresponde aux équations d'Euler-Lagrange fournissant la solution du problème variationnel :

$$\begin{cases} w_{\Delta}(x, \varepsilon) = \inf_d J(x, \varepsilon, d) & \text{avec :} \\ J(x, \varepsilon, d) = \sum_{r=1}^N J^{(r)}(x, \varepsilon, d) \chi^{(r)}(x) & \text{et :} \\ J^{(r)}(x, \varepsilon, d) = w^{(r)}(\varepsilon, d) + \Delta t \varphi^{(r)}\left(\frac{d - d_n}{\Delta t}\right) \end{cases} \quad (7)$$

Finalement, pour le composite le potentiel incrémental condensé effectif  $\tilde{w}_{\Delta}(E)$  prend la forme :

$$\tilde{w}_{\Delta}(E) = \inf_{\varepsilon / \langle \varepsilon \rangle = E} \langle w_{\Delta}(\varepsilon) \rangle = \inf_{\varepsilon / \langle \varepsilon \rangle = E} \left\langle \inf_d J(\varepsilon, d) \right\rangle \quad (8)$$

dans laquelle  $\langle a \rangle$  la moyenne de la grandeur  $a$  considérée sur le composite.

Lahellec et Suquet [10] ont montré, grâce à la relation  $\sigma = \frac{\partial w_{\Delta}}{\partial \varepsilon}$  et au lemme de Hill, que la loi de comportement macroscopique recherchée est donnée par :

$$\Sigma = \frac{\partial \tilde{w}_{\Delta}}{\partial E}(E) \quad (9)$$

où  $\Sigma = \langle \sigma \rangle$  est la contrainte macroscopique.

1. Afin de simplifier les notations, on omettra l'indice  $n + 1$  pour les variables calculées au temps  $t_{n+1}$  (i.e.  $\varepsilon = \varepsilon_{n+1}$ ).

## 2.2 Application de la procédure incrémentale variationnelle

### 2.2.1 Méthodologie générale

Les potentiels locaux décrivant les comportements des phases constitutives du composite sont choisis sous la forme

$$\begin{cases} w^{(r)}(\varepsilon, d) = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C}^{(r)}(d) : \varepsilon \\ \varphi^{(r)}(\dot{d}) = \mathcal{Y}_c \dot{d} + \Psi_c(\dot{d}) \end{cases} \quad (10)$$

où  $\Psi(\dot{d})$  correspond à la condition d'irréversibilité de l'endommagement telle que :

$$\Psi_c(\dot{d}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dot{d} \geq 0 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (11)$$

et  $\mathcal{Y}_c$  une caractéristique (constante) de la phase considérée.

Pour des raisons de simplicité, nous considérons pour le modèle d'endommagement la fonction de dégradation suivante :

$$\mathbb{C}^{(r)}(d) = (1 - d)^2 \mathbb{C}_s^{(r)} \quad (12)$$

dans laquelle  $\mathbb{C}_s^{(r)}$  représente le tenseur d'élasticité du milieu non endommagé. Nous verrons ultérieurement que ce choix de fonction de dégradation correspond à un modèle classiquement considéré dans la littérature pour la simulation numérique des processus d'endommagement.

S'agissant du potentiel de dissipation, on notera l'homogénéité de degré 1, conformément à l'indépendance de la loi d'endommagement vis à vis du temps physique. Par ailleurs, on peut vérifier aisément, par transformée de Legendre-Fenchel, que la donnée précédente de  $\varphi$  est équivalente à celle du critère d'endommagement suivant :

$$f(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y} - \mathcal{Y}_c \leq 0 \quad (13)$$

d'où l'on conclut que  $\mathcal{Y}_c$  représente le seuil d'endommagement (taux de restitution critique) du milieu considéré.

Afin de déterminer le potentiel incrémental condensé effectif  $\tilde{w}_\Delta$ , on applique la procédure incrémentale variationnelle proposée par Lahellec et Suquet [10] et basée sur l'approche introduite par Ponte Castañeda [16] pour les composites non linéaires.

En raison du couplage de l'élasticité et de l'endommagement, on approche le potentiel incrémental  $J$  par un potentiel incrémental linéarisé  $J_0$  choisi sous la forme :

$$\begin{cases} J_0(x, \varepsilon, d) = \sum_{r=1}^N J_0^{(r)}(\varepsilon, d) \chi^{(r)}(x) \\ J_0^{(r)} = \frac{1}{2} (1 - d)^2 \mathcal{A}_0^{(r)} + \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C}_0^{(r)} : \varepsilon + \mathcal{Y}_c (d - d_n) + \Delta t \Psi_c \left( \frac{d - d_n}{\Delta t} \right) \end{cases} \quad (14)$$

où  $\mathcal{A}_0^{(r)}$  est un scalaire uniforme par phase et  $\mathbb{C}_0^{(r)}$  est un tenseur d'ordre 4 ayant les symétries du tenseur d'élasticité, également uniforme par phase. L'approximation du potentiel incrémental condensé se fait en ajoutant et en soustrayant au potentiel  $J$  le potentiel incrémental linéarisé  $J_0$  i.e.  $J = J_0 + J - J_0$ , de sorte que, d'une part, le premier terme  $J_0$  puisse être homogénéisé à l'aide de schémas classiques

d'homogénéisation, et d'autre part, la différence  $J - J_0$  puisse être estimée de manière semi-analytique. La différence  $\Delta J = J - J_0$  des potentiels s'écrit alors

$$\begin{cases} \Delta J(x, \varepsilon, d) = \sum_{r=1}^N \Delta J^{(r)}(\varepsilon, d) \chi^{(r)}(x) \\ \Delta J^{(r)} = \frac{1}{2} (1-d)^2 \left[ \varepsilon : \mathbb{C}_s^{(r)} : \varepsilon - \mathcal{A}_0^{(r)} \right] - \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C}_0^{(r)} : \varepsilon \end{cases} \quad (15)$$

