



HAL
open science

Distance aux strates d'isotropie par optimisation polynomiale

Perla Azzi, Rodrigue Desmorat, Boris Kolev, Fabien Priziac

► **To cite this version:**

Perla Azzi, Rodrigue Desmorat, Boris Kolev, Fabien Priziac. Distance aux strates d'isotropie par optimisation polynomiale. 25e Congrès Français de Mécanique, Aug 2022, Nantes, France. hal-04280037

HAL Id: hal-04280037

<https://hal.science/hal-04280037>

Submitted on 10 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distance aux strates d'isotropie par optimisation polynomiale

P. AZZI^a, R. DESMORAT^b, B. KOLEV^c, F. PRIZIAC^d

a. IMJ-PRG (Sorbonne université), LMPS (ENS Paris-Saclay), perla.azzi@ens-paris-saclay.fr

b. LMPS (ENS Paris-Saclay), rodrigue.desmorat@ens-paris-saclay.fr

c. LMPS (ENS Paris-Saclay), boris.kolev@math.cnrs.fr

d. LMBA (Université Bretagne Sud), fabien.priziac@univ-ubs.fr

Résumé :

Nous présentons une méthode d'optimisation polynomiale permettant de résoudre un problème en mécanique des milieux continus : la détermination du tenseur modélisant une loi de comportement, ayant une symétrie spécifique le plus proche d'un tenseur donné (mesuré) en calculant la distance entre le tenseur donné et la strate de symétrie considérée. Nous profitons du fait que le carré de la distance est une fonction polynomiale coercive et que les strates de symétrie sont caractérisées par des équations polynomiales afin d'appliquer la méthode d'optimisation de Lasserre consistant à résoudre des problèmes d'optimisation polynomiale semi-algébrique. Nous appliquons cette méthode à des exemples en Thermodynamique, Piezoélectricité et Elasticité.

Abstract :

We present a polynomial optimization method allowing to solve a Continuum Mechanics identification problem : the determination of the nearest constitutive tensor having a specific symmetry to a given (measured) tensor by the calculation of the distance between the given tensor and the considered symmetry stratum. We take advantage of the fact that the distance square is a coercive polynomial function and the symmetry strata are characterized by sets of polynomial equations to apply Lasserre's optimization method consisting in solving semialgebraic polynomial optimization problems. We apply this method for three constitutive laws : Thermodynamics, Piezoelectricity and Elasticity.

Mots clefs : Optimisation polynomiale, strates d'isotropie, loi de comportement

1 Introduction

En mécanique du solide, l'état mécanique d'un matériau est décrit par des lois de comportement, modélisées par des tenseurs [14, 7, 4]. Par exemple, en *Thermodynamique*, le comportement d'un matériau suite à une modification dans sa température est donné par le tenseur de dilatation thermique qui est un tenseur d'ordre 2 (matrice symétrique de dimension 3) représenté par \mathbf{a} dans la loi suivante :

$$\epsilon = \mathbf{a}(\Delta t)$$

où ϵ est le tenseur des contraintes thermiques et Δt représente la variation en température.

D'une façon similaire, le comportement élastique d'un matériau est donné par le tenseur d'élasticité, un tenseur d'ordre 4 reliant le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur de déformation $\boldsymbol{\epsilon}$ dans la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\epsilon}.$$

Les questions liées à la symétrie des tenseurs peuvent être étudiées par la théorie des représentations des groupes. On considère la représentation du groupe des rotations $\text{SO}(3)$ ou $\text{O}(3)$ (qu'on notera G) sur l'espace V des tenseurs d'une loi de comportement. Selon l'invariance des tenseurs sous l'action de $\text{SO}(3)$, on les regroupe en classes de symétrie. Pour cela, on définit l'ensemble des rotations qui laissent fixe un tenseur \mathbf{T} , qu'on appelle *groupe d'isotropie* de \mathbf{T} (ou encore groupe de symétrie de \mathbf{T}) :

$$G_{\mathbf{T}} := \{g \in \text{SO}(3); \rho(g)\mathbf{T} = \mathbf{T}\}.$$

Ensuite, on définit une *classe de symétrie* comme étant l'ensemble des tenseurs ayant le même groupe d'isotropie à conjugaison près. En d'autres termes, deux tenseurs \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_2 ont même classe de symétrie si $G_{\mathbf{T}_1} = gG_{\mathbf{T}_2}g^{-1}$, $g \in G$.

