Flambage de la poutre d'Hutchinson élasto-endommageable

Estelle Molines, Damien Halm, Alain Cimetière

▶ **To cite this version:**

Estelle Molines, Damien Halm, Alain Cimetière. Flambage de la poutre d'Hutchinson élasto-endommageable. 17e Congrès Français de Mécanique, 2005, Troyes, France. hal-04279524

HAL Id: hal-04279524
https://hal.science/hal-04279524

Submitted on 10 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Flambage de la poutre d'Hutchinson élasto-endommageable

Estelle Molines[1], Damien Halm[2] & Alain Cimetière[3]

[1]*Laboratoire de Recherches sur la Réactivité des Solides, UMR CNRS 5613 Université de Dijon, UFR Sciences et Techniques BP 47870, 21078 Dijon Cedex, France.*
estelle.molines@u-bourgogne.fr
[2]*Laboratoire de Mécanique et de Physique des Matériaux, UMR CNRS 6617, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique, BP 40109, 86961 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France.*
halm@lmpm.ensma.fr
[3]*Laboratoire de Métallurgie Physique, UMR CNRS 6630, Université de Poitiers, SP2MI, BP 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France.*
alain.cimetière@univ-poitiers.fr

Résumé :

On étudie le flambage de la version élasto-endommageable de la poutre d'Hutchinson en utilisant un modèle phénoménologique local de type standard généralisé. On montre l'existence et la progression d'une zone de décharge, mais à la différence du cas du flambage plastique, le problème fait intervenir ici un aspect héréditaire. Un continuum de charges critiques est mis en évidence et les branches bifurquées sont données par un problème de Cauchy.

Abstract :

This study deals with the damage version of Hutchinson's beam. The modeling framework chosen consists in an usual phenomenological local model. The propagation of an unloading zone is shown. But the major difficulty of this problem is due to hereditary effects unlike the plastic buckling case. A continuum of critical buckling loads is brought out and bifurcated branches are given by the resolution of a Cauchy's problem.

Mots-clefs :

flambage ; postflambage ; endommagement

1 Introduction

Au début des années 70, Hutchinson [1] a introduit un système mécanique modèle afin d'analyser le flambage des poutres élasto-plastiques. Il proposait une variante continue du modèle de Shanley [2], en considérant la section d'une poutre comme un continuum de ressorts élasto-plastiques présentant tous les mêmes caractéristiques (voir figure 1). Il a montré que le flambage débutait avec l'apparition d'un point de charge neutre à l'extrémité gauche de la structure (lorsque le flambage s'effectue à $\theta > 0$) et qu'ensuite ce point de charge neutre se déplaçait vers la droite, en laissant sur sa gauche une zone de décharge élastique. L'étude complète du modèle d'Hutchinson a été effectuée dans [3]. Par la suite des études très approfondies ont été menées pour les poutres élastoplastiques réelles [4, 5, 6].

On reprend ici le système mécanique modèle d'Hutchinson en remplaçant les ressorts élasto-plastiques par des ressorts élasto-endommageables.

Remplacer le comportement élasto-plastique par le comportement élasto-endommageable introduit une difficulté majeure dans la mesure où, à la différence de l'élasto-plasticité, le module de décharge élastique dépend de la plus grande déformation enregistrée au cours de l'évolution.

2 Le modèle d'endommagement de référence

Soit E^0 le module d'Young du matériau non endommagé. Le modèle d'endommagement de référence retenu pour traiter ce problème est du type Marigo [7], l'originalité résidant seulement dans le choix du seuil. Dans le tableau 1, on présente ce modèle de référence de manière abrégée. La notation $\mathcal{N}_{\mathcal{C}(d)}(F_d)$ désigne ici le cône normal au point F_d au domaine convexe $\mathcal{C}_{(d)}$

variable scalaire d'endommagement	d
énergie libre	$\omega(\varepsilon, d) = \frac{1}{2}(1-d)E^o\varepsilon^2$
force thermodynamique	$F_d = \frac{1}{2}E^o\varepsilon^2$
domaine des forces thermodynamiques admissibles	$\mathcal{C}(d)$ défini par $F_d - \frac{1}{2}E^0\ (\varepsilon_0 + \beta d)^2 \leq 0$
loi d'évolution	$\dot{d} \in \mathcal{N}_{\mathcal{C}(d)}(F_d)$

TAB. 1 – Présentation synthétique du modèle de référence

constitué des forces thermodynamiques admissibles. La déformation ε_0 correspond au seuil initial d'endommagement et la grandeur $\beta > 0$ est une constante du matériau.