En remplaçant  $J$  par son expression dans le problème variationnel, le potentiel incrémental condensé effectif s'exprime comme

$$\tilde{w}_\Delta(E) = \inf_{\varepsilon / \langle \varepsilon \rangle = E} \left[ \inf_{d / \Psi_c(d)} \langle J_0(\varepsilon, d) + \Delta J(\varepsilon, d) \rangle \right] \quad (16)$$

Comme dans Lahellec et Suquet [10], une borne supérieure rigoureuse de  $\tilde{w}_\Delta$  peut être obtenue en prenant une condition de supremum de  $\Delta J$  par rapport à  $(\varepsilon, d)$  :

$$\tilde{w}_\Delta(E) \leq \inf_{\varepsilon / \langle \varepsilon \rangle = E} \left[ \inf_{d / \Psi_c(d)} \langle J_0(\varepsilon, d) \rangle + \sup_{\varepsilon^*, d^*} \langle \Delta J(\varepsilon, d) \rangle \right] \quad (17)$$

Lahellec et Suquet [9, 10] ont montré que cette borne supérieure peut être trop forte dans certains cas. Comme dans Ponte Castañeda et Willis [17] et Ponte Castañeda [18], elle peut être relaxée en remplaçant la condition de supremum par une condition de stationnarité. Finalement on optimise par rapport aux paramètres introduits dans  $J_0$ , ce qui donne l'estimation finale de  $\tilde{w}_\Delta$

$$\tilde{w}_\Delta(E) \approx \text{stat}_{\mathcal{A}_0^{(r)}, \mathbb{C}_0^{(r)}} \left[ \inf_{\varepsilon / \langle \varepsilon \rangle = E} \left( \inf_{d / \Psi_c(d)} \langle J_0(\varepsilon, d) \rangle + \text{stat}_{\varepsilon^*, d^*} \langle \Delta J(\varepsilon, d) \rangle \right) \right] \quad (18)$$

### 2.2.2 Résolution des conditions de stationnarité

On se propose maintenant de développer toutes les conditions de stationnarité apparaissant dans (18). On procédera d'abord à l'écriture de la stationnarité de  $\Delta J$  par rapport à  $d^*$  et à  $\varepsilon^*$  ce qui fournira une expression des paramètres  $\mathcal{A}_0^{(r)}$  et  $\mathbb{C}_0^{(r)}$ . La stationnarité par rapport à ces paramètres permettra ensuite de compléter leurs expressions. Enfin, la stationnarité de  $J_0$  par rapport à  $d$  fournira une expression de l'endommagement en fonction de  $\varepsilon$ .

#### Stationnarité de $\Delta J$

Commençons donc par la stationnarité de  $\Delta J$  (15) par rapport à  $\varepsilon^*$ , elle s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon^*} \left\{ \frac{1}{2} (1-d^*)^2 \left[ \varepsilon^* : \mathbb{C}_s^{(r)} : \varepsilon^* - \mathcal{A}_0^{(r)} \right] - \frac{1}{2} \varepsilon^* : \mathbb{C}_0^{(r)} : \varepsilon^* \right\} = 0 \quad (19)$$

ce qui implique

$$\implies \mathbb{C}_0^{(r)} = (1-d^*)^2 \mathbb{C}_s^{(r)} \quad (20)$$

Quant à la stationnarité de  $\Delta J$  au point  $x$  en fonction de  $d^*$ , elle conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial d^*} \left\{ \frac{1}{2} (1 - d^*)^2 \left[ \varepsilon^* : \mathbb{C}_s^{(r)} : \varepsilon^* - \mathcal{A}_0^{(r)} \right] - \frac{1}{2} \varepsilon^* : \mathbb{C}_0^{(r)} : \varepsilon^* \right\} = 0 \quad (21)$$

On obtient une expression du premier paramètre introduit dans  $J_0$  :

$$\implies \mathcal{A}_0^{(r)} = \varepsilon^* : \mathbb{C}_s^{(r)} : \varepsilon^* \quad (22)$$

### Minimisation de $J_0^{(r)}$

On obtient un Milieu Linéaire de Comparaison (MLC) en minimisant  $J_0^{(r)}$  par rapport à  $d$ . Et du fait de la stationnarité de  $\Delta J$  par rapport à  $\varepsilon^*$ , on peut alors écrire :

$$\tilde{w}_\Delta(E) \approx \text{stat}_{\mathcal{A}_0^{(r)}, \mathbb{C}_0^{(r)}} \left[ \inf_{\varepsilon / \langle \varepsilon \rangle = E} \langle w_0(\varepsilon) \rangle + \text{stat}_{\varepsilon^*, d^*} \langle \Delta J(\varepsilon, d) \rangle \right] \quad (23)$$

