



HAL
open science

Quelques résultats sur les indicateurs de bifurcation pour l'étude des instabilités des coques minces (application à un système film-substrat)

Hamza Azzayani, Norman Mathieu, Pascal Ventura, Michael Brun, Hamid Zahrouni, Michel Potier-Ferry

► To cite this version:

Hamza Azzayani, Norman Mathieu, Pascal Ventura, Michael Brun, Hamid Zahrouni, et al.. Quelques résultats sur les indicateurs de bifurcation pour l'étude des instabilités des coques minces (application à un système film-substrat). 25e Congrès Français de Mécanique, Aug 2022, Nantes, France. <hal-04280036>

HAL Id: hal-04280036

<https://hal.science/hal-04280036v1>

Submitted on 10 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Quelques résultats sur les indicateurs de bifurcation pour l'étude des instabilités des coques minces (application à un système film-substrat)

H. Azzayani^{a,b}, N. Mathieu^{a,b}, P. Ventura^{a,b}, M. Brun^{a,b},
H. Zahrouni^{a,b}, M. Potier-Ferry^{a,b}

a. Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3),
UMR 7239, CNRS/Université de Lorraine, F-57045 Metz, France

b. Laboratory of Excellence on Design of Alloy Metals for low-mAss Structures (DAMAS),
Université de Lorraine, France

E-mail : hamza.azzayani@univ-lorraine.fr

Résumé :

La méthode asymptotique numérique (MAN) est un outil qui permet la résolution des problèmes non-linéaires avec une grande précision. Elle consiste à chercher la courbe solution du problème sous forme d'un développement asymptotique au voisinage d'une solution initialement connue. La MAN est particulièrement efficace pour la modélisation des instabilités des structures minces. Dans ce travail, on se propose de présenter différentes techniques pour la caractérisation des points singuliers sur des branches de solutions non-linéaires. Plusieurs indicateurs de bifurcation seront présentés et testés sur une application concernant le flambage des coques minces. En effet, la MAN permet de construire un problème auxiliaire sans surcoût important en temps de calcul et qui permet de détecter les points singuliers sur une branche non-linéaire. Il s'agit d'une fonction scalaire évaluée le long de la branche d'équilibre, en introduisant une force fictive de perturbation dans le problème. La MAN est basée sur des séries entières que nous pouvons remplacer par des approximations de Padé pour améliorer le rayon de convergence de la solution. Ces approximations peuvent également être utilisées comme indicateurs de bifurcation par une analyse des pôles des fractions rationnelles. Nous avons également implémenté une technique qui associe flambage et vibration et qui permet d'utiliser les fréquences de vibration comme indicateur pour les instabilités des structures.

Abstract :

Asymptotic Numerical Method (ANM) is an efficient method to solve nonlinear problems with a high accuracy. It consists in looking for the solution curve of the problem in the form of an asymptotic development in the neighborhood of an initially known solution. The ANM is particularly effective for instability modeling of thin structures. In this work, we propose to present different techniques to characterize the singular points on solution curves. Several bifurcation indicators will be presented and tested on an application concerning the thin shells buckling. Indeed, the ANM allows the construction of an auxiliary problem without significant additional computational time and which allows the detection

of singular points on a nonlinear branch. The bifurcation point is detected by evaluating, along the computed solution branch, a scalar function by introducing a fictitious perturbation force. The polynomial approximation can be replaced by rational fractions named Padé approximants in order to improve the radius of convergence. These approximants can also be used as indicators by analyzing their poles. We have also implemented a technique that combines buckling and vibration and allows to use vibration frequencies as an indicator for structural instabilities.

Mots clefs : Méthode Asymptotique Numérique, Instabilités, Indicateurs de bifurcation, Approximants de Padé, Structures minces.

1 Introduction

Les problèmes non-linéaires en mécanique des structures sont généralement résolus par des méthodes itératives basées sur le processus de prédiction-corréction. Ces méthodes sont largement utilisées dans les codes de calcul par éléments finis. Cependant, le temps de calcul reste un obstacle majeur de ces méthodes. Pour des problèmes d'instabilité, ces algorithmes nécessitent également une stratégie de pilotage adéquate pour suivre des branches de réponse complexe. Pour éviter ces difficultés, la méthode asymptotique numérique (MAN) basée sur la technique de perturbation présente une alternative. Elle permet de résoudre des problèmes non-linéaires grâce à l'association des développements asymptotiques et des méthodes numériques. Les inconnues du problème sont développées en séries entières. La MAN transforme le problème de départ (non-linéaire) en une succession de problèmes linéaires admettant le même opérateur de rigidité tangente. Ensuite, ces problèmes sont résolus par une méthode numérique telle que la méthode des éléments finis.