Les tenseurs ayant un groupe de symétrie conjugué à un même sous groupe H de G sont regroupés dans un même ensemble noté $\Sigma_{[H]}$ et appelé *strate d'isotropie* :

$$\Sigma_{[H]} := \{\mathbf{T} \in V; G_{\mathbf{T}} \text{ et } H \text{ sont conjugués}\}.$$

Les strates d'isotropie fermées sont données par

$$\bar{\Sigma}_{[H]} = \{\mathbf{T} \in V; G_{\mathbf{T}} \supset g H g^{-1}; g \in \text{SO}(3)\}.$$

En général, étant donné un matériau expérimental, son tenseur d'élasticité mesuré (brut) est un tenseur triclinique, c'est-à-dire sans symétrie matérielle. Cependant, dans la pratique, une symétrie d'un tenseur constitutif est souvent attendue en observant la micro-structure d'un matériau. Par suite, chercher le tenseur, appartenant à une strate d'isotropie donnée, le plus proche de ce tenseur expérimental peut être intéressant. Pour cela, on calcule la distance du tenseur mesuré \mathbf{T}_0 à la strate d'isotropie choisie $\Sigma_{[H]}$ donnée par

$$(1) \quad d(\mathbf{T}_0, \bar{\Sigma}_{[H]})^2 := \min_{\mathbf{T} \in \bar{\Sigma}_{[H]}} f(\mathbf{T}), \quad f(\mathbf{T}) = \|\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}\|^2.$$

En profitant du fait que, dans les cas considérés, les strates fermées sont caractérisées par des équations et inéquations polynomiales ([2],[17]), le problème se réduit en un problème d'optimisation polynomiale. Précisément, nous appliquerons une méthode d'optimisation semi-algébrique développée par Lasserre [12, 9, 11] pour résoudre numériquement le problème de la minimisation d'une fonction polynomiale sous des contraintes polynomiales décrivant un ensemble semi-algébrique fermé. La méthode de Lasserre consiste à construire une suite de programmes semi-définis dont les valeurs optimales convergent vers le minimum désiré, sous une certaine hypothèse sur les contraintes. L'avantage est qu'il existe des algorithmes efficaces pour résoudre numériquement les programmes semi-définis. L'algorithme de Lasserre a été implémenté par Lasserre et Henrion [9] dans un logiciel sur Matlab nommé Gloptipoly. Cet algorithme extrait des minimisants (approchés) pour la fonction minimisée considérée lorsque son critère d'arrêt est satisfait.

2 Optimisation polynomiale : méthode de Lasserre

Dans cette section, on considère le problème d'optimisation suivant

$$(2) \quad f^* = \inf \{f(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in K\},$$

où $f \in \mathbb{R}[X] := \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et K est un ensemble semi-algébrique fermé

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; g_1(\mathbf{x}) \geq 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) \geq 0\},$$

avec $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[X]$ (voir [6, 5] pour des références complètes sur la géométrie semi-algébrique).

La méthode de Lasserre consiste à construire une suite relaxée de problèmes semi-définis positifs qui forment une suite convergente vers le minimum recherché. Cette convergence a lieu si les contraintes g_1, \dots, g_m satisfont la condition suivante

$$(3) \quad \exists N > 0 \text{ tq } N - \sum_{i=1}^n X_i^2 \in \mathbf{M}(g_1, \dots, g_m)$$

où

$$\mathbf{M}(g_1, \dots, g_m) := \left\{ \sigma_0 + \sum_{i=1}^m \sigma_i g_i; \sigma_0, \dots, \sigma_m \text{ somme de carré} \right\} \subset \mathbb{R}[X]$$

appelé *module quadratique* associé à g_1, \dots, g_m . L'hypothèse (3) est satisfaite dans plusieurs cas (voir [19, Theorem 1.1]). Pour plus de détails sur la méthode de Lasserre voir [12, 13, 19].