Au vu de la condition d'irréversibilité, la minimisation de  $J_0^{(r)}$  en fonction de  $d$  est écrite en ayant recours aux conditions d'optimalité de KKT. On obtient alors

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial d} \left\{ \frac{1}{2} (1 - d)^2 \mathcal{A}_0^{(r)} + \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C}_0^{(r)} : \varepsilon + \mathcal{Y}_c(d - d_n) \right\} + \lambda = 0 \\ \lambda \left( \frac{d - d_n}{\Delta t} \right) = 0 \\ \lambda \leq 0 \quad ; \quad \frac{d - d_n}{\Delta t} \geq 0 \end{cases} \quad (24)$$

**Cas 1.**  $\lambda < 0$ . D'après (24)<sub>2</sub>, cette hypothèse conduit à  $d = d_n$  qui revient au cas élastique sans présence ou évolution d'endommagement. Ce cas ne sera donc pas retenu.

**Cas 2.**  $\lambda = 0$ . D'après (24)<sub>1</sub>, cette hypothèse conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial d} \left\{ \frac{1}{2} (1 - d)^2 \mathcal{A}_0^{(r)} + \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C}_0^{(r)} : \varepsilon + \mathcal{Y}_c(d - d_n) \right\} = 0 \quad (25)$$

C'est ce cas que nous retenons. On obtient une expression de l'endommagement :

$$d_{opt}^{(r)} = 1 - \frac{\mathcal{Y}_c}{\mathcal{A}_0^{(r)}} \quad (26)$$

Compte tenu de l'uniformité des paramètres définissant  $d_{opt}^{(r)}$ , on en déduit que le modèle conduit à un endommagement uniforme par phase.

L'énergie associée au MLC s'écrit alors :

$$w_0^{(r)}(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left( 1 - d_{opt}^{(r)} \right)^2 \mathcal{A}_0^{(r)} + \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C}_0^{(r)} : \varepsilon + \mathcal{Y}_c \left( d_{opt}^{(r)} - d_n \right) \quad (27)$$



La fonctionnelle (23) peut s'écrire en appliquant la condition de minimisation par rapport à  $\varepsilon$  :

$$\tilde{w}_\Delta(E) \approx \text{stat}_{\mathcal{A}_0^{(r)}, \mathbb{C}_0^{(r)}} \left[ \tilde{w}_0(E) + \text{stat}_{\varepsilon^*, d^*} \langle \Delta J(\varepsilon, d) \rangle \right] \quad (28)$$

où

$$\tilde{w}_0(E) = \inf_{\varepsilon / \langle \varepsilon \rangle = E} \langle w_0(\varepsilon) \rangle \quad (29)$$

Et enfin, en considérant les conditions d'optimalité ci-après, on pourra déterminer les expressions des termes  $\mathcal{A}_0^{(r)}$  et  $\mathbb{C}_0^{(r)}$ .

**Stationnarité de  $\langle J_0^{(r)} + \Delta J^{(r)} \rangle^{(r)}$**

L'optimalité par rapport à  $\mathcal{A}_0^{(r)}$  et  $\mathbb{C}_0^{(r)}$  permet de définir le lien entre  $(\varepsilon^*, d^*)$  et les variables  $(\varepsilon, d)$  :

$$\text{stat}_{\mathcal{A}_0^{(r)}} \langle J_0^{(r)} + \Delta J^{(r)} \rangle^{(r)} \implies \langle (1-d)^2 \rangle^{(r)} = \langle (1-d^*)^2 \rangle^{(r)} \quad (30)$$

$$\text{stat}_{\mathbb{C}_0^{(r)}} \langle J_0^{(r)} + \Delta J^{(r)} \rangle^{(r)} \implies \begin{cases} \langle \varepsilon : \mathbb{K} : \varepsilon \rangle^{(r)} = \langle \varepsilon^* : \mathbb{K} : \varepsilon^* \rangle^{(r)} \\ \langle \varepsilon : \mathbb{J} : \varepsilon \rangle^{(r)} = \langle \varepsilon^* : \mathbb{J} : \varepsilon^* \rangle^{(r)} \end{cases} \quad (31)$$

où  $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$  représente le projecteur déviatorique des tenseurs d'ordre quatre isotrope ayant les symétries d'un tenseur d'élasticité, tandis que  $\mathbb{I}$  est le tenseur identité d'ordre quatre symétrique et  $\mathbb{J}$  le projecteur sphérique dont les expressions sont respectivement  $\mathbb{I}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$  et  $\mathbb{J} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$ .

On note  $\langle a \rangle^{(r)}$  la moyenne de la grandeur  $a$  considérée sur la phase  $(r)$ .

À partir de (22) et (31), le paramètre  $\mathcal{A}_0^{(r)}$  peut alors être obtenu à l'aide de l'estimation du moment d'ordre deux du champ de déformation :

$$\mathcal{A}_0^{(r)} = \langle \varepsilon : \mathbb{C}_s^{(r)} : \varepsilon \rangle^{(r)} \quad (32)$$

C'est la moyenne sur la phase  $r$  de l'énergie élastique du milieu non endommagé.

