



HAL
open science

Estimation d'erreur locale en temps dans les problèmes d'évolution

Ludovic Chamoin, Éric Florentin, Pierre Ladevèze

► **To cite this version:**

Ludovic Chamoin, Éric Florentin, Pierre Ladevèze. Estimation d'erreur locale en temps dans les problèmes d'évolution. 17e Congrès français de mécanique, 2005, Troyes, France. hal-04270500

HAL Id: hal-04270500

<https://hal.science/hal-04270500>

Submitted on 4 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Estimation d'erreur locale en temps dans les problèmes d'évolution

Ludovic Chamoin, Eric Florentin & Pierre Ladevèze

LMT-Cachan
ENS de Cachan/CNRS/UPMC
61, avenue du Président Wilson
94235 Cachan Cedex
ludovic.chamoin@lmt.ens-cachan.fr

Résumé :

Les travaux menés actuellement au LMT-Cachan ont pour but d'étendre l'estimation d'erreur locale aux problèmes non-linéaires d'évolution, qui mettent en jeu des quantités pouvant asymptotiquement être plus ou moins dépendantes du temps.

Dans ce travail, on se propose de mettre en place une technique d'estimation, basée sur les techniques d'extraction et l'erreur en dissipation, afin d'estimer l'erreur sur une quantité d'intérêt globale en espace et locale en temps. Nous mettrons plus particulièrement en évidence le cumul d'erreur avec le temps et donc les effets d'histoire. La méthode sera illustrée par des exemples simples.

Abstract :

In this paper, we develop and analyze a goal-oriented estimate for evolutive problems. The quantities of interest we consider are local in time but remain global in space. The technic used implies definition of a dual problem and refers to the so-called dissipation error. We will particularly focus on the increase of the error with time and thus will have different ways to estimate, depending whether the quantity of interest we consider is related to the loading story or not.

Mots-clefs :

extracteur ; chargement cyclique ; cumul d'erreur

1 Introduction

De nos jours, le recours à la modélisation de problèmes mécaniques et à leur résolution numérique est devenu fréquent en vue d'un dimensionnement ou d'une optimisation de produit. Ce nouvel outil, pratique s'il est fiable, a fait émerger au sein de la recherche scientifique le domaine de la maîtrise des modèles. La vérification, qui s'inscrit pleinement dans cette optique, vise à analyser la pertinence d'une solution approchée obtenue numériquement par rapport à la solution exacte du problème (souvent inaccessible). Les estimateurs d'erreur de discrétisation sont l'objet de recherches depuis plus de trente ans. Les premiers travaux ont concerné l'estimation d'erreur globale, pour les problèmes linéaires [1], [2], [3] puis non-linéaires [4], [5], [6]. Cette estimation globale, dont l'état de l'art peut être trouvé dans [5], est maintenant relativement bien maîtrisée.

Depuis quelques années, l'estimation d'erreur sur des quantités locales pertinentes pour l'ingénieur (déplacement en un point, contrainte moyenne dans une zone critique,...) est devenue primordiale tant en recherche que dans l'industrie. L'estimation sur de telles quantités d'intérêt n'a été pour le moment envisagée que pour les problèmes linéaires (les techniques utilisées jusqu'à maintenant en non-linéaire se ramenant au cas linéaire après linéarisation) . La

méthode d'estimation repose sur la notion d'extracteur et la mise en place d'un problème dit adjoint associé au problème de référence à résoudre. On montre dans le cas linéaire qu'on peut ainsi majorer la norme de l'erreur sur la quantité d'intérêt locale par le produit de deux erreurs en relation de comportement [7] : celle obtenue pour le problème de référence, et celle obtenue pour le problème adjoint.

Dans le cas des problèmes d'évolution, c'est l'erreur en dissipation [8] qui gouverne la précision de la méthode d'approximation. Nous proposons donc de mettre en place une technique d'estimation d'erreur locale pour les problèmes d'évolution, utilisant cette notion d'erreur en dissipation.

Dans une première partie, nous définissons le problème traité et introduisons la notion d'erreur en dissipation. La seconde partie concerne la technique d'encadrement de quantités d'intérêt et met notamment en place la technique d'extraction et le problème adjoint. Enfin, dans une dernière partie, nous développons le cas des chargements cycliques, pour lesquels des techniques d'estimation plus précises et subtiles peuvent être employées.

