



**HAL**  
open science

## Fatigue multiaxiale : un point de vue probabiliste

Cédric Doudard, Sylvain Calloch, François Hild

► **To cite this version:**

Cédric Doudard, Sylvain Calloch, François Hild. Fatigue multiaxiale : un point de vue probabiliste. 17e Congrès français de mécanique, 2005, Troyes, France. hal-04270511

**HAL Id: hal-04270511**

**<https://hal.science/hal-04270511>**

Submitted on 4 Nov 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Fatigue multiaxiale : un point de vue probabiliste

Cédric Doudard<sup>a</sup>, Sylvain Calloch<sup>b</sup> & François Hild<sup>a</sup>

<sup>a</sup>LMT-Cachan

ENS de Cachan / CNRS-UMR 8535 / Université Paris 6

61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan Cedex.

Courriel : Cédric.Doudard@lmt.ens-cachan.fr, Francois.Hild@lmt.ens-cachan.fr

<sup>b</sup>Laboratoire de Mécanique des Structures Navales, ENSIETA

2 rue François Verny, F-29806 Brest Cedex 9.

Courriel : Sylvain.Calloch@ensieta.fr

### Résumé :

*Il est proposé de développer un formalisme probabiliste permettant de décrire des essais multiaxiaux en fatigue à grand nombre de cycles. Il est basé sur la prise en compte d'une répartition aléatoire de site de microplasticité. Le cadre présenté permet également de rendre compte d'augmentations de température en fonction de l'amplitude de contrainte appliquée. Des prévisions sont comparées à d'autres modèles et à des résultats expérimentaux.*

### Abstract :

*It is proposed to develop a probabilistic framework to model multiaxial high cycle fatigue tests. It is based upon random microplastic sites that can be activated. Temperature variations with the stress amplitude can also be accounted for. The predictions are compared with other models and experimental data.*

### Mots-clefs :

**Effets thermiques, microplasticité, modèle de Weibull, processus ponctuel de Poisson**

## 1 Introduction

Dans l'industrie, la rupture de pièces en service causée par la fatigue reste un problème majeur et courant. La difficulté à prévoir le comportement à la fatigue réside dans la nature de la sollicitation, qui est le plus souvent multiaxiale, et dans le gradient des contraintes au sein des pièces en service. Le passage de l'éprouvette, où les sollicitations sont uniaxiales et les contraintes homogènes, à la structure reste mal maîtrisé. Néanmoins, depuis plusieurs années, des approches probabilistes (1; 2) ont montré qu'il était possible de rendre compte simplement (sans ajout de paramètre) de l'effet d'hétérogénéité des contraintes, mais aussi de l'effet de volume. Avec ces approches, la limite d'endurance moyenne dépend du volume effectif (3; 4).

A partir d'observations microscopiques, il a été mis en évidence qu'en fatigue à grand nombre de cycles la microplasticité apparaît généralement dans quelques grains, souvent ceux les mieux orientés (i.e., ceux qui ont une cission maximale (5)) et que cette microplasticité est responsable de la ruine en fatigue. C'est à partir de ce constat que des approches multi-échelles (6; 7; 8) ont été développées pour traiter des problèmes de fatigue. Elles sont très efficaces pour des sollicitations uniaxiales, mais montrent le plus souvent des limites pour des sollicitations multiaxiales (9), notamment pour des trajets non proportionnels, à l'exception de quelques modèles comme celui de Papadopoulos *et al.* (8).

La difficulté de l'étude de la multiaxialité réside dans le traitement des sollicitations non proportionnelles. En effet, au cours de celles-ci, plusieurs directions peuvent être activées, ce

qui a pour conséquence d'augmenter la probabilité de ruine et de mettre en échec les approches classiques. On se propose de développer une approche multi-échelles probabiliste qui puisse rendre compte de cet effet. Il s'agit d'étendre la notion de volume effectif aux trajets multiaxiaux non proportionnels. Ainsi, comme pour le traitement du problème de l'hétérogénéité des contraintes, le fait d'avoir une approche probabiliste permettra de rendre compte du nombre de directions potentiellement activables. Pour cela on se place à l'échelle des plans de glissement et on considère que le seuil de plasticité est une variable aléatoire.

Cette présentation se décompose en trois parties. Tout d'abord, le modèle de description de la microplasticité au niveau d'un plan de glissement est mis en place. Ensuite une présentation générale du modèle est effectuée. Enfin l'étude du cas particulier de sollicitations de traction-torsion est présentée. Au cours de cette dernière partie, l'écriture du modèle est précisée, puis on confronte ce dernier à des résultats de la littérature après l'avoir identifié. On présente également une méthode d'identification moins coûteuse et plus rapide en utilisant des mesures de température.