En utilisant le résultat (32) on peut réécrire (26) sous la forme suivante

$$\left(1 - d_{opt}^{(r)}\right) \langle \varepsilon : \mathbb{C}_s^{(r)} : \varepsilon \rangle^{(r)} - \mathcal{Y}_c = 0 \quad (33)$$

La relation (26) peut ainsi s'interpréter comme suit : l'endommagement  $d_{opt}^{(r)}$ , homogène et associé à la phase  $r$ , résulte d'une saturation en moyenne du critère d'endommagement.

Enfin, en utilisant les résultats (30) et (32), et en portant (26) dans (20), on obtient l'expression de  $\mathbb{C}_0^{(r)}$

$$\mathbb{C}_0^{(r)} = \left(1 - d_{opt}^{(r)}\right)^2 \mathbb{C}_s^{(r)} = \left( \frac{\mathcal{Y}_c}{\langle \varepsilon : \mathbb{C}_s^{(r)} : \varepsilon \rangle^{(r)}} \right)^2 \mathbb{C}_s^{(r)} \quad (34)$$

qui représente l'élasticité du Milieu Linéaire de Comparaison (MLC) décrit par  $w_0(\varepsilon)$  (27).

### 2.2.3 Réponse effective du composite élasto-endommageable

Afin d'obtenir le comportement du composite, on procède à la minimisation de (18) par rapport à  $\varepsilon$ . Cette fonctionnelle est stationnaire par rapport à  $\mathcal{A}_0^{(r)}$ ,  $\mathbb{C}_0^{(r)}$  et  $d$  et le terme  $\Delta J$  de cette fonctionnelle est stationnaire par rapport à  $\varepsilon^*$  et à  $d^*$ . Compte tenu de cela, nous pouvons définir le problème local qui correspond aux équations d'Euler-Lagrange fournissant la solution du problème variationnel :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(x) = 0 & \text{pour tout } x \in \Omega \\ \sigma(x) = \mathbb{C}_0^{(r)} : \varepsilon(x) & \text{pour tout } x \in \Omega \\ \langle \varepsilon(x) \rangle = E & + \text{ Conditions aux limites sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (35)$$

Le comportement effectif du composite non linéaire peut alors être approché à partir de l'estimation :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \langle \sigma(x) \rangle = \frac{\partial \tilde{w}_\Delta}{\partial E}(E) \approx \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial E}(E) \\ &= \sum_{r=1}^N c^{(r)} \mathbb{C}_0^{(r)} : \langle \varepsilon(x) \rangle = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \mathbb{C}_0^{(r)} : [\mathbb{A}^{(r)} : E] \end{aligned} \quad (36)$$

où  $\mathbb{A}^{(r)}$  est un tenseur d'ordre quatre qui correspond au tenseur de localisation des déformations dans la phase  $(r)$ . Et  $c^{(r)}$  est la fraction volumique de la phase  $(r)$  telle que :  $c^{(r)} = \frac{|\Omega^{(r)}|}{|\Omega|}$ .

Dans ce qui suit, nous appliquons la procédure développée au cas de matériaux élasto-endommageables renforcés par des particules élastiques linéaires sphériques distribuées de manière aléatoire et isotrope (2 phases). Pour cela, afin de calculer le comportement effectif du composite ainsi que les moments d'ordre un et deux des différents champs de chaque phase, nous avons utilisé l'estimation de Hashin-Shtrikman. Dans le cas de ce biphasé, l'élasticité de la phase inclusionnaire est donnée par :  $\mathbb{C}_0^{(1)} = \mathbb{C}_s^{(1)}$ .

Dans la phase matricielle, l'expression de  $\mathbb{C}_0^{(2)}$  qui caractérise le MLC  $w_0$  est obtenu à partir de (34). Le problème non linéaire se réduit ainsi à la résolution de deux équations d'inconnues  $\mathcal{A}_0^{(2)}$  et  $\mathbb{C}_0^{(2)}$  :

$$\begin{cases} F_1(\mathcal{A}_0^{(2)}, \mathbb{C}_0^{(2)}) = \mathcal{A}_0^{(2)} - \langle \varepsilon : \mathbb{C}_s^{(2)} : \varepsilon \rangle^{(2)} = 0 \\ F_2(\mathcal{A}_0^{(2)}, \mathbb{C}_0^{(2)}) = \mathbb{C}_0^{(2)} - \left( \frac{\mathcal{Y}_c}{\langle \varepsilon : \mathbb{C}_s^{(2)} : \varepsilon \rangle^{(2)}} \right)^2 \mathbb{C}_s^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (37)$$

La résolution du système permet alors de déterminer l'endommagement puis le comportement effectif.

## 3 Application et évaluation du modèle pour un biphasé

### 3.1 Les équations à résoudre dans le cas d'un composite isotrope

On se place désormais dans le cas de composite à matrice élasto-endommageable isotrope renforcée par des particules sphériques. Dans un tel cas, le tenseur d'élasticité isotrope des phases, prend la forme générale

$$\mathbb{C}^{(r)} = 3k^{(r)} \mathbb{J} + 2\mu^{(r)} \mathbb{K} \quad (38)$$

où  $\mathbb{K}$  représente le projecteur déviatorique et  $\mathbb{J}$  le projecteur sphérique.