2 Définition du problème et notion d'erreur en dissipation

2.1 Présentation du problème d'évolution

On se place sous l'hypothèse des petites perturbations et en régime isotherme. Le problème traité s'écrit : Trouver $\underline{u}(M, t)$ et $\sigma(M, t)$ tels que

- équations de liaison et conditions initiales

$$\underline{u} \in \mathcal{U}^{[0,T]} \quad (1)$$

$$\forall t \in [0, T] \quad \underline{u}|_{\partial_1\Omega} = \underline{U}_d(t) \quad (2)$$

$$\forall M \in \Omega \quad \epsilon = \epsilon_{el} + \epsilon_{an} \quad \epsilon_{an}|_{t=0} = 0 \quad (3)$$

- équation d'équilibre

$$\sigma \in \mathcal{S}^{[0,T]} \quad (4)$$

$$\forall t \in [0, t] \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0 \quad \int_{\Omega} Tr[\sigma \epsilon(\underline{u}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d(t) \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d(t) \cdot \underline{u}^* dS \quad (5)$$

- relations de comportement

$$\forall t \in [0, t] \quad \forall M \in \Omega \quad \sigma = \mathbb{K}\epsilon_{el} \quad \dot{\epsilon}_{an} = \mathbb{B}\sigma \quad (6)$$

De plus, on suppose un chargement $(\underline{U}_d, \underline{f}_d, \underline{F}_d)$ nul à l'instant initial ($t=0$). Toute grandeur définissant l'état est donc nulle à $t=0$.

Ce problème est résolu par la méthode des éléments finis, et on obtient la solution approchée $(\underline{u}^h, \sigma^h)$.

2.2 Notion d'erreur en dissipation

La notion d'erreur en dissipation a été introduite par P. Ladevèze [8]. Nous allons en donner une illustration, à partir du problème décrit précédemment.

Les deux relations de comportement peuvent être séparées en deux parties :

- Equation d'état

$$\sigma = \mathbb{K}\epsilon_{el} \quad (7)$$

- Equation d'évolution (liée à la dissipation)

$$\dot{\epsilon}_{an} = \mathbb{B}\sigma \quad (8)$$

Cette dernière relation de comportement peut être exprimée à partir des pseudo-potentiels de dissipation φ et φ^* définis par :

$$\varphi(\cdot) = \frac{1}{2}Tr[\cdot\mathbb{B}^{-1}\cdot] \quad \text{et} \quad \varphi^*(\cdot) = \frac{1}{2}Tr[\cdot\mathbb{B}\cdot] \quad (9)$$

Une solution sera dite admissible (notée s^{ad}) si toutes les équations du problème de référence sont vérifiées exceptée l'équation d'évolution liée à la dissipation.

Le problème s'écrit alors :

Trouver $(\dot{\epsilon}_{an}, \sigma) \in S^{[0,T]}$ tel que :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{el} + \dot{\epsilon}_{an} \quad \text{CA}, \quad \dot{\epsilon}_{el} = \mathbb{K}^{-1}\dot{\sigma}, \quad \epsilon = 0 \text{ à } t=0$$

$$\sigma \quad \text{SA}$$

$$\dot{\epsilon}_{an} = \mathbb{B}\sigma$$

L'erreur en dissipation, associée à une solution admissible s^{ad} , est ainsi un reflet du non-respect de la relation de comportement liée à la dissipation pour s^{ad} . Elle s'écrit à l'instant t :

$$\eta_t = \left[\int_{\Omega} \varphi(\dot{\epsilon}_{an})d\Omega + \int_{\Omega} \varphi^*(\sigma)d\Omega - \int_{\Omega} Tr[\sigma\dot{\epsilon}_{an}]d\Omega \right]_t = \left[\Phi(\dot{\epsilon}_{an}) + \Phi^*(\sigma) - \int_{\Omega} Tr[\sigma\dot{\epsilon}_{an}]d\Omega \right]_t \quad (10)$$

L'erreur totale sur l'intervalle de temps $[0, T]$ se déduit facilement :

$$e_{diss}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \eta_t dt \quad (11)$$

2.3 Construction des champs admissibles

On construit une solution admissible $(\hat{\sigma}^h, \hat{\epsilon}_{an}^h) \in S^{ad}$ à partir de la solution EF.

A chaque piquet de temps :

- on construit $\hat{\sigma}^h$ en équilibre (à partir des techniques utilisées dans [9]),
- $\hat{\epsilon}_{an}^h$ est alors obtenu par :

$$\hat{\epsilon}_{an}^h = \epsilon(\underline{u}^h) - \mathbb{K}^{-1}\hat{\sigma}^h \quad (12)$$

car \underline{u}^h vérifie les liaisons cinématiques.