Avec ce choix de seuil (voir [8]), on obtient une variation linéaire du module d'Young et du module tangent en fonction de la variation de déformation endommageante, ce qui simplifie l'analyse de bifurcation. Les essais réalisés par Ramtani [9] sur des essais 1-D de béton en compression confirment parfaitement cette linéarité.

3 La colonne d'Hutchinson élasto-endommageable

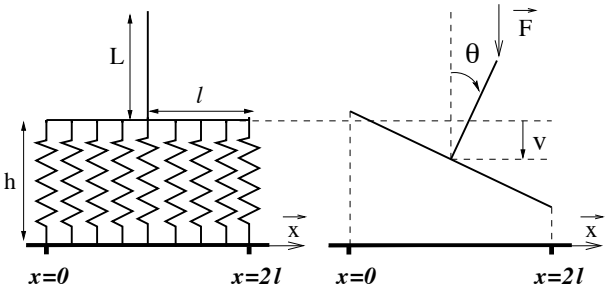

FIG. 1 – La colonne d'Hutchinson dans sa configuration initiale et dans sa configuration déformée.

Deux barres rigides sont liées à angle droit (voir figure 1). La barre horizontale repose sur un continuum de ressorts élasto- endommageables obéissant au modèle de comportement décrit précédemment. On note L la longueur de la barre verticale , $2l$ la longueur de la barre horizontale et h la longueur naturelle commune des ressorts. Chaque ressort est repéré par son abscisse x comprise entre 0 et $2l$. Ce système mécanique modèle est la schématisation simplifiée de la moitié d'une poutre élasto-endommageable comprimée et en appui simple à ses deux extrémités.

On applique au sommet de la barre verticale une force verticale de compression d'intensité $F \geq 0$. On suppose que tous les ressorts restent verticaux. Le problème est traité dans le cadre

des petites déformations et des petits déplacements.

Les deux degrés de liberté sont le déplacement vertical v et la déflexion latérale θ. Les déplacements sont comptés positivement dans le sens de la compression des ressorts. La déformation totale $\varepsilon(x)$ du ressort d'abscisse x s'obtient en divisant l'enfoncement par la longueur initiale h des ressorts :

$$\varepsilon(x) = \frac{v}{h} + \frac{1}{h}(x - l)\theta$$

On introduit également la contrainte $\sigma(x)$ au sein du ressort d'abscisse x. Les deux équations d'équilibre s'écrivent alors :

$$F = \int_0^{2l} \sigma(x)\ dx \quad ; \quad FL\theta = \int_0^{2l} (x - l)\,\sigma(x)\ dx$$

4 Le flambage naissant

On suppose que, dans l'état fondamental (évolution avec $\theta = 0$), la poutre a supporté jusqu'à l'instant actuel une compression croissante, que le seuil d'endommagement des ressorts a été atteint et que ces derniers sont tous dans le même état mécanique.

Sous l'hypothèse que les caractéristiques géométriques vérifient :

$$\varepsilon_0 < \frac{l^2}{3Lh} < \varepsilon_1$$

où ε_1 désigne la déformation correspondant au pic en contrainte, on établit les résultats suivants [10] :

i) à chaque déplacement de compression v de l'intervalle $[v_T, \frac{l^2}{3L}]$, où v_T désigne le déplacement associé à la charge critique du module tangent, il correspond une bifurcation naissante $(\dot{v}, \dot{\theta})$ avec $\dot{\theta} \neq 0$

ii) à chacune de ces bifurcations, caractérisées par le déplacement critique v_c, correspond un point de charge neutre et un seul d'abscisse a de l'intervalle $[0, 2l]$, *i.e.* vérifiant $\dot{\varepsilon}(a) = 0$. De plus a augmente strictement avec le niveau de charge à bifurcation en partant de $a = 0$ pour $v = v_T$.

iii) l'intervalle d'épaisseur $[0, 2l]$ contient un point $\bar{a}$ tel que lorsque $a \in [0; \bar{a}[$ la bifurcation naissante s'effectue sous charge tendant à croître ($\dot{F} > 0$), tandis que pour $a \in]\bar{a}, 2l]$, la charge tend à décroître ($\dot{F} < 0$)

Ces résultats étende au cas élasto-endommageable des résultats établis dans le cas élasto-plastique. La double inégalité portant sur les caractéristiques géométriques garantit que le flambage ne s'effectue ni en régime élastique, ni en régime adoucissant.