Comme les séries ont un rayon de convergence limité, une technique de continuation a été proposée pour obtenir toute la branche solution. Chaque fin de pas servira comme point de départ du pas suivant et la longueur de pas est calculée a posteriori en exigeant que la différence relative entre les solutions à deux ordres consécutives soit inférieure à un paramètre de précision défini par l'utilisateur. La détermination automatique des longueurs du pas à partir des termes des séries est le point clé de l'efficacité et la robustesse de ces méthodes par rapport aux méthodes itératives classiques.

En plus, le rayon de validité de la solution peut être amélioré en remplaçant les séries entières par des approximants de Padé [9] [7].

Plusieurs techniques seront appliquées pour détecter les points de bifurcation : la première consiste à calculer une fonction scalaire obtenue en introduisant une force de perturbation fictive dans le problème d'équilibre [3]. L'indicateur peut être déterminé explicitement le long de la branche d'équilibre et s'annule aux points singuliers. La deuxième technique repose sur l'analyse des pôles de la représentation rationnelle de la branche fondamentale. La troisième méthode est une combinaison entre l'analyse vibratoire et le flambage des structures [2]. Les fréquences propres seront utilisées comme étant des indicateurs de bifurcation [8][7][11].

Les performances de ces techniques seront présentées pour l'analyse des instabilités d'une structure mince composée d'un système film-substrat.

2 Formulation de l'équilibre statique des coques en grandes rotations

On considère une structure mince formée d'un système de film-substrat. On considère une formulation variationnelle de coque inspirée de la référence [12] basée sur un formalisme à 3 champs indépendants $(u, S, \tilde{\gamma})$ dont le comportement du substrat est présenté par une fondation élastique. Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\pi(u, S, \tilde{\gamma}) = \int_V {}^t S : (\gamma(u) + \tilde{\gamma}) dV - \frac{1}{2} \int_V {}^t S : D^{-1} : S dV + \int_A \frac{1}{2} K_s u_3^2 dA - \lambda Pe(u) \quad (1)$$

Avec

S : second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff

γ : tenseur de déformation de Green-Lagrange qui peut s'écrire : $\gamma(u) = \gamma_l(u) + \gamma_{nl}(u, u)$

$\tilde{\gamma}$: tenseur de déformation additionnelle incompatible avec le déplacement. Cette déformation est introduite à l'aide du concept EAS [10] pour éviter certains problèmes de verrouillage numérique.

D : tenseur d'élasticité du matériau

K_s : rigidité du substrat

u_3 : déplacement hors plan de la coque

$Pe(u)$: travail des forces extérieures

λ : paramètre de chargement

Le problème variationnel est stationnaire pour tout champ δu cinématiquement admissible et δS , $\delta \tilde{\gamma}$ quelconques et s'écrit :

$$\delta \pi = \int_V ({}^t \delta S : [(\gamma_l(u) + \gamma_{nl}(u, u) + \tilde{\gamma}) - D^{-1} : S] + {}^t S : (\delta(\gamma_l(u) + \gamma_{nl}(u, u)) + \delta \tilde{\gamma})) dV + \int_A K_s u_3 \delta u_3 dA - \lambda Pe(\delta u) = 0 \quad (2)$$

Avec

$$\delta(\gamma_l(u) + \gamma_{nl}(u, u)) = \gamma_l(\delta u) + \gamma_{nl}(u, \delta u) + \gamma_{nl}(\delta u, u) \quad (3)$$

L'équation (2) peut s'écrire sous la forme simple :

$$R(U, \lambda) = L(U) + Q(U, U) - \lambda F = 0 \quad (4)$$

$U = (u, S, \tilde{\gamma})$: inconnue mixte

$Q(., .)$: opérateur quadratique

$L(.)$: opérateur linéaire

F : vecteur des forces extérieures

R : vecteur résidu

$$\langle L(U), \delta U \rangle = \int_V ({}^t \delta S : [(\gamma_l(u) + \tilde{\gamma}) - D^{-1} : S] + {}^t S : (\gamma_l(\delta u) + \delta \tilde{\gamma})) dV + \int_A K_s u_3 \delta u_3 dA$$

$$\begin{aligned} \langle Q(U, U), \delta U \rangle &= \int_V ({}^t\delta S : \gamma_{nl}(u, u) + {}^t S : (\gamma_{nl}(u, \delta u) + \gamma_{nl}(\delta u, u))) dV \\ \langle F, \delta U \rangle &= Pe(\delta U) \end{aligned}$$

Ainsi, le problème consiste à trouver la variable mixte U et le paramètre de chargement λ vérifiant l'équation (4).