## 2 Modèle pour la description de la microplasticité

On considère que seuls les grains bien orientés (i.e., ceux qui ont une cission alternée maximale) plastifient. Le tenseur des contraintes dans le grain plastifié  $\sigma$  est relié au tenseur des contraintes macroscopiques  $\Sigma$  par

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} - 2\mu(1 - \beta)\varepsilon_{ij}^p. \quad (1)$$

où  $\varepsilon^p$  est le tenseur des déformations plastiques,  $\beta = \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)}$  est donné par l'analyse d'Eshelby d'une inclusion sphérique,  $\mu$  et  $\nu$  le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du matériau étudié (10; 11; 12). La plasticité est modélisée à l'échelle des bandes de glissement. Dans cette partie, on présente les notations utilisées et le formalisme considéré pour l'étude d'un système de glissement. On suppose que le critère de plasticité découle de la loi de Schmid et qu'un seul système de glissement par grain est actif. Ce système est défini dans un repère fixe par un tenseur d'orientation  $\mathbf{a}$  donné par

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(n_i m_j + n_j m_i), \quad (2)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale au plan et  $\mathbf{m}$  la direction de glissement dans ce plan. Les déformations plastiques  $\varepsilon^p$  et les contraintes dans le cristal  $\sigma$  sont reliées au glissement plastique  $\gamma^p$  et à la cission  $\tau$  agissant sur ce système par

$$\tau = a_{ij}\sigma_{ij}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij}^p = \gamma^p a_{ij}. \quad (4)$$

Le critère de plasticité s'écrit

$$a_{ij}\sigma_{ij} - \tau_y \leq 0, \quad (5)$$

avec  $\tau_y$  le seuil de plasticité. On suppose qu'il n'y a pas d'écrouissage (plasticité parfaite) ce qui permet d'obtenir un modèle cinématique linéaire au niveau macroscopique. Il a été montré (13) que cela était suffisant pour décrire le comportement ainsi que les effets thermiques sous sollicitations cycliques. La relation de localisation (1) au niveau des systèmes de glissement est reliée au glissement plastique par

$$\tau = T - \mu(1 - \beta)\gamma^p, \quad (6)$$

où  $T$  est la cission macroscopique. En notant  $T_a$  la cission alternée suivant ce système de glissement, cette dernière relation permet de trouver le glissement plastique maximal suivant la direction considérée

$$\gamma_{max}^p = \frac{\langle T_a - \tau_y \rangle}{\mu(1 - \beta)}. \quad (7)$$

La dissipation dans un site de volume  $V_0$  (grain où ce système peut être actif) au cours d'un cycle est donnée par la relation suivante

$$D_{site}(\tau_y) = V_0 \int_{cycle} \sigma : \dot{\epsilon}^p dt = V_0 \int_{cycle} \tau \dot{\gamma}^p dt. \quad (8)$$

Pour ce modèle, cette relation devient, quelle que soit la forme du trajet,

$$D_{site}(\tau_y) = \frac{4V_0\tau_y}{h'} \langle T_a - \tau_y \rangle \quad (9)$$

avec  $h' = \mu(1 - \beta)$ . La dissipation dépend de la cission alternée suivant la direction de glissement considérée  $T_a$ . Si l'on suppose que tous les sites et toutes les directions ont le même seuil de glissement plastique, et qu'un site actif entraîne la rupture de la structure, la limite de fatigue est reliée à l'amplitude de la contrainte équivalente de Tresca  $\Sigma_T$  par

$$\Sigma_\infty = \max_{m,n} 2T_a = \Sigma_T. \quad (10)$$

Dans la suite, on considère que le seuil plastique est une variable aléatoire et que tous les systèmes de glissement sont potentiellement activables (pas seulement la direction où la cission alternée est maximale).

### 3 Présentation du modèle

On considère un ensemble de sites élasto-plastiques dans une matrice élastique. Une direction devient active quand la cission critique, qui est aléatoire, est inférieure à  $T_a$  pour cette direction. L'activation des sites est décrite par un processus ponctuel de Poisson (14; 15; 16) dont l'intensité  $\lambda$  (i.e., la densité de sites actifs) est une loi puissance en fonction de la cission alternée, mais afin de tenir compte de toutes les directions possibles, nous intégrons cette loi suivant toutes les directions de l'espace définies par l'angle solide  $\Theta$

$$\lambda = \frac{1}{V_0 S_0^m} \int (2T_a)^m d\Theta. \quad (11)$$

où  $m$  et  $V_0 S_0^m$  sont deux paramètres dépendant du matériau. Ce type de formalisme avait déjà été utilisé par Weibull (17), mais il considérait la contrainte normale. La probabilité de trouver  $k$  sites actifs dans un domaine  $\Omega$  de volume  $V$  est donnée par

$$P_k = \frac{[N(\Omega)]^k}{k!} \exp[-N(\Omega)], \quad (12)$$

où  $N(\Omega)$  est le nombre moyen de sites actifs défini par

$$N(\Omega) = \lambda V. \quad (13)$$

Si l'on considère l'hypothèse du maillon le plus faible pour l'analyse des essais de fatigue classique, la probabilité de trouver au moins un site actif dans un domaine  $\Omega$  de volume  $V$  s'écrit

$$P_F = 1 - \exp\left(-\int_{\Omega} \lambda dV\right). \quad (14)$$

En utilisant l'équation (11), la probabilité de rupture est donnée par

$$P_F = 1 - \exp\left[-\frac{1}{V_0} \int \left(\frac{2T_a}{S_0}\right)^m \cos(\zeta) d\Theta dV\right]. \quad (15)$$