Nous avons mis en place un algorithme qui consiste à déterminer, pour un chargement donné et défini en terme de déformation macroscopique  $E$ , la contrainte macroscopique  $\Sigma$ , les premier et second moments des champs de contrainte et de déformation. Le problème est résolu de manière itérative en déterminant la solution au temps  $t_{n+1}$  à partir de la solution connue au temps  $t_n$ .

- La première étape consiste à résoudre le système non linéaire (37). L'équation  $F_2$  de ce système peut être découpée en partie sphérique et en partie déviatorique

$$\begin{cases} F_1(\mathcal{A}_0^{(2)}, \mathbb{C}_0^{(2)}) = \mathcal{A}_0^{(2)} - \left( 3k_s^{(2)} \left( \overline{\overline{\varepsilon}}_m^{(2)} \right)^2 + 3\mu_s^{(2)} \left( \overline{\overline{\varepsilon}}_d^{(2)} \right)^2 \right) = 0 \\ F_2^{sph}(\mathcal{A}_0^{(2)}, \mathbb{C}_0^{(2)}) = k_0^{(2)} - \left( \frac{\mathcal{Y}_c}{\mathcal{A}_0^{(2)}} \right)^2 k_s^{(2)} = 0 \\ F_2^{dev}(\mathcal{A}_0^{(2)}, \mathbb{C}_0^{(2)}) = \mu_0^{(2)} - \left( \frac{\mathcal{Y}_c}{\mathcal{A}_0^{(2)}} \right)^2 \mu_s^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

avec  $\overline{\overline{\varepsilon}}_m^{(2)}$  le second moment de la partie sphérique du tenseur de déformation, et  $\overline{\overline{\varepsilon}}_d^{(2)}$  celui de sa partie déviatorique<sup>2</sup>.

La résolution du système (39) fournit les caractéristiques élastiques du MLC. À cette fin, nous utilisons la fonction `LEAST_SQUARES` sur Python qui permet la résolution non linéaire du système en faisant appel à l'algorithme de Levenberg-Marquardt. Il est à présent possible de déterminer l'énergie  $w_0^{(r)}$  du MLC à propriétés homogènes par phase ainsi que les valeurs de l'endommagement de la matrice.

- La deuxième étape consiste à calculer les paramètres homogénéisés définissant l'énergie  $\tilde{w}_0$  ainsi que les statistiques des champs locaux, en mettant en oeuvre une borne de type Hashin-Shtrikman. Une fois tous ces paramètres déterminés, nous pouvons procéder au calcul de la contrainte macroscopique  $\Sigma$  que l'on obtient à l'aide de l'équation (36).

### 3.2 Approche numérique par méthode de champ de phase

Les résultats du modèle théorique sont comparés aux prédictions numériques issues de calculs en champ complet réalisés par Eléments Finis (EF). A cette fin, une approche par champ de phase (voir [3]) a été mise en place. Elle permet d'obtenir le comportement effectif du composite et l'évolution du champ d'endommagement dans la matrice. Nous mettons en oeuvre un modèle d'endommagement régularisé, par considération du gradient de l'endommagement. Un tel choix permet d'éviter des problèmes pathologiques de dépendance au maillage Eléments Finis. L'approche variationnelle par champ de phase consiste en pratique à minimiser une fonctionnelle à deux champs (le déplacement et l'endommagement) sur la structure considérée. Elle s'interprète aussi comme un modèle à gradient d'endommagement [14]. Dans cette perspective, on peut montrer (voir [7], ou dans cette conférence [8]) que le modèle de [3] peut être retrouvé via les potentiels thermodynamique et de dissipation suivants :

$$\begin{cases} w(\varepsilon, d) = \frac{1}{2} (1-d)^2 \varepsilon : \mathbb{C} : \varepsilon \\ \varphi(\dot{d}, \nabla d) = \mathcal{Y}_c \dot{d} + 2l_0^2 \mathcal{Y}_c \nabla d \cdot \nabla \dot{d} \end{cases} \quad (40)$$

2.  $\varepsilon_m = 1/3 \text{tr}(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon_d = \varepsilon - \varepsilon_m \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}$  : tenseur d'identité d'ordre 2

La fonctionnelle d'énergie associée au modèle régularisé s'écrit alors (voir [7])

$$\mathcal{E}(u, d) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (1-d)^2 \varepsilon(u) : \mathbb{C}_s : \varepsilon(u) \right) d\Omega + \mathcal{Y}_c \int_{\Omega} (d + l_0^2 \nabla d \cdot \nabla d) d\Omega \quad (41)$$

La détermination de  $l_0$  s'appuie sur une approche classique qui consiste à rapprocher le modèle d'endommagement régularisé du modèle de Griffith, en postulant que l'énergie dissipée par endommagement dans le processus de rupture est équivalente à l'énergie de fracture de Griffith. Un tel procédé, par exemple bien décrit dans [14] conduit alors classiquement pour le modèle considéré ici à :  $l_0 = \frac{3G_c}{8\mathcal{Y}_c}$  où  $G_c$  représente l'énergie de rupture.