3 Algorithme asymptotique numérique

3.1 Technique de perturbation

Partons d'une solution initialement connue (U_0, λ_0) , la technique de perturbation consiste à chercher la courbe solution d'un problème sous forme de séries entières tronquées jusqu'à l'ordre n par rapport à un paramètre (a) .

$$\begin{cases} U(a) = U_0 + aU_1 + a^2U_2 + \dots + a^nU_n \\ \lambda(a) = \lambda_0 + a\lambda_1 + a^2\lambda_2 + \dots + a^n\lambda_n \end{cases} \quad (5)$$

Par analogie avec les méthodes itératives à longueur d'arc imposée, le paramètre a est choisi comme la projection de $(u - u_0, \lambda - \lambda_0)$ sur la direction tangente (u_1, λ_1) :

$$a = \langle u - u_0, u_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0)\lambda_1 \quad (6)$$

En injectant les séries (5) dans les équations (4) et (6) et en identifiant les termes suivant la puissance de a , nous obtenons une suite récurrente de problèmes linéaires admettant le même opérateur tangent.

Ordre 1

$$\begin{cases} L_t^0(U_1) = \lambda_1 F \\ \langle u_1, u_1 \rangle + \lambda_1^2 = 1 \end{cases} \quad (7)$$

Ordre 2

$$\begin{cases} L_t^0(U_2) = \lambda_2 F - Q(U_1, U_1) \\ \langle u_2, u_1 \rangle + \lambda_2 \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Ordre p

$$\begin{cases} L_t^0(U_p) = \lambda_p F - \sum_{r=1}^{p-1} Q(U_r, U_{p-r}) \\ \langle u_p, u_1 \rangle + \lambda_p \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

L'opérateur tangent L_t^0 ne dépend que de la solution initiale et il est défini par :

$$L_t^0(\cdot) = L(\cdot) + Q(U_0, \cdot) + Q(\cdot, U_0)$$

3.2 Procédure de continuation

Les séries ont un rayon de convergence limité qui dépend à la fois du problème à résoudre et des ordres de troncature des séries. Une procédure de continuation simple consiste à considérer le fait que la différence

relative entre les séries de déplacement à deux ordres consécutives (n) et ($n - 1$) doit rester assez petite par rapport à une valeur δ_1 .

$$\frac{\| u_n(a) - u_{n-1}(a) \|}{\| u_n(a) - u_0 \|} \leq \delta_1 \quad (10)$$

En approximant le dénominateur par $\| au_1 \|$, le domaine de validité est donné par :

$$a_{max} = \left(\delta_1 \frac{\| u_1 \|}{\| u_n \|} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (11)$$

avec δ_1 un paramètre de précision et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne du vecteur.

Ainsi, la solution est obtenue pas à pas en considérant chaque fin de pas comme point de départ du pas suivant. Une originalité de cette procédure est le fait que la longueur du pas est déterminée a posteriori, car elle dépend des caractéristiques intrinsèques de la série calculée.

3.3 Accélération de la convergence par des approximants de Padé

Dans la section précédente, nous avons présenté une méthode de continuation basée sur la représentation en série avec un critère de fin de pas basé sur le déplacement. Plusieurs tests ont montré l'efficacité et la fiabilité de cet algorithme (Coques minces en formulation Lagrangienne [5][6], Mécanique des fluides visqueux [4] et Structures plastiques [12]). La représentation par fractions rationnelles, appelées approximants de Padé, permet d'augmenter le domaine de validité de la solution [8]. Pour une étude plus détaillée sur les approximants de Padé, nous renvoyons le lecteur à la référence [1].

L'approximant de Padé d'une fonction f est une fraction rationnelle dont le développement de Taylor coïncide avec celui de f jusqu'à l'ordre N . L'approximant est noté par $[L/M]$ où L désigne le degré du numérateur et M celui du dénominateur avec $L + M = N$.