2.1 Reformulation du problème

En premier lieu, on remarque que le problème d'optimisation (2) peut être reformulé comme suit

$$(4) \quad f^* = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu; \mu \text{ probability measure on } \mathbb{R}^n \text{ with support in } K \right\}.$$

En effet, pour $\mathbf{x} \in K$, si $\delta_{\mathbf{x}}$ désigne la mesure de Dirac en \mathbf{x} , on a $f(\mathbf{x}) = \int f d\delta_{\mathbf{x}}$ et, inversement, si μ est une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^n avec support dans K ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) \geq \int_{\mathbb{R}^n} f^* d\mu(\mathbf{x}) = f^*.$$

Definition 2.1. [12, section 2.7.1] On désigne par $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$ l'espace vectoriel des suites de nombres réels indicés par \mathbb{N}^n (on prend l'ordre lexicographique gradué sur \mathbb{N}^n) et soit y une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$. Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on désigne par y_α le terme de y d'indice α . On définit alors la matrice infinie

$$M(y) = (y_{\alpha+\beta})_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n},$$

appelée la *matrice de moment* associé à y (il est à noter que $M(y)$ est symétrique).

De plus, si $g = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} g_\beta X^\beta \in \mathbb{R}[X]$, on note $g \cdot y := \left(\sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} g_\beta y_{\alpha+\beta} \right)_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$ et on appelle la matrice de moment $M(g \cdot y)$ la *matrice de localisation de y par rapport à g* .

Sous l'hypothèse (3), nous pouvons écrire le problème d'optimisation (4) comme suit

$$(5) \quad f^* = \inf_{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}} \left\{ \langle f, y \rangle; ; y_{(0, \dots, 0)} = 1, M(g_i \cdot y) \succeq 0, i \in \{0, \dots, m\} \right\}.$$

où, si $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$, $\langle f, y \rangle := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha y_\alpha$, et $g_0 := 1$. Ici, si M est une matrice finie ou infinie à coefficients réels, $M \succeq 0$ signifie que M est semi-définie positive.

La formulation (5) est une conséquence directe du résultat suivant qui est une reformulation du [12, théorème 2.44] et est dû à Putinar ([18]) et Jacobi–Prestel ([10]).

Theorem 2.2. *Supposons que les polynômes g_1, \dots, g_m décrivant l'ensemble semi-algébrique fermé K satisfont l'hypothèse (3). Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$, il existe une mesure borélienne finie de support K telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $y_\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{x}^\alpha d\mu(\mathbf{x})$ si et seulement si les matrices de moment (symétriques) $M(y)$, $M(g_1 \cdot y)$, \dots , $M(g_m \cdot y)$ sont semi-définies positives.*

2.2 Relaxation du problème

La méthode de Lasserre pour résoudre le problème d'optimisation (5) consiste alors à *relaxer* ce problème impliquant des matrices de dimension infinie en une suite de problèmes de dimension finie qui sont des *programmes semi-définis*. Les *programmes semi-définis*, ou SDP, sont des problèmes d'optimisation sur des matrices symétriques semi-définies positives qui généralisent les programmes linéaires, et pour lesquels il existe des algorithmes efficaces de résolution numérique. Les algorithmes de résolution des SDP incluent des méthodes inspirées de celles utilisées en programmation linéaire, telles que les méthodes de points intérieurs (voir par exemple les références [1, 20, 22, 23]).

Soit $v_i := \lceil \frac{\deg(g_i)}{2} \rceil$, pour $i \in \{0, \dots, n\}$, et $d_0 := \max(\lceil \frac{\deg(f)}{2} \rceil, v_1, \dots, v_m)$ alors pour tout entier d tel que $d \geq d_0$, on considère le problème d'optimisation relaxé à partir de (5) (voir [12, section 6.1.1])

$$(6) \quad \rho_d = \inf_{y \in \mathbb{R}^{\Lambda(2d)}} \{ \langle f, y \rangle; y_0 = 1, M_{d-v_i}(g_i \cdot y) \succeq 0, i \in \{0, \dots, m\} \},$$

où, pour $k \in \mathbb{N}$, $\Lambda(k)$ est défini par

$$\Lambda(k) := \{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n; \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k \}$$

et

$$M_{d-v_i}(y) := (y_{\alpha+\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda(d-v_i)}.$$

Le théorème suivant de Lasserre ([12, Théorème 6.2], voir aussi [19, Théorème 1.5]) affirme que la suite des optima $(\rho_d)_{d \geq d_0}$ converge vers f^* :

Theorem 2.3. (Lasserre) *La suite $(\rho_d)_{d \geq d_0}$ est une suite croissante qui converge vers f^* .*

2.3 Algorithme de résolution

Le principe de l'algorithme de Lasserre pour résoudre le problème (2) est de calculer numériquement la suite des optima $(\rho_d)_{d \geq d_0}$ en utilisant des solveurs SDP à chaque étape. Cet algorithme est implémenté dans un logiciel sur Matlab, *GloptiPoly* (pour plus de détails sur Gloptipoly et son utilisation, voir [9] et l'annexe B de [12]). Afin de résoudre une relaxation SDP ρ_d , $d \geq d_0$, GloptiPoly utilise par défaut le solveur SDP *SeDuMi* de Sturm [21].