Entre chaque piquet de temps, on interpôle linéairement du fait que le chargement évolue linéairement sur chaque pas de temps.

3 Technique d'encadrement de quantité d'intérêt

3.1 Extracteur et problème adjoint

Comme pour les problèmes d'élasticité linéaire [7], [10], nous faisons intervenir la notion d'extracteur et définissons un problème adjoint afin de donner un encadrement sur une quantité d'intérêt locale. Ici, nous choisissons une quantité locale en temps mais globale en espace (l'extension aux quantités locales en espace est facilement envisageable).

Dans une première étape, nous mettons la quantité d'intérêt sous la forme

$$I = \int_0^T \int_{\Omega} Tr[\sigma \dot{\epsilon}_{\Sigma}] d\Omega dt \quad (13)$$

$$I = \langle\langle \sigma, \dot{\epsilon}_{\Sigma} \rangle\rangle \quad (14)$$

où $\dot{\epsilon}_{\Sigma}$ est l'opérateur d'extraction. On travaille alors sur la quantité

$$\Delta I = I^{ex} - \hat{I}^h = \langle\langle \sigma^{ex} - \hat{\sigma}^h, \dot{\epsilon}_{\Sigma} \rangle\rangle \quad (15)$$

En introduisant σ_{Σ} , nul en $t = T$, tel que :

$$\dot{\epsilon}_{\Sigma} = -\mathbb{K}^{-1} \cdot \dot{\sigma}_{\Sigma} + \mathbb{B} \cdot \sigma_{\Sigma} \quad (16)$$

on définit le problème adjoint suivant : Trouver $(\tilde{\sigma}, \dot{\tilde{\epsilon}}_{an})$ tel que :

$$\dot{\tilde{\epsilon}} = \dot{\tilde{\epsilon}}_{el} + \dot{\tilde{\epsilon}}_{an} \quad CA_0, \quad \tilde{\epsilon}_{an}|_{t=T} = 0 \quad (17)$$

$$\tilde{\epsilon}_{el} = -\mathbb{K}^{-1} \tilde{\sigma} \quad (18)$$

$$\sigma_{\Sigma} - \tilde{\sigma} \quad SA_0 \quad (19)$$

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_{an} = \mathbb{B} \cdot \tilde{\sigma} \quad (20)$$

Ce problème est résolu par la méthode des éléments finis, et on obtient la solution approchée $(\tilde{u}^h, \tilde{\sigma}^h)$.

On montre alors, grâce à la majoration :

$$|\bar{\Delta} I| \leq 2 \bar{e}_{diss}(\dot{\tilde{\epsilon}}_{an}^h, \hat{\sigma}^h) \cdot \bar{e}_{diss}(\dot{\tilde{\epsilon}}_{an}^h, \hat{\sigma}^h) \quad (21)$$

où

$$\bar{e}_{diss}^2 = \int_0^T \eta|_t dt = T \cdot e_{diss}^2 \quad (22)$$

et

$$\bar{\Delta} I = \Delta I - \langle\langle B \hat{\sigma}^h - \dot{\tilde{\epsilon}}_{an}^h, \hat{\sigma}^h - \sigma_{\Sigma} \rangle\rangle \quad (23)$$

qu'un encadrement de l'erreur sur la quantité d'intérêt I peut être obtenu.

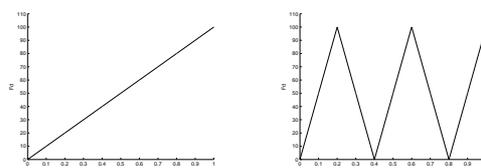
Rem : Le domaine de définition du problème adjoint peut être ramené à $[0, t_1]$ ou $[0, t_{loc}]$ (suivant la quantité d'intérêt à estimer), ce qui permet d'améliorer l'encadrement.

3.2 Résultats en 1D

Nous considérons l'exemple d'une poutre en traction. Son côté gauche ($x = 0$) est encasté tandis que son côté droit ($x = L$) est soumis à un effort imposé $F_d(t)$ (condition de Neuman) dépendant du temps.



Deux types d'évolution temporelle du chargement sont envisagées : la première est linéaire (chargement 1, à gauche ci-dessous) tandis que la deuxième est cyclique (chargement 2, à droite ci-dessous).



