



HAL
open science

Optimisation du profil de composition d'un matériau à gradient fonctionnel par la méthode de l'état adjoint : cas des propriétés dépendantes de la température

Lotfi Jaballah, Djaffar Boussaa

► **To cite this version:**

Lotfi Jaballah, Djaffar Boussaa. Optimisation du profil de composition d'un matériau à gradient fonctionnel par la méthode de l'état adjoint : cas des propriétés dépendantes de la température. 17e Congrès Français de Mécanique, 2005, Troyes, France. pp.1-6. hal-04275375

HAL Id: hal-04275375

<https://hal.science/hal-04275375v1>

Submitted on 8 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Optimisation du profil de composition des matériaux à gradient fonctionnel par la méthode de l'état adjoint : Cas des propriétés dépendantes de la température

Lotfi Jaballah^{1,2} & Djaffar Boussaa²

¹ Laboratoire de Recherche sur les Propriétés de Matériaux Nouveaux
IUT d'Alençon, Montfoulon 61250 Damigny

² Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS
31, chemin Joseph Aiguier ; 13402 Marseille cedex 20 ; France

Résumé :

Le but de ce travail est l'optimisation du profil de composition de matériaux à gradient fonctionnel constitutifs de structures thermoélastiques biphasées. Le problème d'optimisation est posé comme un problème de contrôle optimal, et la dérivée de la fonctionnelle coût est évaluée en introduisant un état adjoint. La dépendance par rapport à la température des propriétés des matériaux est prise en compte. La dérivée obtenue est utilisée pour optimiser le profil de composition d'un tube gradué soumis à un chargement thermomécanique.

Abstract :

We consider the problem of optimizing the composition profile of thermoelastic structures made of functionally graded materials. The problem is posed as an optimal control problem and the derivative of its objective functional is addressed by using the adjoint equations. The temperature dependence of the materials properties is taken into account. The derivative information is made use of to optimize the composition profile of the functionally graded tube under thermomechanical loading.

Mots-clefs :

matériaux à gradient fonctionnel ; contrôle optimal ; thermoélasticité ; état adjoint

1 Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel (MGF) sont des composites dont la microstructure et la composition varient graduellement avec la position de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent. Le présent travail a pour but d'étudier le problème de l'optimisation, en vue de la réduction des contraintes d'origine thermique, du profil de composition de matériaux à gradient fonctionnel constitutifs de structures thermoélastiques. Notre objectif est d'obtenir (formellement) le gradient de la fonction coût dans le but mettre en œuvre une méthode d'optimisation utilisant cette information. Il est bien sûr possible de s'attaquer au problème d'optimisation en utilisant des méthodes ne nécessitant pas le gradient. C'est ainsi qu'ont été mis en œuvre les méthodes de réseaux neuronaux [1] et les algorithmes génétiques [2]. Ces approches très générales semblent cependant être trop coûteuses en temps de calcul dès que le nombre de variables de commande est supérieur à une dizaine. Les méthodes utilisant le gradient sont en général plus efficaces dès que le problème s'y prête [3, 4]. L'objectif de ce travail est de proposer une méthode permettant de déterminer la dérivée, sous forme analytique, par la méthode de l'état adjoint. Dans un premier temps, nous posons le problème à résoudre comme un problème de contrôle optimal. Ensuite, nous évaluons la dérivée de la fonction coût en introduisant un état adjoint. Enfin, nous traitons un exemple numérique.

2 Formulation du problème

2.1 Le problème primal

Considérons une structure thermoélastique en MGF. Le MGF est un composite de métal et de céramique dont la fraction volumique de chaque composant varie avec la position. Le problème consiste à trouver le profil de composition ξ qui minimise une certaine fonctionnelle J de la forme

$$J(\xi) = \int_{\Omega} j(\xi, u(\xi), \sigma(\xi), T(\xi), q(\xi); x) \, d\Omega, \quad (1)$$

et tel que les équations des problèmes thermique et élastique soient satisfaites. Formellement, le problème s'écrit :

$$\operatorname{div} \sigma + f(\xi) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2)$$

$$\epsilon(u) = S(\xi, T)\sigma + \alpha(\xi, T)(T - T^{\text{réf}}) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3)$$