De manière triviale, la fonctionnelle à minimiser prend alors la forme :

$$\mathcal{E}(u, d) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (1-d)^2 \varepsilon(u) : \mathbb{C}_s : \varepsilon(u) \right) d\Omega + \frac{3}{8} G_c \int_{\Omega} \left( \frac{d}{l_0} + l_0 \nabla d \cdot \nabla d \right) d\Omega \quad (42)$$

qui est précisément celle de l'approche par champ de phase dite classiquement AT1.

Il est bien entendu tout à fait possible de construire, par des choix différents des 2 potentiels convexes, d'autres lois d'endommagement régularisées (par exemple modèle AT2 dans [3], ou modèle avec écrouissage dans [7]).

Comme dans [3], les minimas de cette fonctionnelle sont recherchés à travers un algorithme de minimisation alternée.

### 3.3 Illustration et évaluation des prédictions du modèle théorique

Pour l'illustration des prédictions du modèle d'homogénéisation non linéaire proposé, ainsi que leur évaluation, le composite étudié est soumis à une déformation macroscopique isochore définie par

$$E(t) = E_{33}(t) \left( -\frac{1}{2} (e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) + e_3 \otimes e_3 \right) \quad (43)$$

A l'instar de Fantoni et al. [4], le volume élémentaire représentatif est composée ici d'une matrice d'aluminium susceptible à l'endommagement et des inclusions à comportement élastique linéaire correspondant à du carbure de silicium. Les paramètres matériaux considérés sont ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Inclusions élastiques linéaires : } E^{(1)} &= 340 \text{ MPa, } \nu^{(1)} = 0.18, \quad f = 25\% \\ \text{Matrice non endommagée : } E^{(2)} &= 60 \text{ MPa, } \nu^{(2)} = 0.3, \quad \mathcal{Y}_c = 4.8 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (44)$$

La valeur de l'énergie de rupture issue de la même référence est  $G_c = 6 \text{ N/mm}$ , ce qui donne pour la longueur interne  $l_0 = 0.47 \text{ mm}$ . Cette dernière valeur est à comparer au rayon de l'inclusion (hétérogénéité du milieu) qui vaut  $2.34 \text{ mm}$  dans l'application réalisée, soit 5 fois plus grand.

Dans la Fig.1(a) nous représentons la réponse macroscopique du composite sous le chargement considéré. Quant aux Fig.1(b), (c), elles illustrent respectivement l'évolution de la moyenne des contraintes dans la matrice et dans l'inclusion en fonction de la déformation macroscopique. Les calculs EF ont été effectués sur un huitième d'une cellule cubique contenant une inclusion sphérique (morphologie matrice-inclusion). La matrice est bien entendu élasto-endommageable.

Dans la Fig.(1), aussi bien pour le composite que pour la matrice, on distingue deux régimes. Le premier régime correspond à la réponse initiale qui est purement élastique, tandis que le second régime est caractérisé par une réponse adoucissante consécutive au développement de l'endommagement matriciel. Nous observons sur la Fig.1 que les prédictions sont qualitativement en bon accord pour ce qui concerne la réponse du composite et la moyenne de la contrainte locale dans la matrice. On note toutefois un décalage entre les contraintes seuils d'endommagement observées dans le calcul numérique et le modèle théorique.

Pour ce qui concerne la moyenne des contraintes dans l'inclusion élastique, l'accord entre les prédictions du modèle et les résultats numériques est moins bon. Un point remarquable est la diminution de la contrainte moyenne dans l'inclusion à partir de l'instant correspondant à l'adoucissement dans la matrice, alors que l'inclusion a un comportement élastique linéaire. Un examen de l'évolution des déformations moyennes dans l'inclusion indique qu'il s'agit bien d'une décharge de celle-ci simultanément à la phase d'adoucissement de la matrice. Ceci est bien illustré sur la Fig.1(d) donnant l'évolution de la moyenne de la déformation locale dans l'inclusion en fonction de la déformation macroscopique.

