



**HAL**  
open science

## Evaluación de parámetros. La prueba de Wald

Matilde Alonso Pérez, Elies Furio Blasco

► **To cite this version:**

Matilde Alonso Pérez, Elies Furio Blasco. Evaluación de parámetros. La prueba de Wald. 2023.  
hal-04263937

**HAL Id: hal-04263937**

**<https://hal.science/hal-04263937>**

Preprint submitted on 29 Oct 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Evaluación de parámetros. La prueba de Wald

Elies FURIÓ BLASCO	Matilde ALONSO PÉREZ
Universidad de Lyon	Universidad de Lyon
<a href="mailto:elies.furio-blasco@univ-lyon3.fr">elies.furio-blasco@univ-lyon3.fr</a>	<a href="mailto:matilde.alonso@univ-lyon2.fr">matilde.alonso@univ-lyon2.fr</a>

**Resumen:** La prueba de Wald es un contraste de hipótesis donde se trata de ver la coherencia de afirmar un valor concreto de un parámetro de un modelo. Se presentan las principales características y limitaciones de la prueba de Wald.

**Résumé :** Le test de Wald est un test d'hypothèse qui permet de vérifier la cohérence de l'affirmation d'une valeur particulière d'un paramètre d'un modèle. Cette note présente les principales caractéristiques et limites du test de Wald.

**Abstract:** Abstract: The Wald test is a hypothesis test where the consistency of asserting a particular value of a parameter of a model is tested. This note presents the main features and limitations of the Wald test.

## Índice

- 1 Introducción
- 2 Abraham Wald
- 3 La prueba de Wald
  - 3.1 Utilización de la prueba de Wald
  - 3.2 Limitaciones de la prueba de Wald
- 4 Aplicación del test de Wald
  - 4.1 Aplicación a la relación entre la obesidad y la mortalidad intrahospitalaria por COVID-19
  - 4.2 Aplicación al estudio de la mortalidad por enfermedades cardiovasculares (diseño)
  - 4.3 Aplicación a un tratamiento para reducir la progresión de la miopía en niños (diseño)
- 5 Referencias
- 6 Anexo. Homocedasticidad e independencia de errores
  - 6.1 Homocedasticidad
  - 6.2 Independencia de errores

## 1 Introducción

La Prueba de Wald es un método estadístico que se utiliza para evaluar las restricciones sobre parámetros no observables en el contexto de modelos estadísticos. Esta prueba se emplea con frecuencia en econometría, epidemiología, medicina y otros campos donde se desarrollan modelos estadísticos para analizar datos.

En esta nota, tras una breve presentación de Abraham Wald, se analiza la prueba estadística de Wald, mostrando, por un lado, la definición estadística de la prueba, su utilización práctica y sus limitaciones. Por otra parte, se presenta dos aplicaciones de la prueba de Wald, una de ellas a modo de diseño de un estudio. El texto finaliza con las referencias utilizadas y un anexo.

## 2 Abraham Wald

Abraham Wald fue un matemático húngaro nacido en 1902. Se graduó y realizó la tesis doctoral en Viena bajo la dirección de Karl Menger. Fue investigador de la Universidad de Columbia y formó parte de la Comisión Cowles<sup>1</sup> de Investigación en Economía de dicha universidad. En el contexto de la Segunda Guerra Mundial, este grupo de científicos trabajaban en problemas de investigación operativa y estadísticas para apoyar el esfuerzo de guerra. Fue durante este período que desarrolló gran parte de su trabajo más influyente, incluida la prueba de Wald.

El objetivo era desarrollar un método de inferencia que permitiera evaluar hipótesis estadísticas de manera rigurosa pero flexible. Wald formuló la prueba como una forma de decidir si un estimador de máxima verosimilitud era "suficientemente cercano" a un valor teórico bajo ciertas condiciones asintóticas.

En un principio, se interesó en la teoría de conjunto y la geometría. Posteriormente, desarrolló contribuciones interesantes en el ámbito de la teoría de la decisión, la econometría y el análisis secuencial. Durante el periodo 1933-39, publicó diferentes contribuciones en dichos ámbitos[1]. Posteriormente, publicó artículos y libros relativos al análisis secuencial e inspección de muestreo[2] [3] [4]. En el ámbito de la Economía, publicó una propuesta de índice del costo de la vida[5]. Abraham Wald murió trágicamente en un accidente aéreo en 1950. Su legado y contribuciones al campo de la estadística y la teoría de la decisión, incluida la prueba de Wald, siguen siendo fundamentales en la investigación académica y la toma de decisiones aplicada en múltiples disciplinas. Una relación de sus trabajos fue recogida por *The Annals of Mathematical Statistics*[6].