$$u = g \quad \text{sur } \Gamma_u, \quad (4)$$

$$\sigma \nu = h \quad \text{sur } \Gamma_\sigma, \quad (5)$$

$$-\operatorname{div} q + m(\xi) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (6)$$

$$\operatorname{grad} T = -R(\xi, T)q \quad \text{dans } \Omega, \quad (7)$$

$$T = n \quad \text{sur } \Gamma_T, \quad (8)$$

$$q \cdot \nu = p \quad \text{sur } \Gamma_q, \quad (9)$$

$$0 \leq \xi \leq 1 \quad \text{dans } \Omega, \quad (10)$$

où x est la position, Ω le domaine occupé par la structure, de bord Γ , σ le tenseur des contraintes, f la force volumique, ϵ le gradient du déplacement symétrisé, u le vecteur des déplacements, S le tenseur de souplesse, α le tenseur de dilatation thermique, T la température, $T^{\text{réf}}$ la température de référence, g le déplacement imposé sur Γ_u , ν le vecteur unitaire normal à Γ , h la contrainte imposée sur Γ_σ , q le flux de chaleur, m la densité volumique de source de chaleur, “grad” l'opérateur gradient, R la résistivité thermique, n la température donnée sur Γ_T , p le flux de chaleur imposé sur Γ_q . Les propriétés matérielles sont supposées dépendantes de la fraction volumique ξ et de la température T .

2.2 Le problème adjoint

Afin de calculer le gradient de la fonctionnelle coût, nous considérons la fonctionnelle coût augmentée, (ou lagrangien) suivante :

$$\begin{aligned} J_A = \int_{\Omega} \{ & j(\xi, u(\xi), \sigma(\xi), T(\xi), q(\xi); x) \\ & + v \cdot (\operatorname{div} \sigma + f(\xi)) \\ & + \tau \cdot [S\sigma + \alpha(T - T^{\text{réf}}) - \epsilon(u)] \\ & + \theta (-\operatorname{div} q + m) \\ & + \varphi \cdot (\operatorname{grad} T + Rq) \} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (11)$$

Pour ce lagrangien J_A , les quantités v , τ , θ et φ correspondent aux multiplicateurs de Lagrange associés aux équations d'état (2)-(9) du problème direct. θ est un scalaire, v et φ deux tenseurs d'ordre 1, τ un tenseur d'ordre 2 et “ \cdot ” désigne le produit scalaire usuel de deux tenseurs d'ordre 1 ou 2.

En calculant formellement la variation δJ_A de J_A , en réarrangeant les termes et en utilisant la formule de Green, on aboutit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \delta J_A = & \int_{\Omega} \{ [j_{\xi} + f_{\xi} \cdot v + \tau \cdot S_{\xi} \sigma + \tau \cdot \alpha_{\xi} (T - T^{\text{réf}}) + \theta m_{\xi} + \varphi \cdot q R_{\xi}] \delta \xi \\ & + (\text{div } \tau + j_u) \cdot \delta u + (j_{\sigma} + S\tau - \epsilon(v)) \cdot \delta \sigma \\ & + [j_T + \tau \cdot \alpha + \tau \cdot (S_T \sigma + \alpha_T (T - T^{\text{réf}})) - \text{div } \varphi + R_T \varphi \cdot q] \delta T \\ & + (j_q + \text{grad } \theta + R\varphi) \cdot \delta q \} d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_u} \delta \sigma \nu \cdot v d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma}} \tau \nu \cdot \delta u d\Gamma - \int_{\Gamma_T} \delta q \cdot \nu \theta d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \varphi \cdot \nu \delta T d\Gamma. \end{aligned} \quad (12)$$

où j_{ξ} désigne la dérivée partielle de j par rapport à ξ , j_u celle de j par rapport à u , etc.