Elle peut être reliée à  $\Sigma_T$  par

$$P_F = 1 - \exp\left[-\frac{V\tilde{H}_m}{V_0} \left(\frac{\Sigma_{FT}}{S_0}\right)^m\right]. \quad (16)$$

où le facteur d'hétérogénéité des contraintes  $\tilde{H}_m = \frac{1}{V} \int \left(\frac{\Sigma_T}{\Sigma_{FT}}\right)^m \kappa(m) dV$ ,  $\Sigma_{FT} = \max_V(\Sigma_T)$  et  $\kappa(m)$  le facteur d'hétérogénéité des directions sollicitées est défini par

$$\kappa(m) = \int \left(\frac{2T_a}{\Sigma_T}\right)^m d\Theta. \quad (17)$$

L'équation (16) correspond au modèle de Weibull, en notant  $V_{eff} = V\tilde{H}_m$  le volume effectif, qui rend compte désormais du nombre de directions activées en fonction du trajet de chargement. C'est la vision multiaxiale du volume effectif associé au modèle de Weibull.

Dans le cadre de ce nouveau modèle, la limite d'endurance moyenne  $\bar{\Sigma}_{\infty}$  et l'écart type associé  $\bar{\bar{\Sigma}}_{\infty}$  sont donnés par

$$\bar{\Sigma}_{\infty} = S_0 \left(\frac{V_0}{V_{eff}}\right)^{(1/m)} \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right), \quad (18)$$

$$\bar{\bar{\Sigma}}_{\infty} = S_0 \left(\frac{V_0}{V_{eff}}\right)^{(1/m)} \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right)}. \quad (19)$$

où  $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} \exp(-t) dt$  est la fonction gamma (18). Ces équations correspondent aux résultats obtenus avec un modèle de Weibull, à la différence près de la nature du volume effectif. La nouvelle définition de ce dernier permet non seulement de rendre compte de l'hétérogénéité des contraintes (i.e., plus l'hétérogénéité des contraintes est importante, i.e., plus  $H_m$  est petit, plus la limite d'endurance moyenne est grande) et de l'effet de volume (i.e., plus le volume est grand, plus la limite d'endurance moyenne est petite), mais aussi du nombre de directions sollicitées à travers  $\kappa(m)$ , et donc du caractère multiaxial et non proportionnel du chargement.

Pour décrire le comportement à nombre de cycles limités, l'amorçage des fissures est décrit par une énergie dissipée critique  $E_c$ . Ainsi le nombre de cycles à rupture  $N$  est relié à la dissipation d'un site de seuil plastique égal à la limite de fatigue pour une probabilité de rupture donnée  $P_F$  (i.e.,  $\Sigma_{\infty}(P_F)$ ) par

$$ND_{site}(\Sigma_{\infty}(P_F)) = E_c. \quad (20)$$

On peut en déduire la relation suivante

$$N = \frac{A'}{\langle \Sigma_T - \Sigma_{\infty}(P_F) \rangle \Sigma_{\infty}(P_F)}. \quad (21)$$

où  $A' = \frac{h'E_c}{V_0}$ . Cette dernière équation correspond à la loi de Stromeier (19). Ainsi nous obtenons un modèle qui dépend de seulement deux paramètres de Weibull  $m$  et  $S_0 (V_0)^{(1/m)}$ , et éventuellement d'un troisième si l'on souhaite décrire toute la courbe de Wöhler,  $A'$ . Nous allons dans la suite montrer les résultats du modèle en ce qui concerne l'endurance pour différentes sollicitations de traction-torsion.

#### 4 Résultats pour des trajets de traction-torsion

Dans cette partie, nous nous limitons aux trajets de traction/torsion à contrainte moyenne nulle. Le tenseur des contraintes macroscopiques est donné par

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & 0 \\ \Sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

avec

$$\Sigma_{11} = \Sigma_0 \cos(2\pi f_r t), \quad (23)$$

$$\Sigma_{12} = T_0 \cos(2\pi f_r t + \delta). \quad (24)$$

où  $f_r$  est la fréquence du chargement et  $\delta$  le déphasage entre les deux sollicitations. L'amplitude de la contrainte équivalente de Tresca est donnée par

$$\Sigma_T = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\Sigma_0^2 + 4T_0^2 + \sqrt{(\Sigma_0^2 + 4T_0^2)^2 - 16\Sigma_0^2 T_0^2 \sin^2 \delta}}. \quad (25)$$

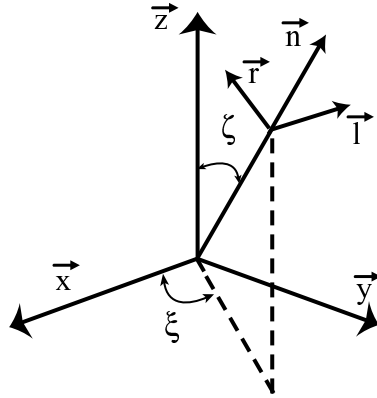
Afin d'appliquer le modèle, on va tout d'abord préciser l'expression de  $\kappa(m)$ .