Les entrées de Gloptipoly sont

- les variables X_1, \dots, X_n ,
- le polynôme $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ à minimiser,
- les contraintes $g_j \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, $j \in \{1, \dots, m\}$, satisfaisant l'hypothèse (3),
- un ordre de relaxation maximal $d_{\max} \geq d_0$.

A chaque degré de relaxation $d \leq d_{\max}$, Gloptipoly résout ρ_d à l'aide de SeDuMi. L'algorithme s'arrête lorsqu'une condition d'arrêt est satisfaite ([12, Theorem 6.6]). A ce moment-là, l'algorithme produit une approximation du minimum calculé et nous pouvons également demander à Gloptipoly d'extraire les minimisants, ce qui fait intervenir un autre algorithme, décrit dans [12, section 6.1.2]. Si jamais la condition d'arrêt n'était pas satisfaite pour tous les degrés de relaxation $d \leq d_{\max}$, Gloptipoly affiche une borne inférieure du minimum recherché. Pour pousser les calculs plus loin, il faut relancer Gloptipoly avec d_{\max} augmenté de 1.

On conclut cette partie par la remarque suivante : la convergence finie de la méthode d'optimisation polynomiale de Lasserre n'a lieu que lorsque l'ensemble des contraintes est un ensemble compact semi-gébrique satisfaisant la propriété (3). Cependant, lorsque cette condition n'est pas satisfaite mais que la fonction polynomiale f est coercive, Jeyakumar–Lasserre–Li dans [11] fournissent un moyen

de considérer le problème d'optimisation (2) comme un problème avec des contraintes satisfaisant la condition (3) :

Lemma 2.4. (*Jeyakumar–Lasserre–Li*) *Supposons que la fonction polynomiale $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ associée à $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est coercive, et soient $c > 0$ et $\mathbf{x}_0 \in K$ tels que $c > f(\mathbf{x}_0)$. Alors le module quadratique $\mathbf{M}(g_1, \dots, g_m, c - f)$ associé à l'ensemble semi-algébrique*

$$\tilde{K} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; ; g_1(\mathbf{x}) \geq 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) \geq 0, c - f(\mathbf{x}) \geq 0\}$$

satisfait l'hypothèse (3) (en particulier, \tilde{K} est compact). De plus,

$$f^* = \inf_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{x} \in \tilde{K}} f(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in \tilde{K}} f(\mathbf{x}).$$

2.4 Application numérique en élasticité

Dans cette section, nous appliquons la méthode de Lasserre pour déterminer le tenseur d'élasticité ayant une symétrie spécifique le plus proche d'un tenseur expérimental.

L'objet mécanique principal de cette section est le tenseur d'élasticité $\mathbf{E} : \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ qui est un tenseur d'ordre 4 ayant des symétries indicielles

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{klij}.$$

Nous désignons par $\mathbb{E}a$ l'espace vectoriel des tenseurs d'élasticité.

Un tenseur d'élasticité (générique) possède 21 composantes indépendantes et peut être représenté par une matrice symétrique 6×6 (en notation de Voigt)

$$(7) \quad [\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1123} & E_{1113} & E_{1112} \\ E_{1122} & E_{2222} & E_{2233} & E_{2223} & E_{1223} & E_{1222} \\ E_{1133} & E_{2233} & E_{3333} & E_{2333} & E_{1333} & E_{1233} \\ E_{1123} & E_{2223} & E_{2333} & E_{2323} & E_{2331} & E_{2312} \\ E_{1113} & E_{1223} & E_{1333} & E_{2331} & E_{1313} & E_{3112} \\ E_{1112} & E_{1222} & E_{1233} & E_{2312} & E_{3112} & E_{1212} \end{pmatrix}$$