Nous notons P_n la représentation par des fractions de Padé du déplacement u et du paramètre de chargement λ à un ordre de troncature (n) :

$$\begin{cases} P_n(u(a)) = u_0 + \frac{D_{n-2}}{D_{n-1}}u_1 + \frac{D_{n-3}}{D_{n-1}}u_2 + \dots + \frac{1}{D_{n-1}}u_{n-1} \\ P_n(\lambda(a)) = \lambda_0 + \frac{D_{n-2}}{D_{n-1}}\lambda_1 + \frac{D_{n-3}}{D_{n-1}}\lambda_2 + \dots + \frac{1}{D_{n-1}}\lambda_{n-1} \end{cases} \quad (12)$$

En s'appuyant sur le même critère de la représentation polynomiale basé sur le déplacement, nous pouvons définir un domaine de validité ($a_{max.p}$) de la représentation rationnelle. Ceci peut être exprimé par la relation suivante :

$$\frac{\| P_n(u(a_{max.p})) - P_{n-1}(u(a_{max.p})) \|}{\| P_n(u(a_{max.p})) - P_0 \|} = \delta_2 \quad (13)$$

avec δ_2 un nouveau paramètre de précision.

4 Méthodes de détection de la bifurcation

4.1 Indicateur de bifurcation

Le but de cette section est de développer un algorithme fiable, basé sur la MAN, pour la détermination du point de bifurcation. Ce dernier est détecté en évaluant, le long de la branche fondamentale, une fonction scalaire appelée indicateur de bifurcation. Ce scalaire est obtenu en introduisant une force de perturbation fictive dans le problème d'équilibre, et qui s'annule aux points singuliers.

4.1.1 Définition de l'indicateur de bifurcation

Soit $\Delta\mu f$ une force de perturbation fictive appliquée à la structure à un état déformé (U, λ) . $\Delta\mu$ représente l'intensité de la force et $\Delta U = (\Delta u, \Delta\tilde{\gamma}, \Delta S)$ sa réponse associée. Dans ces conditions, l'équation de l'équilibre perturbé s'écrit :

$$L(U + \Delta U) + Q(U + \Delta U, U + \Delta U) = \lambda F + \Delta\mu f \quad (14)$$

En considérant (4) et en négligeant les termes quadratiques, le problème (14) devient :

$$L_t(\Delta U) = \Delta\mu f \quad (15)$$

Où $L_t(\cdot) = L(\cdot) + Q(U, \cdot) + Q(\cdot, U)$ est l'opérateur tangent pris au point d'équilibre (U, λ) .

Une condition supplémentaire basée sur le déplacement est imposée :

$$\langle L_t^0(\Delta U - \Delta U_0), \Delta U_0 \rangle = 0 \quad (16)$$

Où L_t^0 est l'opérateur tangent au point de départ (U_0, λ_0) , et la direction ΔU_0 est la solution de $L_t^0(\Delta U_0) = f$.

4.1.2 Calcul de ΔU et $\Delta\mu$ par la MAN

Les inconnues ΔU et $\Delta\mu$ sont écrites sous forme de séries entières :

$$\begin{cases} \Delta U(a) = \Delta U_0 + a\Delta U_1 + a^2\Delta U_2 + \dots + a^n\Delta U_n \\ \Delta\mu(a) = \Delta\mu_0 + a\Delta\mu_1 + a^2\Delta\mu_2 + \dots + a^n\Delta\mu_n \end{cases} \quad (17)$$

En substituant (17) dans (15) et (16), on obtient une suite de problèmes linéaires :

Ordre 0

$$L_t^0(\Delta U_0) = \Delta\mu_0 f \quad (18)$$

ΔU_0 est calculé en imposant $\Delta\mu_0 = 1$.

Ordre $p \geq 1$

$$\begin{cases} L_t^0(\Delta U_p) = \Delta\mu_p f - \sum_{r=1}^p (Q(U_r, \Delta U_{p-r}) + Q(\Delta U_{p-r}, U_r)) \\ \langle \Delta U_p, f \rangle = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Les vecteurs U_r correspondent exactement à ceux déterminés lors du calcul de la branche fondamentale.

4.1.3 Discrétisation par éléments finis

Pour la discrétisation, on a utilisé l'élément à 8 nœuds avec intégration réduite détaillé dans [12]. À l'ordre p , on obtient :

$$\begin{cases} [K_t^0]\{\Delta q_p\} = \Delta\mu_p\{f\} + \{\Delta F_p\} \\ {}^t\{\Delta q_p\}[K_t^0]\{\Delta q_0\} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Où $[K_t^0]$ désigne la matrice de rigidité tangente au point de départ, $\{\Delta q_0\}$ et $\{\Delta q_p\}$ sont respectivement les vecteurs de déplacement nodal aux ordres 0 et p associés à la force de perturbation $\{f\}$.