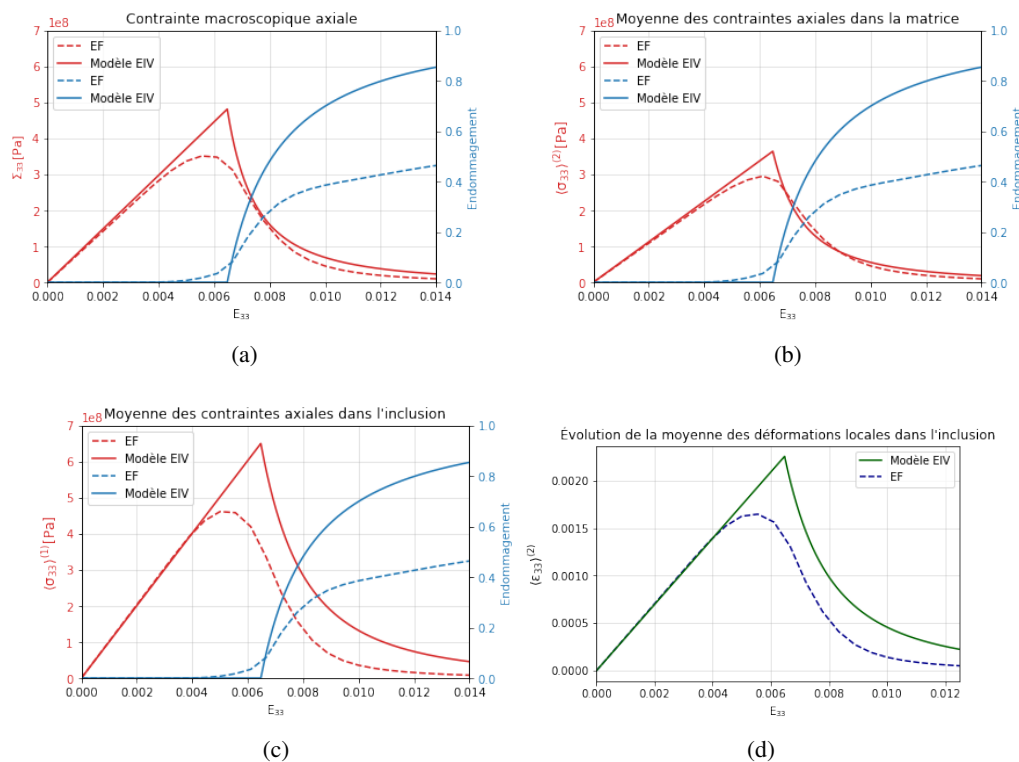


FIGURE 1 – Composite renforcé par des particules élastiques soumis une déformation macroscopique isochore - trait continu : modèle, trait discontinu : EF (a) Contrainte axiale macroscopique, (b) Moyenne de la contrainte axiale dans la matrice, (c) Moyenne de la contrainte axiale dans l'inclusion (d) Évolution de la moyenne de la déformation locale au niveau de l'inclusion en fonction de la déformation macroscopique

Sur les mêmes courbes sont également représentées l'évolution de l'endommagement avec le chargement. Pour le modèle théorique il s'agit de l'endommagement homogène de la matrice fourni par l'équation (26), tandis que pour les simulations par EF nous représentons l'évolution de la moyenne de la valeur de l'endommagement hétérogène dans la matrice.

Il est important de rappeler que dans le modèle théorique proposé, la valeur de l'endommagement, ho-

mogène, est déterminée par saturation du critère d'endommagement par les second moments de la déformation dans la phase,  $(\overline{\varepsilon}_m^{(2)})$  et  $(\overline{\varepsilon}_d^{(2)})$ . Quant au calcul en champ complet, on observe une forte hétérogénéité de la distribution de l'endommagement dans la matrice. La moyenne de l'endommagement dans la matrice, issue des résultats numériques apparaît plus basse comparativement au champ homogène prédit par le modèle (voir Fig.(1)). Ceci est manifestement dû à la forte localisation du champ d'endommagement notamment pour les niveaux de déformations macroscopiques les plus élevés (Fig.(2)).

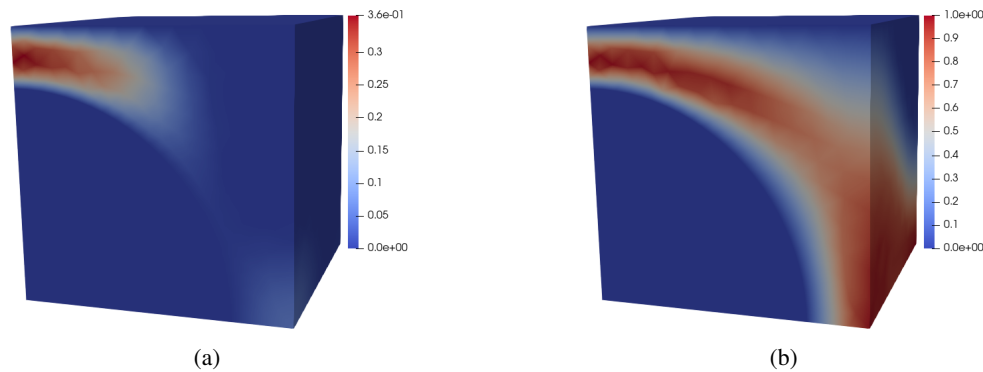


FIGURE 2 – Distribution du champ d'endommagement dans la matrice à différents niveaux de chargement. (a) Distribution de l'endommagement pour un niveau de chargement correspondant à la contrainte macroscopique maximale, (b) Distribution de l'endommagement lorsque  $d(x)$  atteint la valeur 1 localement pour la première fois

Pour être complet, on soulignera que l'uniformité de l'endommagement dans le modèle théorique développé vient de la procédure de linéarisation appliquée. En procédant différemment il serait possible de mieux rendre compte de l'hétérogénéité de l'endommagement au sein de la matrice. Ceci permettrait probablement de mieux prédire le début de l'adoucissement du composite. Bien que cette piste soit porteuse d'améliorations du modèle, nous explorons actuellement pour les phénomènes d'endommagement une approche du type DIV (double procédure incrémentale variationnelle) telle que proposée par [12, 13] en élasto(visco)plasticité et traitant de manière séquentielle les étapes de linéarisation du comportement local et d'uniformisation.