L'espace vectoriel $\mathbb{E}a$ peut être décomposé en somme directe de sous-espaces irréductibles ([3])

$$\mathbb{E}a = \mathbb{H}^0(\mathbb{R}^3) \oplus \mathbb{H}^0(\mathbb{R}^3) \oplus \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3) \oplus \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3) \oplus \mathbb{H}^4(\mathbb{R}^3)$$

où $\mathbb{H}^n(\mathbb{R}^3)$ désigne l'espace vectoriel des tenseurs harmoniques (les tenseurs totalement symétriques de trace nulle) d'ordre n . Cette décomposition est appelée la *décomposition harmonique* de $\mathbb{E}a$. Ainsi tout tenseur $\mathbf{E} \in \mathbb{E}a$ peut être écrit comme

$$\mathbf{E} = (\alpha, \beta, \mathbf{d}', \mathbf{v}', \mathbf{H}),$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{H}^0(\mathbb{R}^3)$ (les *composantes isotropes* de \mathbf{E}), $\mathbf{d}', \mathbf{v}' \in \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3)$ (les *composantes harmoniques* d'ordre 2 de \mathbf{E}) et $\mathbf{H} \in \mathbb{H}^4(\mathbb{R}^3)$ (la *composante harmonique* d'ordre 4 de \mathbf{E}).

Nous allons maintenant appliquer la méthode d'optimisation polynomiale décrite précédemment à l'exemple non trivial d'un tenseur d'élasticité expérimental représentant le superalliage monocristallin à base de nickel CMSX4, extrait de [8]. Ce matériau présente une symétrie attendue, à savoir la symétrie cubique [O], déduite de sa microstructure cubique (voir figure 1).

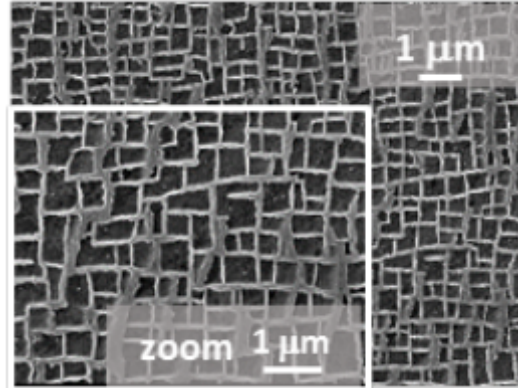


FIGURE 1 – Microstructure cubique du superalliage monocristallin CMSX-4 à base Nickel [15].

Cependant, son tenseur d'élasticité mesuré \mathbf{E}_0 est triclinique (sans symétrie). Il est représenté par la matrice de Voigt suivante, due à [8],

$$(8) \quad [\mathbf{E}_0] = \begin{pmatrix} 243 & 136 & 135 & 22 & 52 & -17 \\ 136 & 239 & 137 & -28 & 11 & 16 \\ 135 & 137 & 233 & 29 & -49 & 3 \\ 22 & -28 & 29 & 133 & -10 & -4 \\ 52 & 11 & -49 & -10 & 119 & -2 \\ -17 & 16 & 3 & -4 & -2 & 130 \end{pmatrix} \text{ GPa,}$$

et le but est de calculer le tenseur d'élasticité cubique \mathbf{E}^* le plus proche de \mathbf{E}_0 .

Nous utiliserons le résultat suivant, qui caractérise par des équations polynomiales la strate fermée d'élasticité cubique $\bar{\Sigma}_{[0]}$.

Theorem 2.5 (Olive et al [17]). *Soit $\mathbf{E} = (\alpha, \beta, \mathbf{d}', \mathbf{v}', \mathbf{H}) \in \mathbb{E}$ un tenseur d'élasticité, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{H} : \mathbf{H}$ et $\mathbf{d}'_2 = \mathbf{d}_2 - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{d}_2) \mathbf{q}$. Alors \mathbf{E} est au moins cubique si et seulement si*

$$\mathbf{v}' = \mathbf{d}' = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{d}'_2 = 0.$$

Si de plus $\mathbf{H} \neq 0$, alors \mathbf{E} est cubique.