Le vecteur $\{\Delta F_p\}$ dépend des solutions U jusqu'à l'ordre p et ΔU jusqu'à l'ordre $(p - 1)$. Ainsi, le système (20) donne :

$$\Delta\mu_p = - \frac{\langle \Delta F_p, \Delta q_0 \rangle}{\langle f, \Delta q_0 \rangle} \quad (21)$$

Maintenant qu'on a calculé les termes $\Delta\mu_p$ ($1 \leq p \leq n$), on peut construire le développement en série de $\Delta\mu$ et étudier son signe le long de la branche fondamentale afin de détecter la bifurcation.

4.2 Pôle des approximants de Padé

Une autre méthode simple pour détecter les points de bifurcation est l'analyse des pôles des approximants de Padé. En fait, le premier point de bifurcation correspond à la plus petite racine réelle positive du dénominateur de la fraction rationnelle [3][11]. Nous notons ici un autre intérêt de la représentation rationnelle vis-à-vis de la représentation polynomiale.

4.3 Fréquence propre de résonance

Une autre technique pour la détection de la bifurcation est de combiner le flambage et l'analyse vibratoire. La méthode commence par le calcul de la branche d'équilibre. Après, on passe à la détermination des fréquences avec les modes de vibrations correspondants autour de cette branche.

4.3.1 Formulation de l'équation dynamique autour d'un état d'équilibre stable

Pour une charge appliquée donnée, on suppose que la structure oscille autour d'un état statique U . Ces oscillations sont décrites par le vecteur mixte dépendant du temps $V(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t)$, ainsi la réponse globale s'écrit : $U(\theta_1, \theta_2, \theta_3) + V(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t)$.

Les oscillations de la structure autour d'un état d'équilibre statique sont décrites par l'équation suivante :

$$M(\ddot{V}) + L(U + V) + Q(U + V, U + V) = \lambda F \quad (22)$$

Avec

$$\langle M\ddot{V}, \delta U \rangle = \int_{\Omega} \rho(\ddot{v}_1\delta u_1 + \ddot{v}_2\delta u_2 + \ddot{v}_3\delta u_3)dv$$

Où \ddot{V} est la dérivée seconde par rapport au temps de V . v_i sont les composantes du déplacement V , M est la matrice de masse et ρ est la masse volumique.

Dans cette étude, la partie dynamique V est considérée petite par rapport à la solution statique U qui peut correspondre à un état de pré-flambage ou post-flambage.

En considérant l'équation d'équilibre (4) et en négligeant le terme quadratique en V , l'équation (22) devient :

$$L_t(V) + M(\ddot{V}) = 0 \quad (23)$$

Où $L_t = L(\cdot) + Q(U, \cdot) + Q(\cdot, U)$ est l'opérateur tangent à un état de déformation statique U .

La solution générale de (23) s'exprime sous la forme :

$$V = X e^{i\omega t} \quad (24)$$

En insérant l'équation (24) dans (23), nous obtenons le problème linéaire aux valeurs propres :

$$L_t(X) - \omega^2 M(X) = 0 \quad (25)$$

La fréquence propre ω et le mode associé X sont les inconnues du problème.

Pour étudier les fréquences propres et leurs modes associés dans des plages de pré-flambage et de post-flambage, il faut résoudre le problème couplé suivant :

$$\begin{cases} L(U) + Q(U, U) = \lambda F \\ L_t(X) = \omega^2 M(X) \end{cases} \quad (26)$$

L'équation (26.1) correspond à la solution charge-déplacement statique (voir section 2). Le déplacement obtenu U est utilisé pour déterminer l'opérateur tangent L_t . Les points critiques correspondent à la valeur de la charge pour laquelle $\omega = 0$. Ce critère sera utilisé ici pour détecter les points de bifurcation.