5 Le post-flambage

On considère un état critique, au sens du flambage naissant, caractérisé par la position $x = a$ du point de charge neutre, avec $a \in [0; 2l]$. Le flambage est supposé se réaliser avec $\theta > 0$.

5.1 Comportement successif des ressorts

Dès que la structure flambe, l'angle θ cesse d'être nul et la déformation ε ne reste pas uniforme :

$$\begin{cases} \varepsilon(x) &= \frac{v}{h} + \frac{1}{h}(x-l)\theta \qquad \forall x \in [0;2l] \\ \dot{\varepsilon}(x) &= \frac{\dot{v}}{h} + \frac{1}{h}(x-l)\dot{\theta} \qquad \forall x \in [0;2l] \end{cases}$$

Les ressorts de gauche (côté $x = 0$) entrent en décharge ($\dot{\varepsilon} < 0$) tandis que ceux de la

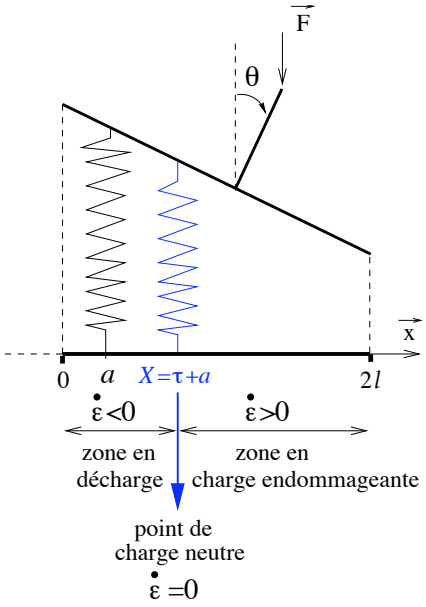

FIG. 2 – Configuration bifurquée à l'instant τ ; le point de charge neutre se situe en $\tau + a$.

partie droite (côté $x = 2l$) restent en charge endommageante ($\dot{\varepsilon} > 0$). Comme la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ dépend linéairement de la position x, un seul ressort se trouve en charge neutre à chaque instant (voir figure 2).

A l'instant $\tau = 0$, correspondant à l'initiation du flambage, le point de charge neutre est situé en $x = a$. Il se déplace ensuite de la gauche vers la droite, à partir de $x = a$.

On choisit comme paramètre cinématique, noté τ, l'abscisse du point de charge neutre diminuée de a.

A l'instant $\tau = 0$, on a $\theta = 0$; autrement dit le début de la chronologie correspond à l'instant où le flambage s'initie, avec un point de charge neutre situé en $x = a$. Sur la figure 3, on représente schématiquement les comportements successifs d'un ressort se situant en x_0 ($a \leq x_0 \leq 2l$) après l'instant $\tau = 0$. A un instant τ donné, le comportement au sein du continuum de ressorts s'écrit :

1. De la position $x = 0$ à $x = \tau + a$, les ressorts sont en décharge élastique :
   – De la position $x = 0$ à la position $x = a$

$$\sigma(x,\tau) = E_D\Big(\varepsilon(x,0)\Big)\varepsilon(x,\tau)$$

$$\text{avec} \quad E_D\Big(\varepsilon(x,0)\Big) = \frac{E^0}{\beta}\Big(\beta + \varepsilon_0 - \frac{v_c}{h}\Big)$$

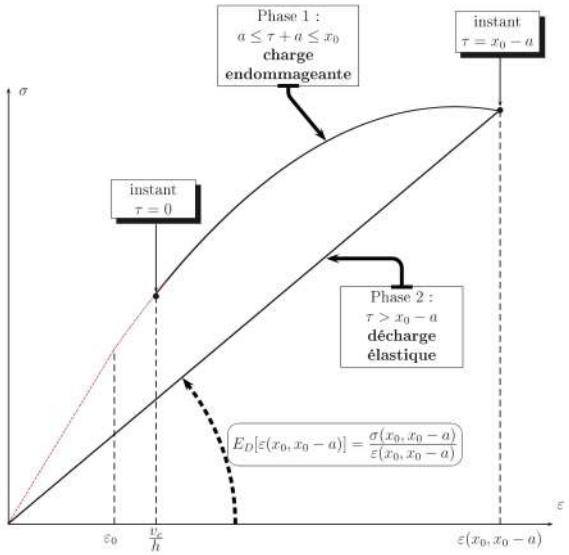

FIG. 3 – Comportement d'un ressort se situant en x_0 ($a \leq x_0 \leq 2l$) après l'instant $\tau = 0$.