Le problème que nous abordons est le problème d'optimisation polynomiale

$$\min_{\mathbf{E} \in \bar{\Sigma}_{[0]}} \|\mathbf{E} - \mathbf{E}_0\|^2.$$

Afin de reformuler et de simplifier le problème, nous considérons la décomposition harmonique du tenseur d'élasticité expérimental \mathbf{E}_0 donné par

$$\mathbf{E}_0 = (\alpha_0, \beta_0, \mathbf{d}'_0, \mathbf{v}'_0, \mathbf{H}_0)$$

avec $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{H}^0(\mathbb{R}^3)$, $\mathbf{d}'_0, \mathbf{v}'_0 \in \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3)$, $\mathbf{H}_0 \in \mathbb{H}^4(\mathbb{R}^3)$. Par le théorème 2.5, nous sommes amenés donc à considérer le problème d'optimisation polynomiale

$$\min_{\mathbf{H} \in \bar{\Sigma}_{[0]}} \|\mathbf{H} - \mathbf{H}_0\|^2,$$

qui fait intervenir 9 ($\dim \mathbb{H}^4(\mathbb{R}^3)$) variables au lieu de 21 ($\dim \mathbb{E}a$) : un tenseur harmonique \mathbf{H} d'ordre 4 est représenté par la matrice

$$[\mathbf{H}] = \begin{pmatrix} \Lambda_2 + \Lambda_3 & -\Lambda_3 & -\Lambda_2 & -X_1 & Y_1 + Y_2 & -Z_2 \\ -\Lambda_3 & \Lambda_3 + \Lambda_1 & -\Lambda_1 & -X_2 & -Y_1 & Z_1 + Z_2 \\ -\Lambda_2 & -\Lambda_1 & \Lambda_1 + \Lambda_2 & X_1 + X_2 & -Y_2 & -Z_1 \\ -X_1 & -X_2 & X_1 + X_2 & -\Lambda_1 & -Z_1 & -Y_1 \\ Y_1 + Y_2 & -Y_1 & -Y_2 & -Z_1 & -\Lambda_2 & -X_1 \\ -Z_2 & Z_1 + Z_2 & -Z_1 & -Y_1 & -X_1 & -\Lambda_3 \end{pmatrix}$$

en notation de Voigt, avec $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}$ (see [16]).

En utilisant le calcul de la composante harmonique \mathbf{H}_0 du tenseur expérimental \mathbf{E}_0 , on définit alors

$$f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{H} - \mathbf{H}_0\|^2$$

avec

$$\mathbf{x} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2),$$

et

$$\min_{\mathbf{H} \in \Sigma_{[0]}} \|\mathbf{H} - \mathbf{H}_0\|^2 = \min_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x})$$

où l'ensemble algébrique réel K des contraintes polynomiales est défini par les 5 composantes (quadratiques) polynomiales de \mathbf{d}'_2 .

Pour assurer l'hypothèse (3) sur l'ensemble K , on applique le lemme 2.4 et on ajoute aux inégalités $(\mathbf{d}'_2)_{ij}(\mathbf{x}) \geq 0$, $-(\mathbf{d}'_2)_{ij}(\mathbf{x}) \geq 0$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $(i, j) \neq (3, 3)$, l'inégalité $c - f(\mathbf{x}) \geq 0$ avec

$$c = 58000 > f(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

On utilise ensuite GloptiPoly avec en entrée la fonction $f(\mathbf{x})$ et les contraintes

$$c - f(\mathbf{x}) \geq 0, (\mathbf{d}'_2)_{ij}(\mathbf{x}) \geq 0, -(\mathbf{d}'_2)_{ij}(\mathbf{x}) \geq 0, i, j \in \{1, 2, 3\}, (i, j) \neq (3, 3),$$

et l'on obtient une valeur égale à 2530.474727 au premier degré de relaxation $d = d_0 = 1$ (le temps de calcul est de 0.1 seconde).