Le problème adjoint est obtenu en choisissant les multiplicateurs de manière à annuler les facteurs des variations autres que $\delta \xi$. Le problème que l'on obtient s'écrit :

$$\text{div } \tau + j_u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (13)$$

$$\epsilon(v) = S\tau + j_{\sigma} \quad \text{dans } \Omega, \quad (14)$$

$$v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_u, \quad (15)$$

$$\tau \nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\sigma}, \quad (16)$$

$$-\text{div } \varphi + j_T + \tau \cdot \alpha + R_T \varphi \cdot q + \tau \cdot (S_T \sigma + \alpha_T (T - T^{\text{réf}})) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (17)$$

$$\text{grad } \theta + j_q = -R\varphi \quad \text{dans } \Omega, \quad (18)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_T, \quad (19)$$

$$\varphi \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_q. \quad (20)$$

Les variables v , τ , θ et φ définissent l'état adjoint, solution du problème adjoint (équations 13-20). Ce choix permet de réduire l'équation (12) à :

$$\delta J_A = \int_{\Omega} \underbrace{(j_{\xi} + f_{\xi} \cdot v + \tau \cdot S_{\xi} \sigma + \tau \cdot \alpha_{\xi} (T - T^{\text{réf}}) + \theta m_{\xi} + \varphi \cdot R_{\xi} q)}_{\nabla_{\xi} J_A} \delta \xi d\Omega. \quad (21)$$

Dans cette expression, on reconnaît $\nabla_{\xi} J_A$, la dérivée variationnelle de J_A par rapport à ξ , au sens du produit scalaire ($\langle f, g \rangle \mapsto \int_{\Omega} f g d\Omega$). Il en résulte que si (u, σ, T, q) et $(v, \tau, \theta, \varphi)$ sont respectivement solutions du problème direct et du problème adjoint, alors :

$$\delta J_A = \langle \nabla_{\xi} J_A, \delta \xi \rangle = \langle \nabla_{\xi} J, \delta \xi \rangle.$$

3 Résolution numérique

Intéressons nous au cas finidimensionnel, c'est à dire au cas où ξ est supposé dépendre d'un nombre fini de paramètre $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$, qui deviennent les inconnues du problème, et

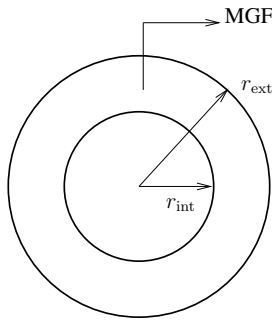
considérons un schéma d'interpolation simple de ξ , $\xi = \sum_{i=1}^N \pi_i s_i$, où les s_i , $i = 1, \dots, N$, sont des fonctions d'interpolations connues. En outre, supposant que Ω est subdivisé en N sous-domaines Ω_i , et que la fonction s_i est la fonction caractéristique de Ω_i ($s_i(x) = 1$ si $x \in \Omega_i$, 0 sinon), pour $i = 1, \dots, N$, alors :

$$\delta J = \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{\Omega} [j_{\xi} + f_{\xi} \cdot v + \tau \cdot S_{\xi} \sigma + \tau \cdot \alpha_{\xi} (T - T^{\text{ref}}) + \theta m_{\xi} + \varphi \cdot R_{\xi} q] d\Omega \right\} \delta \pi_i \quad (22)$$

À partir de cette expression, nous déduisons la i ème composante du gradient de la fonctionnelle J , pour $i = 1, \dots, N$:

$$\nabla_i J = \int_{\Omega_i} [j_{\xi} + f_{\xi} \cdot v + \tau \cdot S_{\xi} \sigma + \tau \cdot \alpha_{\xi} (T - T^{\text{ref}}) + \theta m_{\xi} + \varphi \cdot R_{\xi} q] d\Omega. \quad (23)$$

4 Exemple



On considère un tube de longueur infinie constitué d'un MGF dont les constituants sont l'alliage de titane Ti6AlV et la zircone ZrO_2 (figure 1). Le tube est soumis à un chargement thermomécanique : températures intérieure et extérieure et pressions intérieure et extérieure. Le problème consiste à trouver le profil de composition du MGF constituant le tube qui minimise les contraintes.

FIG. 1-Tube en MGF

4.1 La fonctionnelle coût

Comme fonctionnelle coût, nous considérons la mesure de contrainte suivante :

$$J(\xi) = \frac{1}{(\text{vol}(\Omega))^{1/k}} \left(\int_{\Omega} (\sigma_{\theta\theta}(\xi))^k d\Omega \right)^{1/k}, \quad (24)$$

où $\text{vol}(\Omega)$ désigne le volume de Ω , $\sigma_{\theta\theta}$ est la contrainte circonférentielle, k un entier pair. Pour k très grand, J donne une approximation du maximum de $\sigma_{\theta\theta}$ sur Ω . La fonctionnelle J (24) n'a pas exactement la même forme que celle donnée par l'équation (1). Cette différence n'introduit pas de difficulté supplémentaire, et les calculs de l'état adjoint se font de manière similaires, au moins formellement.