##### 4.1 Calcul de $\kappa(m)$

Il faut tout d'abord expliciter l'expression de la cission alternée dans le cadre de cette application. Nous calculerons ce terme dans le cas d'un chargement en traction/torsion à contrainte moyenne nulle (8). Le plan de glissement est repéré par sa normale  $\mathbf{n}$  qui est définie dans le repère fixe  $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  à l'aide de deux angles  $\xi$  et  $\zeta$ , représentés sur la figure 1, par la relation suivante

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin(\zeta) \cos(\xi) \\ \sin(\zeta) \sin(\xi) \\ \cos(\zeta) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Les deux vecteurs  $\mathbf{l}$  et  $\mathbf{r}$  sont définis de telle sorte que  $(O, \mathbf{n}, \mathbf{l}, \mathbf{r})$  forme une base orthonormée de l'espace

FIG. 1 – Angles  $\xi$  et  $\zeta$  définissant l'orientation de  $\mathbf{n}$ .

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -\cos(\zeta) \cos(\xi) \\ -\cos(\zeta) \sin(\xi) \\ \sin(\zeta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} -\sin(\xi) \\ \cos(\xi) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Le vecteur contrainte tangentielle associé au plan de normal  $\mathbf{n}$  est défini par

$$\mathbf{C} = (f \sin(2\pi f_r t) + g \cos(2\pi f_r t)) \mathbf{l} + (p \sin(2\pi f_r t) + q \cos(2\pi f_r t)) \mathbf{r} \quad (28)$$

où

$$f = \sin(\zeta) \left( -\frac{\Sigma_0}{2} \sin(2\xi) + T_0 \cos(2\xi) \cos(\delta) \right), \quad (29)$$

$$g = T_0 \sin(\zeta) \cos(2\xi) \sin(\delta), \quad (30)$$

$$p = -\frac{1}{2} \sin(2\zeta) (\Sigma_0 \cos^2(\xi) + T_0 \sin(2\xi) \cos(\delta)), \quad (31)$$

$$q = -\frac{1}{2} T_0 \sin(2\zeta) \sin(2\xi) \sin(\delta). \quad (32)$$

La relation (28) représente l'équation d'une ellipse. Ses deux demi-axes sont donnés par

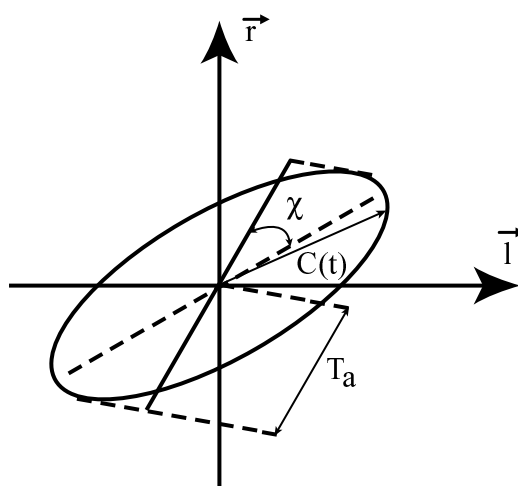
$$a, b = \sqrt{\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2}\right)^2 - (fq - gp)^2}}. \quad (33)$$

Le signe (+) correspond au demi-axe le plus grand (a) et le signe (–) au plus petit (b). La cission alternée pour la direction  $\mathbf{m}$  repérée par l'angle  $\chi$  par rapport au grand axe de l'ellipse représentée sur la figure 2 s'écrit

$$T_a(\Sigma_0, T_0, \delta) = \sqrt{a^2 \cos^2(\chi) + b^2 \sin^2(\chi)}. \quad (34)$$

$\kappa(m)$  est défini par

$$\kappa(m) = \int_{\xi=0}^{2\pi} \int_{\zeta=0}^{\pi} \int_{\chi=0}^{2\pi} \left( \frac{2T_a(\Sigma_0, T_0, \delta)}{\Sigma_T} \right)^m \sin(\zeta) d\chi d\zeta d\xi. \quad (35)$$

FIG. 2 – Définition de l'angle  $\chi$ .

La triple intégrale  $\kappa$  n'est pas indépendante du trajet de chargement, même s'il est radial :

- traction :  $\kappa(m = 16) = 3.6$  ;
- torsion :  $\kappa(m = 16) = 1.0$  ;
- traction/torsion ( $\delta = 0$  et  $2T_0 = \Sigma_0$ ) :  $\kappa(m = 16) = 1.6$  ;
- traction/torsion ( $\delta = \frac{\pi}{2}$  et  $2T_0 = \Sigma_0$ ) :  $\kappa(m = 16) = 9.6$ .

En effet, la contrainte équivalente (qui permet de rendre compte des effets thermiques) varie en fonction de  $m$ . Lorsque  $m = 2$ , elle correspond à la contrainte de von Mises et lorsque  $m$  tend vers l'infini, elle correspond à celle de Tresca. C'est pourquoi, nous avons choisi ici d'exprimer tous les résultats en fonction de la contrainte équivalente de Tresca. Ceci a pour conséquence que le facteur d'hétérogénéité des directions sollicitées  $\kappa(m)$  dépend non seulement de  $m$  mais aussi du chargement pour les trajets radiaux. La direction de référence est désormais le trajet de torsion, car dans ce cas  $\kappa(m)$  est indépendant de  $m$ . La figure 3 montre la surface de fatigue pour des sollicitations homogènes obtenues dans le plan traction/torsion en amplitude (on a restreint notre étude au chargement à contrainte moyenne nulle), qui diffère peu de celle de von Mises. Enfin on peut remarquer à travers les deux derniers résultats du calcul de  $\kappa(m)$  que la non proportionnalité affecte énormément sa valeur. Nous allons dans la suite confronter ce modèle à des résultats expérimentaux.