On extrait finalement le tenseur cubique le plus proche $\mathbf{E}^* \in \Sigma_{[0]}$ de \mathbf{E}_0 donné par (en notation de Voigt)

$$(9) \quad [\mathbf{E}^*] = \begin{pmatrix} 240.130669 & 144.442318 & 125.760345 & 6.39666 & 41.97381 & -21.161507 \\ 144.442318 & 223.956191 & 141.934823 & -27.780748 & 2.277546 & 16.604162 \\ 125.760345 & 141.934823 & 242.638164 & 21.384084 & -44.251364 & 4.557344 \\ 6.39666 & -27.780748 & 21.384084 & 133.268156 & 4.557344 & 2.277546 \\ 41.973817 & 2.277546 & -44.251364 & 4.557344 & 117.093678 & 6.39666 \\ -21.161507 & 16.604162 & 4.557344 & 2.277546 & 6.39666 & 135.775651 \end{pmatrix} \text{ GPa}$$

avec une distance relative

$$\frac{\|\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}^*\|}{\|\mathbf{E}_0\|} = 0.103910.$$

Références

- [1] F. Alizadeh. Interior point methods in semidefinite programming with applications to combinatorial optimization. *SIAM journal on Optimization*, 5(1) :13–51, 1995.
- [2] N. Auffray, B. Kolev, and M. Petitot. On anisotropic polynomial relations for the elasticity tensor. *J. Elasticity*, 115(1) :77–103, 2014.
- [3] G. Backus. A geometrical picture of anisotropic elastic tensors. *Reviews of geophysics*, 8(3) :633–671, 1970.
- [4] J. Besson, G. Cailletaud, J.-L. Chaboche, and S. Forest. *Non-Linear Mechanics of Materials*. Springer Netherlands, 2012.
- [5] J. Bochnak, M. Coste, and M.-F. Roy. *Real Algebraic Geometry*, volume 36. Springer Berlin Heidelberg, Nov. 2013.
- [6] M. Coste. An Introduction to Semialgebraic Geometry. Université de Rennes, 2002.
- [7] A. Eringen and G. Maugin. *Electrodynamics of Continua , tomes I et II*. Springer-Verlag, 1990.
- [8] M. François, G. Geymonat, and Y. Berthaud. Determination of the symmetries of an experimentally determined stiffness tensor : Application to acoustic measurements. *Int. J. Sol. Struct.*, 35(31-32) :4091–4106, 1998.
- [9] D. Henrion, J.-B. Lasserre, and J. Löfberg. GloptiPoly 3 : moments, optimization and semidefinite programming. *Optim. Methods Softw.*, 24(4-5) :761–779, 2009.
- [10] T. Jacobi and A. Prestel. Distinguished representations of strictly positive polynomials. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2001(532) :223–235, 2001.
- [11] V. Jeyakumar, J. B. Lasserre, and G. Li. On polynomial optimization over non-compact semi-algebraic sets. *J. Optim. Theory Appl.*, 163(3) :707–718, 2014.
- [12] J. B. Lasserre. *An Introduction to Polynomial and Semi-Algebraic Optimization*. Cambridge University Press, 2015.
- [13] M. Laurent. Sums of squares, moment matrices and optimization over polynomials. In *Emerging applications of algebraic geometry*, volume 149 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 157–270. Springer, New York, 2009.
- [14] J. Lemaitre and J.-L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, english translation 1990 'Mechanics of Solid Materials' Cambridge University Press, 1985.
- [15] A. Mattiello, R. Desmorat, and J. Cormier. Rate dependent ductility and damage threshold : Application to nickel-based single crystal CMSX-4. *International Journal of Plasticity*, 113 :74–98, feb 2019.
- [16] M. Olive, B. Kolev, B. Desmorat, and R. Desmorat. Harmonic factorization and reconstruction of the elasticity tensor. *J. Elasticity*, 132(1) :67–101, 2018.
- [17] M. Olive, B. Kolev, R. Desmorat, and B. Desmorat. Characterization of the symmetry class of an elasticity tensor using polynomial covariants. *Mathematics and Mechanics of Solids*, page 10.1177/10812865211010885, 2021.
- [18] M. Putinar. Positive polynomials on compact semi-algebraic sets. *Indiana Univ. Math. J.*, 42(3) :969–984, 1993.
- [19] M. Schweighofer. Optimization of polynomials on compact semialgebraic sets. *SIAM J. Optim.*, 15(3) :805–825, 2005.
- [20] J. F. Sturm. Primal-dual interior point approach to semidefinite programming, 1997.
- [21] J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11(1-4) :625–653, jan 1999.
- [22] M. J. Todd. Semidefinite optimization. *Acta Numer.*, 10 :515–560, 2001.
- [23] H. Wolkowicz, R. Saigal, and L. Vandenberghe. *Handbook of Semidefinite Programming*, volume 27. Springer US, Dec. 2012.