## 4 Conclusion

Dans cette étude nous avons proposé une procédure incrémentale variationnelle pour déterminer le comportement effectif de composites élasto-endommageables, en se basant principalement sur l'approche EIV introduite par Lahellec et Suquet [10]. Le modèle proposé a été développé pour des composites constitués de phases élasto-endommageables dont le comportement est décrit dans le cadre des Matériaux Standards Généralisés à l'aide de deux potentiels convexes que sont l'énergie libre et le potentiel de dissipation. On a ainsi introduit un potentiel unique tenant compte des effets conservatifs et dissipatifs dus à l'endommagement, le potentiel incrémental condensé. Ce dernier est approché par un potentiel linéarisé permettant, via la procédure variationnelle, d'obtenir un MLC à propriétés homogènes par phase. À partir de là, nous avons pu ensuite obtenir les paramètres effectifs définissant le potentiel de ce MLC ainsi que les moments d'ordre un et deux des champs locaux en appliquant une méthode d'homogénéisation linéaire classique. À l'issue de la mise en oeuvre numérique du modèle, nous avons confronté ces prédictions à des résultats de calculs en champs complets réalisés à l'aide d'une approche par champ de phase. Ces simulations numériques ont été menées sur un composite constitué d'une matrice élasto-

endommageable renforcée par une inclusion sphérique élastique linéaire et isotrope. Ce composite a été soumis à une déformation macroscopique isochore. Un accord a été noté entre les deux approches pour la réponse macroscopique du composite et pour la moyenne de la contrainte dans la matrice. Cependant, pour la moyenne de la contrainte dans l'inclusion, les prédictions du modèle surestiment les résultats issus des simulations numériques. Il est néanmoins remarquable que les modèles théorique et numérique prédisent tous les 2 une décharge élastique dans l'inclusion, décharge consécutive à l'adoucissement de la matrice. Le modèle proposé peut être amélioré en adoptant une autre procédure de linéarisation qui viserait une meilleure prise en compte de l'hétérogénéité de l'endommagement dans la matrice. Celle-ci sera quantifiée en ayant recours aux fluctuations des champs dans les phases. Enfin, une perspective importante à cette première étape de modélisation est l'investigation de la réponse des composites élasto-endommageables sous des chargements multiaxiaux, et des chargements multi-cycliques.

## Références

- [1] Agoras M., Avazmohammadi R., Ponte-Castañeda P., Incremental variational procedure for elasto-viscoplastic composites and application to polymer and metal-matrix composites reinforced by spheroidal elastic particles. *International Journal of Solids and Structures*, 97, 668–686, 2016.
- [2] Ambrosio L., Tortorelli V.M., Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via convergence. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 43(8) :999–1036, 1990.
- [3] Bourdin B., Francfort G.A., Marigo J.J., Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48, 797–826, 2000.
- [4] Fantoni F. et al., A phase field approach for damage propagation in periodic microstructured materials. *International Journal of Fracture*, 223, 53–76, 2020.
- [5] Gauthier V., Modélisations de l'endommagement dans les milieux hétérogènes élastiques fragiles, *Thèse de doctorat, Aix-Marseille université*, 2021
- [6] Gauthier V., Masson R., Gârăjeu M., Michel B., Helfer T., Modélisation de l'amorçage et de la propagation de l'endommagement d'un milieu hétérogène de type matrice – inclusions soumis des dilatations différentielles *Congrès Français de Mécanique*, 2022
- [7] Kpotufe K., Modèles d'endommagement à gradient : cadre thermodynamique, formulation variationnelle et Applications *Thèse de doctorat, Université de Lomé - Sorbonne Université*, 2021
- [8] Kpotufe K. et al., A propos de deux classes de modèles à gradient d'endommagement : cadre thermodynamique, formulation variationnelle et applications *Congrès Français de Mécanique*, 2022
- [9] Lahellec N., Suquet P., Effective behavior of linear viscoelastic composites : a time integration approach. *International Journal of Solids and Structures*, 44 :507–529, 2006
- [10] Lahellec N., Suquet P., On the effective behavior of nonlinear inelastic composites : I. Incremental variational principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55, 1932–1963, 2007.
- [11] Lahellec N., Suquet P., Effective response and field statistics in elasto-plastic and elasto-viscoplastic composites under radial and non radial loading. *International Journal of Plasticity*, 42 :1–30, 2013.
- [12] Lucchetta A. et al., A double incremental variational procedure for elastoplastic composites with combined isotropic and linear kinematic hardening. *International Journal of Solids and Structures*, 158, 243–267, 2018.

- 
- [13] Lucchetta A., Homogénéisation des composites élasto-viscoplastiques écrouissables par une double procédure variationnelle incrémentale, *Thèse de doctorat, Sorbonne Université*, 2019
- [14] Marigo J.J., Maurini C., Pham K., An overview of the modelling of fracture by gradient damage models., *Meccanica*, 51(12) :3107–3128, 2016
- [15] Mercier S., Kowalczyk-Gajewska K., Czarnota C. Effective behavior of composites with combined kinematic and isotropic hardening based on additive tangent Mori–Tanaka scheme, *Composites Part B* 2019, 107052
- [16] Ponte Castañeda P., The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40 :1757–1788, 1991.
- [17] Ponte Castañeda P., Willis J.R., Variational second-order estimates for nonlinear composites. *Proceeding of the Royal Society A*, 445 :1799–1811, 1999
- [18] Ponte Castañeda P., Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations : I-theory *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :737–757, 2002.