## 4.2 Comparaison entre les prévisions et l'expérience

Nous allons utiliser la base d'essais concernant deux matériaux : le C20 (20) et le 30Ni-CrMo16 (21) (tableau 1). Il faut noter que ces essais ont été réalisés sur éprouvettes cylindriques

material	$R_e$ (MPa)	$R_m$ (MPa)	$\bar{\Sigma}_\infty(T, -1)$ (MPa)	$\bar{\Sigma}_\infty(FR, -1)$ (MPa)	$m$	$S_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{(1/m)}$ (MPa)
30NiCrMo16	950	1200	560	658	16	632
C20	350	520	273	310	16	302

TAB. 1 – Caractéristiques mécaniques des deux matériaux étudiés.



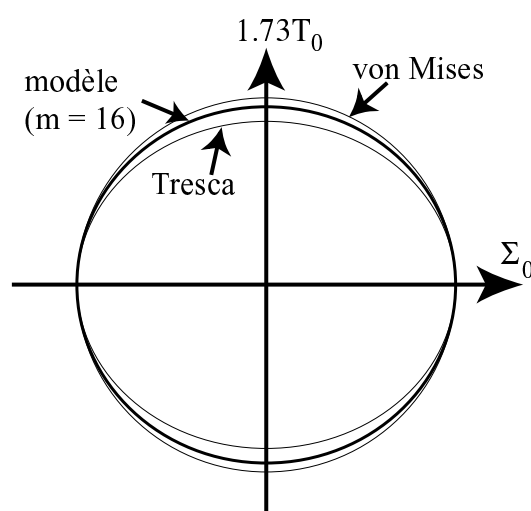


FIG. 3 – Surface de fatigue obtenue avec le modèle avec  $m = 16$ .

pleines et qu'il s'agit des limites d'endurance moyennes à  $10^6$  cycles obtenues par la méthode de l'escalier. L'identification des deux paramètres du modèle peut se faire à partir du résultat de la limite d'endurance moyenne sous sollicitations de traction-compression et de son écart type en utilisant les équations (18) et (19). Cependant la connaissance précise de l'écart type associé à cette limite réclame l'utilisation de nombreuses éprouvettes, c'est pourquoi une autre solution a été choisie. Elle consiste à considérer les deux résultats sous sollicitations de traction-compression (T) et flexion rotative (FR). Dans le dernier cas, les contraintes sont hétérogènes. On montre qu'on a les relations suivantes

$$H_m(FR) = \frac{2}{m+2}, \quad (36)$$

$$H_m(T) = 1. \quad (37)$$

Le calcul du facteur  $H_m$  est présenté en annexe. Le tableau 1 donne le résultat de l'identification pour les deux matériaux.

Les deux paramètres du modèle étant connus, on peut prévoir la limite d'endurance moyenne pour différents trajets de chargements sous sollicitation de flexion plane et de torsion (FP & To) ou de flexion rotative et de torsion (FR & To). Le tableau 2 montre la comparaison entre le modèle (prévision de la limite d'endurance moyenne) et les résultats d'essais (1 résultat = 1 éprouvette). Si l'erreur relative de la prévision (ERP) est positive, la prévision est conservative, sinon elle ne l'est pas. Le calcul a été effectué en ne tenant pas compte du facteur  $\kappa(m)$  ( $H_m$ ) et en tenant compte ( $\tilde{H}_m$ ). Le calcul de  $\tilde{H}_m$  est présenté en annexe.

L'amélioration due à  $\kappa(m)$  reste limitée à cause de la forme des chargements. Un rapport entre l'amplitude du chargement en flexion plane et celui en torsion de 0.5 aurait permis de montrer un effet plus grand de  $\kappa(m)$ . Une campagne d'essais complémentaires devra être réalisée. Dans ce tableau, on a aussi reporté les résultats obtenus pour les modèles de Papadopoulos *et al.* (8), Dang Van *et al.* (6) et Crossland (22) (les calculs ayant été effectués par Bainvillet *et al.* (9)). Ces critères ne rendant pas compte de l'effet de l'hétérogénéité des contraintes, ils ont été identifiés à partir de résultats concernant les limites d'endurance en torsion et en flexion plane (d'où les 0% d'erreur). Le coût de l'identification est donc identique pour tous les modèles.

Matériau	Chargement	$\Sigma_0$ (MPa)	$T_0$ (MPa)	$\delta$ (°)	ERP ( $H_m$ )	ERP ( $\tilde{H}_m$ )	ERP D.V.	ERP Cros.	ERP Pap.
30NiCrMo16	FR	658	0	0	0%	0%	-4.9%	-4.9%	-4.9%
30NiCrMo16	T	560	0	0	0%	0%	-23%	-23%	-23%
30NiCrMo16	FP	690	0	0	-3.7%	-3.7%	0%	0%	0%
30NiCrMo16	To	0	428	0	25%	17%	0%	0%	0%
30NiCrMo16	FP & To	519	291	0	14%	8.6%	5.4%	2.7%	2.7%
30NiCrMo16	FP & To	514	288	90	-14%	-15%	-36.4%	-34.2%	1.7%
30NiCrMo16	FR & To	337	328	0	11.8%	4.4%	-4.8%	-8.3%	-8.3%
30NiCrMo16	FR & To	482	234	0	3%	-2.8%	-8.9%	-11.4%	-11.4%
C20	FR	310	0	0	0%	0%	-7%	-7%	-7%
C20	T	273	0	0	0%	0%	-21.6%	-21.6%	-21.6%
C20	FP	332	0	0	-2.7%	-2.7%	0%	0%	0%
C20	To	0	186	0	16.6%	8.6%	0%	0%	0%
C20	FP & To	246	138	0	13.5%	8.1%	6.9%	4.1%	6.9%
C20	FP & To	264	148	90	-10%	-11%	-23.1%	-25.4%	1.9%
tous	$\overline{ERP}$	-	-	-	8.1%	5.9%	10.1%	10.2%	6.4%