4.3.2 Solution par la MAN

Le problème statique (26.1) a été résolu en utilisant la MAN dans la section 2. La même technique sera utilisée pour résoudre le problème dynamique (26.2). L'idée est de déterminer analytiquement sous forme de séries entières les inconnues (X, ω) .

$$\begin{cases} X = X_0 + aX_1 + a^2X_2 + \dots + a^n X_n \\ \omega^2 = \omega_0^2 + a\omega_1 + a^2\omega_2 + \dots + a^n \omega_n \end{cases} \quad (27)$$

Où (X_0, ω_0^2) est la solution du problème des valeurs propres au point d'équilibre de départ (U_0, λ_0) , $X_r = (u_{xr}, \tilde{\gamma}_{xr}, S_{xr})$ est un vecteur mixte et ω_r est un paramètre scalaire. Le paramètre a est le même que dans le problème (26.1).

En substituant les équations (27) dans (26.2) et en identifiant les termes suivant la puissance de a , nous obtenons une suite de problèmes linéaires :

Ordre 1

$$L_t^0(X_1) - \omega_0^2 M X_1 = \omega_1 M X_0 - Q(U_1, X_0) - Q(X_0, U_1) \quad (28)$$

n	5	10	15	20	25
Pôle	0.986	1.0146	0.9963	0.9454	0.9094

TABLE 1 – Plus petit pôle réel positif en fonction de l'ordre de troncature n .

Ordre r

$$L_t^0(X_r) - w_0^2 M X_r = w_r M X_0 + \sum_{j=1}^{r-1} w_j M X_{r-j} - \sum_{j=1}^r (Q(U_j, X_{r-j}) + Q(X_{r-j}, U_j)) \quad (29)$$

On constate de nouveau que tous ces problèmes ont le même opérateur linéaire ($L_t^0 - w_0^2 M$) qui doit être inversé une seule fois pour tous les X_r ($r = 0, 1, \dots, n$). La projection de (28) et (29) sur le mode de vibration X_0 donne :

Ordre 1

$$w_1 = \frac{\langle X_0, Q(U_1, X_0) \rangle + \langle X_0, Q(X_0, U_1) \rangle}{\langle M X_0, X_0 \rangle} \quad (30)$$

Ordre r

$$w_r = \frac{\sum_{j=1}^r (\langle X_0, Q(U_j, X_{r-j}) \rangle + \langle X_0, Q(X_{r-j}, U_j) \rangle) - \sum_{j=1}^{r-1} w_j \langle X_0, M X_{r-j} \rangle}{\langle M X_0, X_0 \rangle} \quad (31)$$

5 Application numérique

Nous présentons dans cette section un test numérique afin d'évaluer l'applicabilité et l'efficacité des algorithmes de détection de la bifurcation. Il s'agit d'une plaque carrée sous forme d'un système film-substrat (longueur = 80mm, épaisseur = 1mm). Le film a un module de Young de 210GPa, un coefficient de Poisson de 0.3 et une masse volumique de $2.7 * 10^{-3}$ Kg/m³. La rigidité du substrat (K_s) égale à 1 N/mm³. La plaque est simplement soutenue sur les quatres bords et soumise à une compression bi-axiale (figure 2).

La plaque est discrétisée avec 400 éléments coques. La force de perturbation fictive est choisie orthogonale au plan de la plaque. Le mode de flambage est donné dans la figure 1. L'indicateur de bifurcation est tracé dans la figure 2 pour différents ordres de troncature. Il s'annule à $\lambda_c = 0.964$ pour $n = 10$, $\lambda_c = 0.947$ pour $n = 15$ et $\lambda_c = 0.94$ pour $n = 20$ et ceci pour un paramètre de précision $\delta = 10^{-6}$.

Le tableau 1 présente le plus petit pôle réel positif (Pôle) de l'approximant de Padé pour différents ordres de troncature n . On remarque que pour les différents ordres de troncature n , les pôles sont proches de la valeur critique du chargement donnée par l'indicateur de bifurcation pour $n = 20$. Par contre, la précision n'est pas garantie quel que soit l'ordre de troncature de la série.

La figure 3 montre l'évolution de la fréquence relative pour les premiers modes de vibrations en fonction du niveau de chargement λ . Les fréquences diminuent lorsque le paramètre de chargement augmente. La fréquence relative, pour le quatrième mode, s'annule à $\lambda_c = 0.942$ qui coïncide avec la valeur obtenue par l'indicateur de bifurcation et l'analyse par les approximants de Padé pour $n = 20$.