4.2 Propriétés effectives

Le matériau dont est constitué le tube est considéré homogène, isotrope, pour une fraction volumique ξ donnée. Le modèle de Reuss est utilisé pour estimer les propriétés élastiques et la conductivité thermique effectives du MGF [3]. L'estimation du coefficient de dilatation thermique est obtenue par la formule de Levin [3].

4.3 Interpolation du profil de composition

Le tube est subdivisé en $N = 100$ sous-couches dont chacune est supposée avoir une fraction volumique constante. Le gradient de J est déterminé en utilisant l'équation (23).

4.4 Valeurs numériques

Nous prenons respectivement pour les températures de référence, intérieure et extérieure, les pressions intérieures et extérieures, le rayon interne et externe : $T^{\text{ref}} = 300.15$ K, $T_{\text{int}} = 573.15$ K, $T_{\text{ext}} = 300.15$, $P_{\text{int}} = 100$ MPa, $P_{\text{ext}} = 0$ MPa, $r_{\text{int}} = 0.1$ m, $r_{\text{ext}} = 0.11$ m. Les propriétés thermoélastiques des constituants sont données ci-dessous :

ZrO₂

$$\lambda = 1.7(1. + 0.1276 \times 10^{-3}T + 0.66485 \times 10^{-5}T^2) [W/(mK)]$$

$$\alpha = 12.7657 \times 10^{-6}(1. - 1.49 \times 10^{-3}T + 0.1 \times 10^{-5}T^2 - 0.6775 \times 10^{-11}T^3) [1/K]$$

$$E = 244.26596(1. - 1.3707 \times 10^{-3}T + 1.21393 \times 10^{-6}T^2 - 3.681378 \times 10^{-10}T^3) [GPa]$$

$$\nu = 0.2882(1. + 1.13345 \times 10^{-4}T)$$

TiAlV

$$\lambda = 1.20947(1. + 0.0139375T) [W/(mK)]$$

$$\alpha = 7.57876 \times 10^{-6}(1. + 6.5 \times 10^{-4}T + 3.1467 \times 10^{-7}T^2) [1/K]$$

$$E = 122.55676(1. - 4.58635 \times 10^{-4}T) [GPa]$$

$$\nu = 0.28838235(1. + 1.12136 \times 10^{-4}T)$$

4.5 Résultats

La figure (2) montre le profil des contraintes circonférentielles $\sigma_{\theta\theta}$ pour deux profils de compositions différents : deux couches et un profil optimal. Dans le cas de deux couches la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ présente un pic en traction dans la céramique, ce qui nécessite l'optimisation du profil de composition, pour réduire ce pic. Les tests sont effectués avec différents profils initiaux. À chaque fois l'algorithme (SQP) utilisé converge vers le même profil. La figure (3) montre l'évolution de la fonction coût pour un profil initial de ZrO₂/Ti6AlV, $\xi_i = 1$, pour $i = 1, \dots, 50$ et 0, pour $i = 51, \dots, 100$. La solution est obtenue après 60 itérations et la réduction de la fonction coût est de 25%.

Références

- [1] Y. Ootao, Y Tanigawa, and T. Nakamura. Optimization of material composition of fgm hollow cylinder under thermal loading : a neural network approach. *Composite : part B*, 30 :415–422, 1998.
- [2] Y. Ootao, Y Tanigawa, and O. Ishimaru. Optimization of material composition of functionally graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm. *Journal of thermal stresses*, 180 :185–201, 2000.
- [3] D. Boussaa. Optimizing a compositionally graded interlayer to reduce thermal stress in a coated tube. *Comptes rendus de l'Académie des sciences, Série Iib*, 238 :209–215, 2000.
- [4] S. Turteltaub. Optimal control and optimization of functionally graded materials for thermo-mechanical processes. *International Journal of Solids and Structures*, 39(12) :3175–3197, 2002.