TAB. 2 – Comparaison entre différentes prévisions avec les résultats expérimentaux de fatigue.

Si l'on se réfère aux résultats présentés par Bainvillet *et al.*, le modèle proposé est plus prédictif que celui de Dang Van *et al.* ou de Crossland (erreur de 30% pour les trajets déphasés) et donne des résultats comparables à ceux du modèle de Papadopoulos *et al.* Cependant le modèle proposé est le seul capable de rendre compte de la dispersion des résultats en fatigue, de l'effet de volume et d'hétérogénéité des contraintes.

Une autre méthode d'identification aurait pu être utilisée dans le cas spécifique du modèle proposé ici afin d'en réduire le coût. Elle consiste en l'utilisation des effets thermiques au cours de chargements cycliques qui ne nécessite qu'une seule éprouvette.

### 4.3 Autre technique d'identification

Cette technique repose sur l'observation de la température stationnaire moyenne lors de cycles de chargement. Il est souvent remarqué qu'après une certaine limite, cette température croît de manière significative (23; 24; 25; 13). Cette observation est expliquée par un échauffement engendré par l'activation de la microplasticité. Dans la suite, nous allons montrer comment le modèle développé, qui repose sur une approche multi-échelles, rend compte des effets thermiques et comment cet essai peut être utilisé pour l'identification du module de Weibull  $m$ , caractéristique de la dispersion.

Comme nous l'avons montré dans la première partie, la dissipation d'un site causée par la microplasticité est reliée à la cission alternée par

$$D_{site}(\tau_y) = \frac{4V_0\tau_y}{h'} \langle T_a - \tau_y \rangle. \quad (38)$$

Avec un processus ponctuel de Poisson,  $V \frac{d\lambda}{dT} dT$  est le nombre de sites s'activant pour une cission alternée comprise entre  $T$  et  $T + dT$ , i.e., le nombre de sites ayant une limite d'élasticité comprise entre  $T$  et  $T + dT$ , et dont la dissipation cyclique associée vaut  $D_{site}(T)$ . La dissipation cyclique totale  $D \times V$  pour un volume  $V$  est égale à la somme des dissipations associées aux

différentes directions de seuil de plasticité  $T$  pondérées par le nombre de directions ayant ce seuil dans le volume  $V$

$$D \times V = \int_0^{T_a} D_{site}(T) V \frac{d\lambda}{dT} dT. \quad (39)$$

On obtient ainsi

$$D = \int_0^{T_a} \frac{m}{V_0 S_0^m} \int_{\xi=0}^{2\pi} \int_{\zeta=0}^{\pi} \int_{\chi=0}^{2\pi} \frac{4V_0 T}{h'} (T_a - T) 2T^{m-1} \sin(\zeta) d\chi d\zeta d\xi dT. \quad (40)$$

L'intégration de l'équation (40) permet de relier la densité de dissipation cyclique  $D$  à l'amplitude des cissons alternées

$$D = \frac{4mV_0}{h'(m+1)(m+2)} \frac{\int_{\xi=0}^{2\pi} \int_{\zeta=0}^{\pi} \int_{\chi=0}^{2\pi} 2T_a^{m+2} \sin(\zeta) d\chi d\zeta d\xi}{V_0 S_0^m}. \quad (41)$$

Cette dissipation volumique cyclique peut être mise sous la forme suivante

$$D = \frac{4mV_0 \kappa(m+2)}{h'(m+1)(m+2)} \frac{\Sigma_T^{m+2}}{V_0 S_0^m}. \quad (42)$$

Cette dissipation engendre une variation de la température, qui peut être évaluée en résolvant l'équation de la chaleur. Elle est donnée par, en ne considérant que la microplasticité comme terme source

$$\dot{\theta} + \frac{\theta}{\tau_{eq}} = \frac{f_r D}{\rho c}. \quad (43)$$

où  $\tau_{eq}$  est une constant de temps dépendant des conditions limites thermiques,  $\rho$  la masse volumique et  $c$  la chaleur spécifique. L'évolution de la solution stabilisée en fonction de l'amplitude de la contrainte équivalente de Tresca s'écrit

$$\bar{\theta} = \eta' V_0 \kappa(m+2) \frac{m}{(m+1)(m+2)} \frac{\Sigma_T^{m+2}}{V_0 S_0^m}, \quad (44)$$

avec  $\eta' = \frac{4f_r \tau_{eq}}{h' \rho c}$ . On observe que la réponse est une loi puissance en  $m+2$  de  $\Sigma_T$ . Ainsi cette méthode d'identification de  $m$  ne nécessite que l'utilisation d'une seule éprouvette et permet de réduire de façon non négligeable le coût de l'identification du modèle (13). Cette méthode ne peut pas s'appliquer aux autres modèles qui ont gardé une approche déterministe.