– De la position $x = a$ à la position $x = \tau + a$

$$\sigma(x,\tau) = E_D\Big(\varepsilon(x, x-a)\Big)\varepsilon(x,\tau)$$

$$\text{avec} \quad E_D\Big(\varepsilon(x, x-a)\Big) = \frac{E^0}{\beta}\Big(\beta + \varepsilon_0 - \varepsilon(x, x-a)\Big)$$

2. De la position $x = \tau + a$ à $x = 2l$, les ressorts sont en charge endommageante :

$$\sigma(x,\tau) = E_C\Big(\varepsilon(x,\tau)\Big)\varepsilon(x,\tau)$$

$$\text{avec} \quad E_C\Big(\varepsilon(x,\tau)\Big) = \frac{E^0}{\beta}\Big(\beta + \varepsilon_0 - \varepsilon(x,\tau)\Big)$$

5.2 Résultat de bifurcation

Des deux équations d'équilibre, on déduit d'abord une seule équation par élimination de la force F :

$$L\theta\Big(\int_0^{2l} \sigma(x,\tau)\ dx\Big) = \int_0^{2l} (x-l)\,\sigma(x,\tau)\ dx \tag{1}$$

Après introduction du comportement des ressorts dans l'équation (1), on obtient une équation intégrale faisant intervenir les deux inconnues que sont le déplacement longitudinal v et la rotation θ. On relie le déplacement v à l'angle θ en utilisant qu'à chaque instant τ, le point de charge neutre se situe au point d'abscisse $\tau + a$:

$$v(\tau) = v_c(a) + (l - \tau - a)\theta(\tau) + \int_0^{\tau} \theta(t)\ dt$$

L'équation en θ finalement obtenue est donc de type intégro-différentiel. Par changement de fonction inconnue, on aboutit à une équation différentielle non linéaire du quatrième ordre dont

les bifurcations sont analysées, après réduction de l'équation à un problème de Cauchy.

Le résultat suivant est obtenu : **pour chaque a dans $[0, l]$, position initiale du point de charge neutre, il existe un intervalle de temps sur lequel on a une et une seule branche de bifurcation. Cette branche est infiniment dérivable.**

6 Conclusion

La variante élasto-endommageable de la poutre d'Hutchinson a été étudiée. D'abord un continuum de charges critiques a été mis en évidence pour le problème du flambage naissant. En ce qui concerne le post-flambage, la propagation d'une zone de décharge, connue dans le cas élasto-plastique, a été retrouvée ici. La dépendance du module de décharge par rapport à l'histoire de la déformation a constitué une difficulté majeure dans l'analyse du problème. Cet aspect héréditaire a été géré en reliant le déplacement longitudinal actuel v à la position actuelle du point de charge neutre et à l'histoire de la rotation, par le biais d'une fonction dont θ est la dérivée quatrième.

Le problème obtenu, de type intégro-différentiel, a été ramené à une équation différentielle non linéaire par l'introduction de la primitive quatrième de la rotation. Ainsi le problème s'est retrouvé réduit à un problème local en temps, qui dans un deuxième temps a pu être ramené à un problème de Cauchy pour la détermination de chaque branche de bifurcation.

Références

[1] J.W. Hutchinson. Plastic buckling. *Adv.Appl.Mech.*, 14 :67–144, 1974.

[2] F.R. Shanley. Inelastic column theory. *J.Aeronaut.Sci.*, 14 :261–267, 1947.

[3] A. Cimetière, A. Elkoulani, and A. Léger. Flambage naissant et post-flambage d'un modèle simple en élastoplasticité. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 319 :1263–1269, 1994.

[4] A. Léger and M. Potier-Ferry. Sur le flambage plastique. *J.Méca.Théor.Appl.*, 7 :819–857, 1988.

[5] A. Elkoulani and A. Léger. Solutions bifurquées du problème en vitesses initiales pour une poutre élastoplastique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 322 :1007–1013, 1996.

[6] A. Elkoulani and A. Léger. Comportement post-critique des poutres élasto-plastiques : existence et régularité des branches bifurquées. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 324 :1307–1313, 1997.

[7] J.J. Marigo. Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 292 :1309–1312, 1981.

[8] A. Cimetière, D. Halm, and E. Molines. A damage model for concrete beams in compression. *Mechanics Research Communications*, submitted in 2004.

[9] S. Ramtani. *Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral*. PhD thesis, Université Paris VI, 1990.

[10] E. Molines. *Modèles d'endommagement à convexe fixe. Application au flambage*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2003.