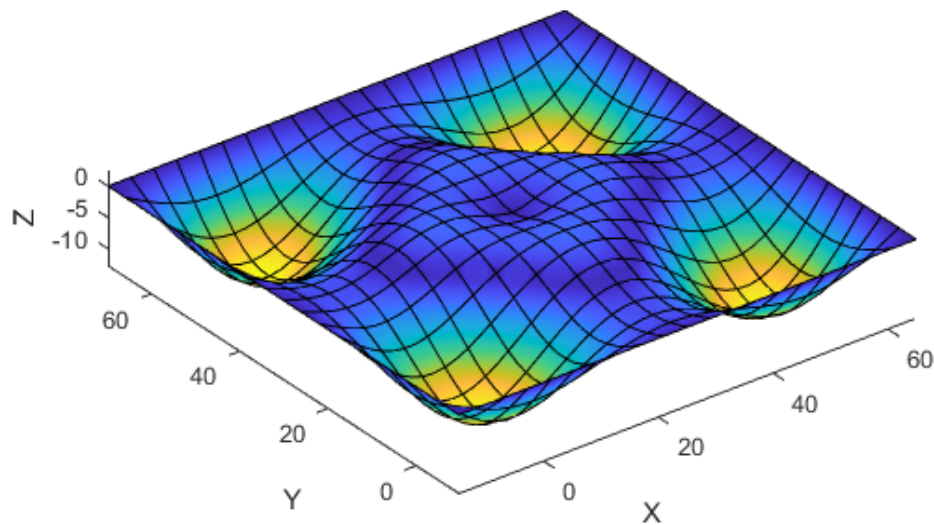


FIGURE 1 – Mode de flambage

6 Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une analyse de bifurcation sur une structure mince à l'aide de la méthode Asymptotique Numérique. Trois techniques de détection des bifurcations ont été rappelées. La première est basée sur l'indicateur de bifurcation. Cette méthode nécessite le calcul d'une nouvelle série, mais la matrice tangente est la même que le problème d'équilibre. La deuxième technique et la moins coûteuse consiste à analyser les pôles des approximations de Padé. La troisième technique utilise les fréquences propres de vibration comme indicateur de bifurcation. D'après le test numérique réalisé, les trois méthodes sont capables de détecter les points de bifurcation avec des précisions qui dépendent de la méthode utilisée et des paramètres de l'algorithme (ordre de troncature n et paramètre de précision δ).

Références

- [1] G.A. Baker and P. Graves-Morris. Padé approximants. part 1 : Basic theory. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, 1981.
- [2] E.H. Boutyourn, L. Azrar, and M. Potier-Ferry. Vibration of buckled elastic structures with large rotations by an asymptotic numerical method. *Computers & structures*, 84(3-4) :93–101, 2006.
- [3] E.H. Boutyourn, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, and M. Boudi. Bifurcation points and bifurcated branches by an asymptotic numerical method and padé approximants. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(12) :1987–2012, 2004.