La figure 4 montre le résultat de l'identification de  $m$  obtenu pour un acier dual-phase (désignation Arcelor : DP600) : on obtient  $m = 20$ . Le second paramètre du modèle est alors identifié directement à l'aide d'une seule campagne d'essais de fatigue (e.g. en traction-compression). Le tableau 3 montre un bon accord entre la prévision du modèle et la limite d'endurance moyenne obtenue par la méthode de l'escalier sous sollicitation de flexion plane. Des trajets plus complexes permettraient de valider complètement le modèle et l'identification.

## 5 Conclusion

Le modèle présenté est basé sur un processus ponctuel de Poisson permettant de décrire l'activation progressive de site microplastifiés. On peut ainsi proposer un modèle de Weibull multiaxial adapté à l'étude de la fatigue à grand nombre de cycles pour des cas de chargements mul-

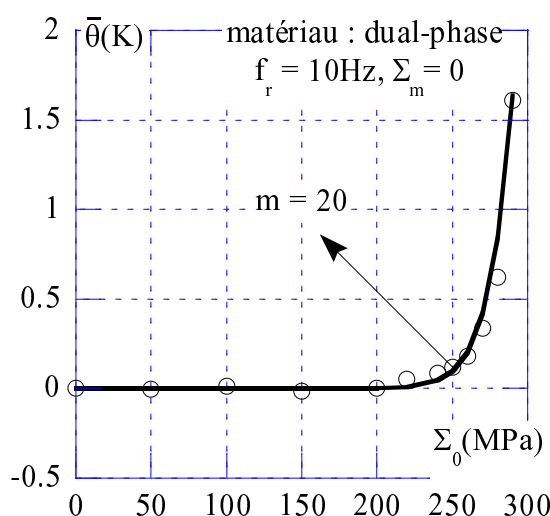


FIG. 4 – Identification de  $m$  pour un acier dual-phase à partir de mesures thermiques donnant la température stationnaire en fonction de l'amplitude de contrainte.

Matériau	Chargement	$\Sigma_0$ (MPa)	ERP ( $\dot{H}_m$ )
DP600	T	275	0%
DP600	FP	303	-6%

TAB. 3 – Comparaison entre prévisions et résultats expérimentaux de fatigue en utilisant une identification à partir de mesures thermiques.

tiaxiaux. Les dispersions sont ainsi prises en compte et les effets de volume et d'hétérogénéité des contraintes sont décrits. Seuls deux paramètres sont nécessaires pour rendre compte des propriétés à l'endurance. Dans sa version la plus complète, le modèle est capable de décrire de manière très satisfaisante différents types de sollicitations multiaxiales. Le même cadre peut être utilisé pour identifier de manière très rapide et avec très peu d'éprouvettes les paramètres de Weibull en étudiant les effets thermiques induits par des sollicitations mécaniques cycliques avec différents niveaux d'amplitude.

Les cas de chargement étudiés ne permettent pas d'apprécier complètement l'effet de multiaxialité des contraintes. Ces cas de chargement sont à étudier pour une validation plus complète du modèle. Enfin, l'effet de la contrainte moyenne, qui n'a pas été discuté ici, reste à traiter.

## 6 Remerciements

Ce travail a été soutenu par Arcelor. Les auteurs remercient A. Galtier et Ph. Cugy pour des discussions fructueuses sur le sujet.

## Références

- [1] W. Weibull, A statistical representation of fatigue failures in solids, *Trans. Roy. Swed. Inst. Tech.* **27** (1949).
- [2] L. Flacelière, F. Morel et Y. Nadot, Approche probabiliste en fatigue multiaxiale polycyclique : application aux défauts de fonderie, *C.R. 22<sup>e</sup> Journées de Printemps : Fatigue et procédés de fabrication*, (SF2M, 2003).