---

<sup>1</sup> La Comisión Cowles para la Investigación en Economía, más conocida como Comisión Cowles, es una entidad de investigación que se ha centrado en la promoción de estudios económicos rigurosos, con un énfasis particular en la econometría y la teoría económica matemática. Fue fundada en 1932 por Alfred Cowles, un economista y empresario estadounidense que buscaba mejorar la calidad y la rigurosidad en la investigación económica.

A lo largo de su historia, la Comisión Cowles ha contribuido al desarrollo de varias técnicas y modelos econométricos. Algunas de las figuras más destacadas en el campo de la economía, como Tjalling Koopmans, James Tobin y Kenneth Arrow, han estado asociadas con la comisión. Sus trabajos han abordado una amplia gama de temas, desde la teoría del consumo hasta los modelos de crecimiento económico y la teoría de juegos. Muchas de las metodologías y enfoques que hoy se consideran estándar en la investigación económica tienen sus raíces en el trabajo desarrollado bajo el auspicio de la Comisión Cowles.

La prueba de Wald es solo una entre varias pruebas (como las pruebas de razón de verosimilitud y las pruebas de multiplicadores de Lagrange) que se utilizan para los mismos fines pero bajo diferentes conjuntos de supuestos y condiciones. Sin embargo, la sencillez y la aplicabilidad general de la prueba de Wald la han hecho particularmente popular en una amplia gama de aplicaciones.

La prueba de Wald es ampliamente utilizada en econometría, epidemiología, ciencias sociales y en diversos campos donde se requiere la toma de decisiones basada en modelos estadísticos. Sin embargo, la prueba tiene sus limitaciones, incluida la sensibilidad a grandes muestras y el supuesto de normalidad asintótica.

### 3 La prueba de Wald

La prueba de Wald es una prueba estadística paramétrica nombrada así en honor del estadístico Abraham Wald. Cada vez que hay una relación dentro o entre los datos se puede expresar un modelo estadístico con los parámetros a ser estimados a partir de una muestra. La prueba de Wald se utiliza para poner a prueba el verdadero valor del parámetro basado en la estimación de la muestra.

El Test de Wald es un contraste de hipótesis donde se trata de ver la coherencia de afirmar un valor concreto de un parámetro de un modelo probabilístico una vez tenemos ya un modelo previamente seleccionado y ajustado.

Se aplica siempre tras elegir un modelo (una distribución cualquiera, una regresión simple, una regresión logística, etc.) y a continuación se hace algún contraste de hipótesis sobre uno o varios parámetros: Por ejemplo, la media de la normal es 5, la pendiente de la recta es 0, el coeficiente principal de una regresión logística es 0, etc.

En la prueba estadística Wald, la estima de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}$  del parámetro(s) de interés  $\vartheta$  se compara con el valor propuesto  $\theta_0$ , bajo la suposición de que la diferencia tipificada entre ambos seguirá aproximadamente una distribución normal. Típicamente, el cuadrado de la diferencia se compara con una distribución de chi-cuadrado. En el caso univariante, el Wald estadística es

$$T = \frac{(\hat{\theta} - \theta_0)^2}{\text{var}(\hat{\theta})}$$

*Expresión 1*

Donde

- $\hat{\theta}$ : estimaciones de los parámetros
- $\theta_0$  son los valores de los parámetros propuestos, el bajo del parámetro bajo la hipótesis nula.
- El numerador es la diferencia entre el estimador y el valor bajo la hipótesis nula.
- El denominador es el error estándar del estimador.

En buena medida, se corresponde a una valoración de la distancia entre *Observado* y *Esperado* y se pretende valorar, en un contraste de hipótesis, si lo que obtenemos es o no muy distante de lo que esperamos, en el caso de ser cierta la hipótesis nula.

Para realizar una prueba de Wald, se siguen estos pasos generales:

- Formular la hipótesis nula ( $H_0$ ) y la hipótesis alternativa ( $H_1$ ).
- Calcular el estimador del parámetro ( $\hat{\theta}$ ) y su error estándar
- Calcular la estadística de prueba de Wald usando la Expresión 1.
- Comparar la estadística de prueba con los valores críticos de la distribución chi-cuadrado para determinar la significancia estadística.