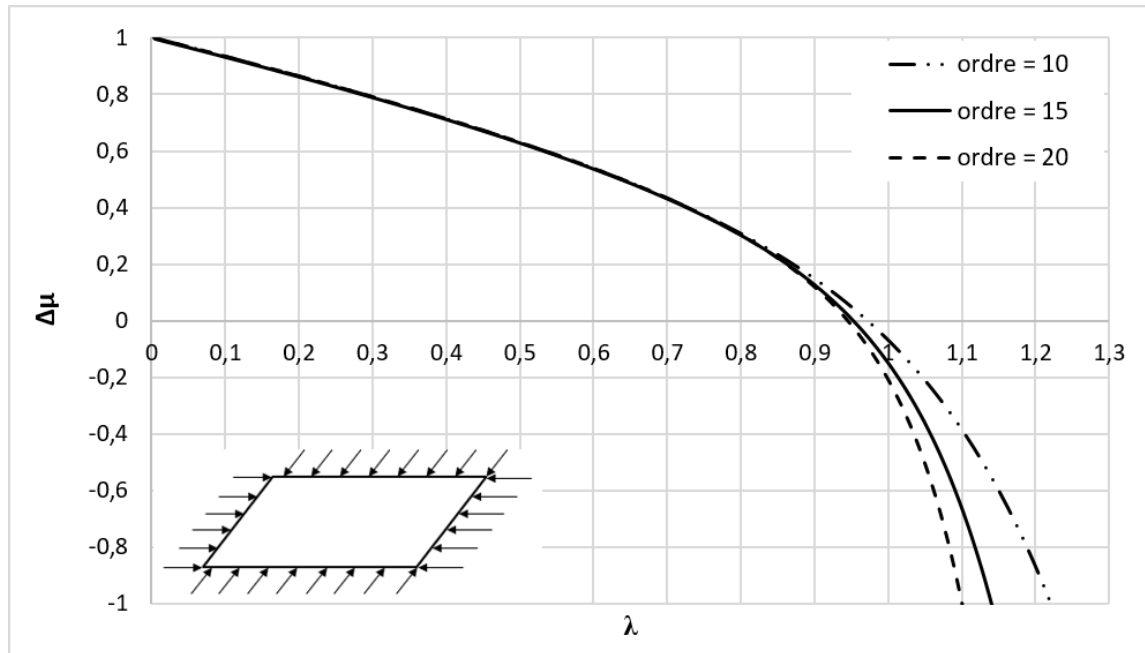


FIGURE 2 – Indicateur de bifurcation en fonction du paramètre de chargement pour différents ordres de troncature

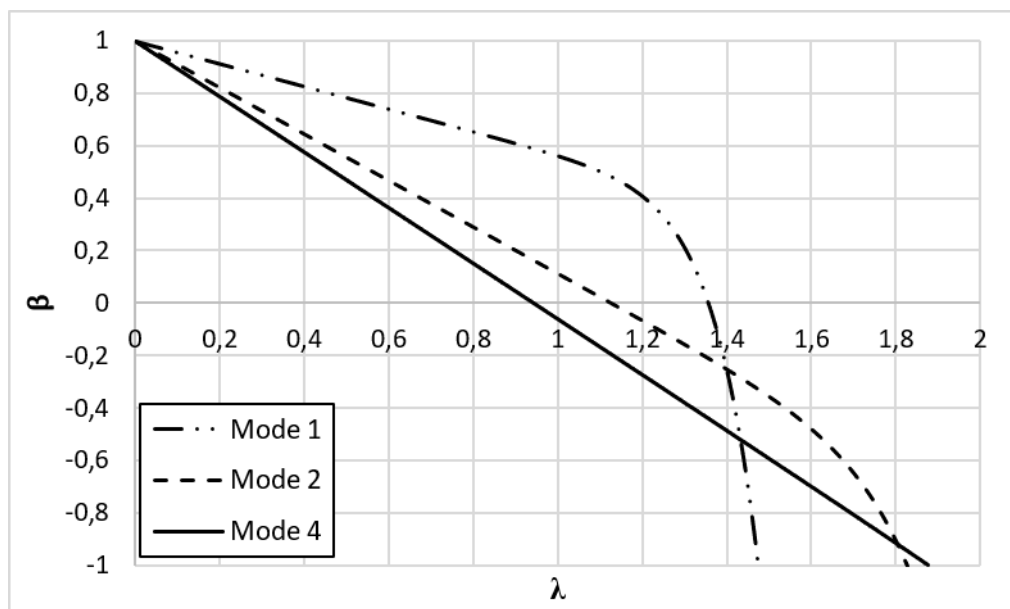


FIGURE 3 – Fréquence propre en fonction du paramètre de chargement pour différents modes de vibration ($n=15$ et $\delta = 10^{-6}$), $\beta = \frac{w^2}{w_0^2}$

- [4] J.M. Cadou. *Méthode asymptotique numérique pour le calcul des branches solutions et des instabilités dans les fluides et pour les problèmes d'interaction fluide-structure*. PhD thesis, Université Paul Verlaine-Metz, 1997.
- [5] B. Cochelin. A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers & structures*, 53(5) :1181–1192, 1994.
- [6] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. The asymptotic-numerical method : an efficient perturbation technique for nonlinear structural mechanics. *Revue européenne des éléments finis*, 3(2) :281–297, 1994.
- [7] A. Elhage-Hussein, M. Potier-Ferry, and N. Damil. A numerical continuation method based on padé approximants. *International Journal of Solids and structures*, 37(46-47) :6981–7001, 2000.
- [8] A. Najah. Calcul non linéaire des structures par des méthodes asymptotiques numériques et accélération de la convergence. 1997.
- [9] A. Najah, B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. A critical review of asymptotic numerical methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 5(1) :31–50, 1998.
- [10] J.C. Simo and Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International journal for numerical methods in engineering*, 29(8) :1595–1638, 1990.
- [11] A. Tri, H. Zahrouni, and M. Potier-Ferry. Bifurcation indicator based on meshless and asymptotic numerical methods for nonlinear poisson problems. *Numerical methods for partial differential equations*, 30(3) :978–993, 2014.
- [12] H. Zahrouni, B. Cochelin, and M. Potier-Ferry. Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 175(1-2) :71–85, 1999.