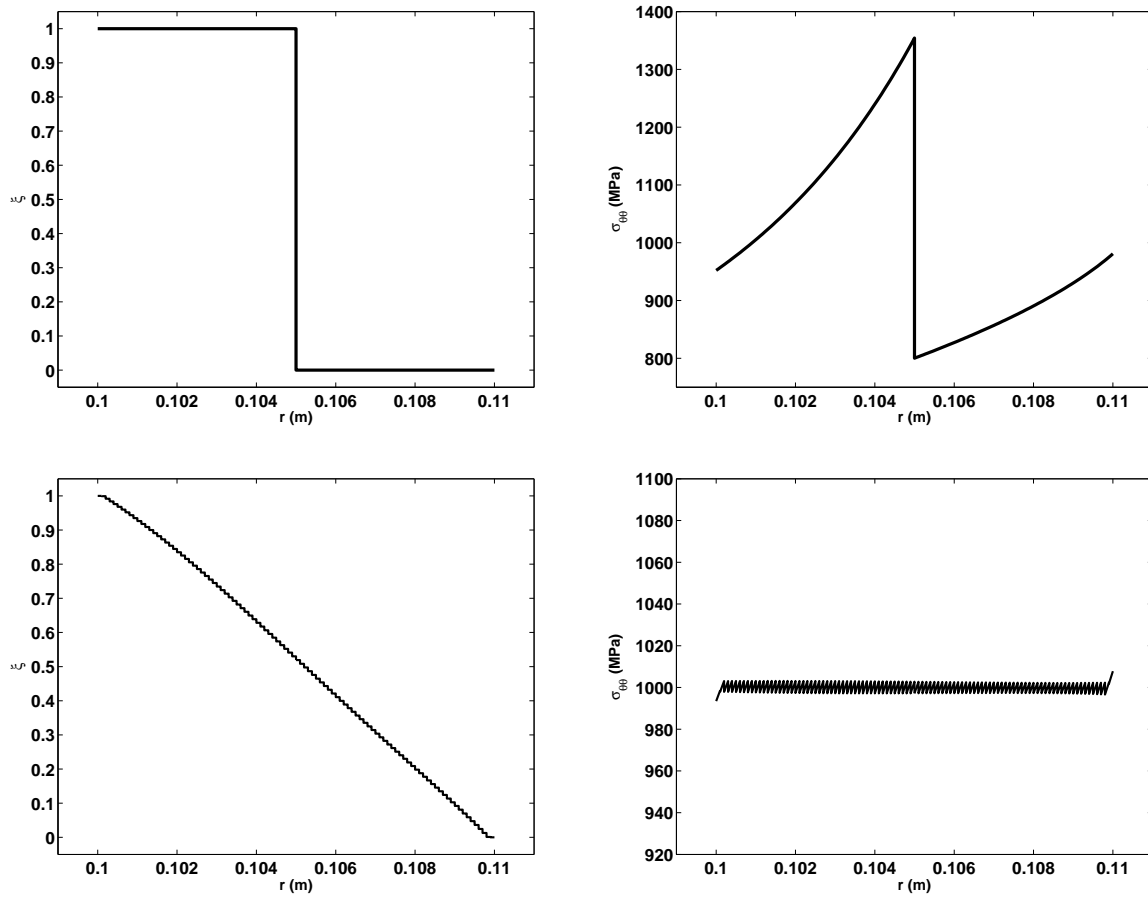


FIG. 1 – À gauche : profils de composition. À droite : profils correspondant de la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$

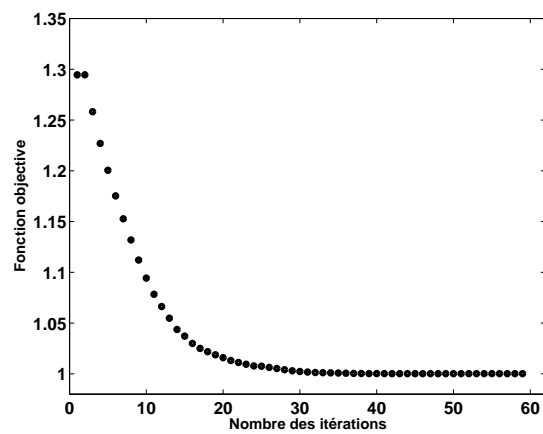


FIG. 2 – Évolution de la fonction coût pour un profil initial de $ZrO_2/Ti6AlV$