L'étude est faite sur l'intervalle de temps $[0, T]$ en prenant le modèle de viscoplasticité défini dans la partie 2.1. Les quantités d'intérêt qu'on cherche à estimer sont soit :

- la moyenne sur toute la structure de la déformation anélastique cumulée entre $t = 0$ et $t = T$ (quantité d'intérêt notée qi_1),
- la moyenne sur toute la structure de la déformation anélastique à un instant $t = t_{loc}$ (quantité d'intérêt notée qi_2).

Pour la résolution numérique, on prend 5 éléments (discrétisation spatiale) et 10 pas de temps (discrétisation temporelle). Les résultats sont présentés à partir des indices d'efficacité $\eta_{inf} = \frac{qi_{inf}}{qi_{ex}}$ et $\eta_{sup} = \frac{qi_{sup}}{qi_{ex}}$, où qi_{ex} représente la quantité d'intérêt exacte, qi_{inf} et qi_{sup} étant les bornes de l'encadrement de qi_{ex} .

		η_{inf}	η_{sup}
chargement 1	qi_1	0.99	1.01
chargement 1	qi_2	0.98	1.02
chargement 2	qi_1	0.96	1.04
chargement 2	qi_2	0.96	1.04

Rem : La qualité de l'encadrement peut être encore améliorée en résolvant numériquement le problème adjoint avec une discrétisation plus fine en espace et en temps.

4 Cas des chargements cycliques

4.1 Notion de cycle limite

Les développements sont donnés dans [11]. Dans ce travail, on montre qu'asymptotiquement, certaines quantités (déformation anélastique, contrainte dans certaines zones, etc...) deviennent indépendantes de l'histoire et ne sont plus conditionnées que par le chargement à l'instant donné.

De ce fait, en présence d'un chargement cyclique, certaines quantités varient asymptotiquement selon un cycle limite et l'erreur sur ces quantités varie également de façon cyclique, sans dépendre de l'histoire.

4.2 Améliorations de la méthode

Afin d'éviter un encadrement d'erreur grossier dû à un cumul de l'erreur en dissipation, on peut se ramener, pour les quantités d'intérêt de dépendant pas de l'histoire, à l'étude de l'erreur sur un cycle (premier cycle du cycle limite par exemple). Cette méthode nécessite la mise en place d'une technique d'extraction et d'estimation ne faisant pas intervenir le cumul d'erreur en dissipation sur tout l'intervalle de temps $[0, T]$.

5 Conclusions

Un estimateur local en temps et global en espace a été proposé pour des problèmes d'évolution en temps. Les résultats obtenus pour des exemples en 1D et 2D semblent montrer que le comportement de cet estimateur est satisfaisant. Une extension possible serait de mettre en place un estimateur local non seulement en temps mais aussi en espace, et d'observer son comportement.

Références

- [1] P. Ladevèze. *Comparaison de modèles de milieux continus*. Thèse d'état, Université P. et M. Curie, Paris (France), 1975.
- [2] I. Babuška and W.C. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computation. *SIAM J. Num. Ana.*, 15,4 :736–754, 1978.
- [3] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu. A simple error estimator and adaptative procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24 :337–357, 1987.
- [4] C. Johnson and P. Hansbo. Adaptative finite element methods for small strain elasto-plasticity. *Proc of IUTAM Conf. on Finite Inelastic Deformations Theory and applications, Hannover (Allemagne)*, 1991.
- [5] P. Ladevèze and J-P. Pelle. *Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics*. Springer, 2005.
- [6] R. Rannacher and F.T. Suttmeier. A posteriori error control and mesh adaptation for finite element models in elasticity and elasto-plasticity. *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics, Ladevèze and Oden Editors, Elsevier*, pages 275–292, 1998.
- [7] J.T. Oden and S. Prudhomme. Goal-oriented error estimation and adptativity for the finite element method. *TICAM report*, 99-15, 1999.
- [8] P. Ladevèze. *Nonlinear computational structural mechanics*. Springer, 1999.
- [9] P. Ladevèze and P. Rougeot. New advances on a posteriori error on constitutive relation in finite element analysis. *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.*, 150 :239–249, 1997.
- [10] P. Ladevèze, P. Rougeot, P. Blanchard, and J-P. Moreau. Local error estimators for finite element linear analysis. *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.*, 176 :231–246, 1999.
- [11] P. Ladevèze and P. Rougee. Plasticité et viscoplasticité sous chargement cyclique : propriétés du cycle limite. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 301, II(13) :891–894, 1985.