- [3] D. G. S. Davies, The Statistical Approach to Engineering Design in Ceramics, *Proc. Brit. Ceram. Soc.* **22** (1973) 429-452.
- [4] F. Hild, A.-S. Béranger et R. Billardon, Fatigue Failure Maps of Heterogeneous Materials, *Mech. Mater.* **22** (1996) 11-21.
- [5] S. Suresh, *Fatigue of Materials*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [6] K. Dang Van, A. Le Douaron et H.-P. Lieurade, Multiaxial Fatigue Limit: a New Approach, in: S. R. Valluri, D. M. R. Taplin, P. Rama Rao, J. F. Knott et R. Dubey, eds., *C.R. ICF6*, (Pergamon Press, Oxford (UK), 1984), 1879-1885.
- [7] J. Lemaitre, J.-P. Sermage et R. Desmorat, A two scale damage concept applied to fatigue, *Int. J. Fract.* **97** (1999) 67-81.
- [8] I. V. Papadopoulos, P. Davoli, C. Gorla, M. Filippini et A. Bernasconi, A comparative study of multiaxial loading, *Int. J. Fat.* **19** [3] (1997) 219-235.
- [9] A. Bainvillet, T. Palin-Luc et S. Lasserre, A volumetric energy based high cycle multiaxial fatigue criterion, *Int. J. Fat.* **25** (2003) 755-769.
- [10] J. D. Eshelby, The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion and Related Problems, *Proc. Roy. Soc. London A* **241** (1957) 376-396.
- [11] E. Kröner, On the plastic deformation of polycrystals, *Acta Met.* **9** (1984) 155-161.
- [12] M. Berveiller et A. Zaoui, An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids* **26** (1979) 325-344.
- [13] C. Doudard, S. Calloch, F. Hild, P. Cugy et A. Galtier, A probabilistic two-scale model for high cycle fatigue life predictions, *Fat. Fract. Eng. Mat. Struct.* **28** (2005) 279-288.
- [14] R. Gulino et S. L. Phoenix, Weibull Strength Statistics for Graphite Fibres Measured from the Break Progression in a Model Graphite/Glass/Epoxy Microcomposite, *J. Mater. Sci.* **26** [11] (1991) 3107-3118.
- [15] D. Jeulin, *Modèles morphologiques de structures aléatoires et changement d'échelle*, (thèse d'État, Université de Caen, 1991).
- [16] C. Denoual, *Approche probabiliste du comportement à l'impact du carbure de silicium : application aux blindages moyenne énergie*, (PhD thesis, École Normale Supérieure de Cachan, 1998).
- [17] W. Weibull, *A Statistical Theory of the Strength of Materials*, (Roy. Swed. Inst. Eng. Res., Report 151, 1939).
- [18] M. Abramowitz et I. A. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover Publications, Inc., New York (USA), 1965).
- [19] C. E. Stromeyer, The determination of fatigue limits under alternating stress conditions, *Proc. Roy. Soc. London A* **90** (1914) 411-425.
- [20] A. Galtier, *Contribution à l'étude de l'endommagement des aciers sous sollicitations uni ou multiaxiales*, (PhD thesis, ENSAM CER de Bordeaux, 1993).
- [21] C. Froustrey, S. Lasserre et L. Dubar, Validité des critères de fatigue multiaxial en flexion-torsion, in: *Fatigue des structures industrielles*, H. P. Lieurade, eds., (IITT International, Gournay-sur-Marne (France), 1989), 126-38.
- [22] B. Crossland, Effect of a large hydrostatic pressure on the torsional fatigue strength of an alloy steel, *Proceedings International Conference on Fatigue of Metals*, (Institution of Mechanical Engineers, 1959), 138-49.
- [23] G. La Rosa et A. Risitano, Thermographic methodology for rapid determination of the fatigue limit of materials and mechanical components, *Int. J. Fat.* **22** [1] (2000) 65-73.

- [24] M. P. Luong, Infrared thermography of fatigue in metals, *SPIE* **1682** (1992) 222-233.  
 [25] A. Galtier, O. Bouaziz et A. Lambert, Influence de la microstructure des aciers sur leurs propriétés mécaniques, *Méc. Ind.* **3** [5] (2002) 457-462.

## Annexe

Cette annexe a pour but de présenter le calcul du volume effectif pour les différents types de sollicitations étudiées. Il est défini par

$$V_{eff} = V \times H_m, \quad (45)$$

où  $\tilde{H}_m = \frac{1}{V} \int \left( \frac{\Sigma_T}{\Sigma_{FT}} \right)^m \kappa(m) dV$  est le facteur d'hétérogénéité des contraintes multiaxial. Pour l'essai de torsion, la contrainte  $\Sigma$  dépend seulement du rayon  $r$  de sorte que  $\tilde{H}_m$  s'écrit

$$H_m = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r}{R} \right]^m \kappa(m) r dr d\theta = \frac{2}{m+2} \kappa(m), \quad (46)$$

où  $R$  est le rayon extérieur de l'éprouvette pleine. Pour l'essai de flexion rotative, le résultat est identique au facteur  $\kappa(m)$  près.

En ce qui concerne la flexion plane, la contrainte dépend de l'angle  $\theta$  dans le repère cylindrique associé à l'éprouvette. Lorsque le chargement est alterné,  $\tilde{H}_m$  est relié à  $m$  par la relation suivante

$$\tilde{H}_m = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r \sin(\theta)}{R} \right]^m \kappa(m) r dr d\theta = \frac{2}{m+2} \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} [\sin(\theta)]^m d\theta \kappa(m). \quad (47)$$

Dans le cas de chargements combinés en flexion plane et torsion, le facteur  $\kappa(m)$  n'est plus constant dans l'éprouvette. Dans le cas d'un chargement où  $2T_0 = \Sigma_0$  et sans déphasage, on obtient

$$\tilde{H}_m = \frac{2}{m+2} \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\sin(\theta)^2 + 1}{2} \right]^{m/2} \kappa(m, \theta) d\theta, \quad (48)$$

où  $\kappa(m, \theta)$  est défini par

$$\kappa(m, \theta) = \int_{\xi=0}^{2\pi} \int_{\zeta=0}^{\pi} \int_{\chi=0}^{2\pi} \left( \frac{2T_a(\sin(\theta), 1, 0)}{[\sin(\theta)^2 + 1]^{0.5}} \right)^m \sin(\zeta) d\chi d\zeta d\xi. \quad (49)$$