Este estadístico sigue una distribución chi-cuadrado bajo la hipótesis nula. Se compara el valor calculado de T con los valores críticos de la distribución chi-cuadrado para determinar la significancia estadística.

### 3.1 Utilización de la prueba de Wald

La prueba de Wald se utiliza comúnmente en el contexto de modelos de regresión, pero la idea subyacente puede aplicarse en otras situaciones donde se estime un parámetro y se desee probar su significancia.

Para realizar una prueba de Wald, sigue estos pasos generales:

- Formula la hipótesis nula ( $H_0$ ) y la hipótesis alternativa ( $H_1$ ).
- Calcula el estimador del parámetro ( $\hat{\theta}$ ) y su error estándar
- Calcula la estadística de prueba de Wald usando la Expresión 1.
- Compara la estadística de prueba con los valores críticos de la distribución chi-cuadrado para determinar la significancia estadística.

Se utiliza para contrastar si es cero o no un determinado coeficiente que multiplica a una variable independiente en una regresión.

- Si el p-valor es menor que 0.05 (o menor que 0.001), se rechaza esa hipótesis nula que afirma que ese coeficiente es cero, y se entiende entonces que ese coeficiente no es cero y que, por lo tanto, el modelo es útil para representar una determinada relación.
- Si, por el contrario, el p-valor es mayor que 0.05 (o mayor que 0.001) eso significa que el valor del coeficiente podría ser perfectamente cero y estar viendo lo que vemos, por lo tanto, esa variable no influye a la hora de determinar la variable dependiente (o también denominada, a veces, variable respuesta) del modelo de regresión.

### 3.2 Limitaciones de la prueba de Wald

A la hora de interpretar los resultados de la prueba de Wald, conviene tener presente una serie de consideraciones relativas a las posibles limitaciones de dicha prueba:

- 1) Linealidad del modelo: la prueba de Wald se deriva asumiendo linealidad en el modelo. Si el modelo es no lineal, la prueba de Wald puede no ser la más apropiada, y podría ser preferible utilizar pruebas basadas en métodos de simulación o Bootstrap. Una aplicación del test de Wald en un modelo no lineal por medio de la simulación puede encontrarse en [7] y una corrección al test de Wald para la prueba de restricciones no lineales en [8].
- 2) Dependencia de la muestra: La prueba de Wald puede ser sensible al tamaño de la muestra. En muestras pequeñas, la distribución de la estadística de prueba

puede no seguir exactamente una distribución chi-cuadrado, lo que podría mermar la validez de las inferencias.

En muestras pequeñas, la prueba de Wald tiende a ser sesgada, y esto puede afectar la validez de las inferencias. En tales casos, pruebas basadas en métodos de remuestreo (como el bootstrap) pueden proporcionar resultados más robustos.

- 3) Inestabilidad numérica: En algunos casos, especialmente cuando los estimadores son cercanos a los límites del espacio de parámetros, la prueba de Wald puede ser propensa a problemas de inestabilidad numérica.

Puede suceder que, al realizar largas cadenas de cálculos, los errores de redondeo pueden acumularse y que ocasionen una pérdida de validez de los resultados, dando lugar al fenómeno de inestabilidad numérica. Se dice que un proceso es inestable cuando los pequeños errores que se producen en una de sus etapas se agrandan en las etapas posteriores y se degrada seriamente la

En el análisis numérico, la **estabilidad numérica** es una propiedad de los algoritmos numéricos que describe cómo los errores en los datos de entrada se propagan a través del algoritmo. En un método estable, los errores debidos a las aproximaciones se atenúan a medida que la computación procede. La estabilidad numérica de un método junto con el número de condición define cuán buen resultado podemos obtener usando métodos aproximados para calcular cierto problema matemático. En un **método inestable**, cualquier error en el procesamiento se magnifica conforme el cálculo procede. Métodos inestables generan rápidamente anomalías y son inútiles para el procesamiento numérico.

exactitud del cálculo en su conjunto.

- 4) Asunciones de normalidad: La prueba de Wald se basa en la suposición de que los estimadores son asintóticamente normales bajo la hipótesis nula. Esta asunción puede no ser válida en todos los casos, especialmente en situaciones con sesgo o no normalidad.
- 5) No robusta a violaciones de suposiciones: La prueba de Wald no es robusta frente a violaciones de algunas suposiciones clave, como la homocedasticidad de los errores y la independencia de los errores. Una aplicación a la presencia de errores con una corrección de la prueba de Wald puede encontrarse en [9].
- 6) Problemas con modelos ajustados mal: Si el modelo subyacente no se ajusta bien a los datos, la interpretación de la prueba de Wald puede ser cuestionable.
- 7) Sensibilidad a valores atípicos: La presencia de valores atípicos puede afectar la validez de la prueba de Wald, especialmente en muestras pequeñas.

Estas limitaciones no han impedido un uso amplio de la prueba de Wald, especialmente porque su simplicidad y facilidad de cálculo, particularmente, en los casos de muestras grandes. No obstante, antes del uso de la prueba es sumamente conveniente revisar todas las circunstancias, así como valorar la oportunidad de

llevar a cabo otras pruebas o métodos que, para el caso en cuestión, puedan mostrarse más apropiados.

## 4 Aplicación del test de Wald

### 4.1 Aplicación a la relación entre la obesidad y la mortalidad intrahospitalaria por COVID-19

J.Bouziotis, M.Arvanitakis y J.-C.Preiser[10] utilizan el test de Wald para calcular los valores de  $p$  en un estudio que analiza la relación entre el Índice de Masa Corporal (IMC) y la mortalidad intrahospitalaria de un amplio cohorte mundial de pacientes hospitalizados por COVID-19 (49 países de Europa y América del Norte).

A partir de una muestra formada por pacientes adultos mayores de edad, hospitalizados con una PCR positiva por COVID-19 (base ISARIC) y conocer su IMC. Los pacientes se han agrupado en función de su IMC en cuatro grupos (bajo peso, normopeso, superpeso y obesidad). Los datos se han analizado en términos de frecuencias absolutas y porcentajes para las categorías, media y desviación típica o mediana et recorrido inter-cuartil para las variables continuas (según la distribución fuese normal o anormal). Se ha contrastado el evento de una muerte en el hospital respecto a la supervivencia (alta hospitalaria con vida). La hipótesis de proporcionalidad de los riesgos se testó por medio de un test de interacción temporal. Se efectuó un análisis multivariante estratificado en función del sexo. Y, el test de Wald se utilizó para calcular los valores  $p$ .

Los pacientes con bajo peso presentaban un riesgo de mortalidad superior al resto de pacientes. (SHR 1,75 [1,44-2,14]). Respecto a los pacientes de bajo peso, los pacientes de normopeso tenían una mortalidad menor (SHR 0,69 [0,58-0,85]), como también los pacientes (0,53 [0,430,65]) y los obesos (SHR 0,55 [0,44-0,67]).

El análisis multivariante por género, tras el ajuste de las restantes variables explicativas identificadas (edad, enfermedad pulmonar crónica, neoplasia, diabetes mellitus tipo 2), confirma que la mortalidad de las pacientes mujeres y hombres con bajo peso fueron superiores a los correspondientes para sobrepeso.

En conclusión, la mortalidad de los pacientes hospitalizados por COVID-19 difiere según el grupo respectivo de IMC, con un efecto beneficioso para los pacientes con sobre peso y negativo para los pacientes con bajo peso.

### 4.2 Aplicación al estudio de la mortalidad por enfermedades cardiovasculares (diseño)

En el ámbito de la mortalidad por enfermedades cardiovasculares, este test podría emplearse para determinar qué variables tienen un efecto significativo en el riesgo de mortalidad. A continuación, describo un ejemplo de aplicación del Test de Wald en este contexto.

#### **Diseño del Estudio**

1) Base de Datos: Recopilar datos retrospectivos o prospectivos de pacientes con enfermedades cardiovasculares, incluyendo variables como edad, género, factores de riesgo (hipertensión, diabetes, tabaquismo, etc.), tratamientos recibidos, y el resultado final (sobrevivencia o fallecimiento).

2) Variables:

- Variable Dependiente: Fallecimiento por enfermedad cardiovascular (1 para fallecido, 0 para sobreviviente).

- Variables Independientes: Edad, género, hipertensión, diabetes, tabaquismo, etc.

### **Análisis Estadístico**

1. Modelo de Regresión Logística: Utilizar un modelo de regresión logística para estimar la probabilidad de fallecimiento en función de las variables independientes.

$$\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 * edad + \beta_2 * género + \dots$$

2. Estimación de Coeficientes: Utilizar un algoritmo de optimización como el método de máxima verosimilitud para estimar los coeficientes  $\beta$ .

3. Test de Wald: Para cada coeficiente ( $\beta_i$ ), calcular la estadística de Wald:

$$W = \frac{\hat{\beta}_i^2}{var(\hat{\beta}_i)}$$

Donde  $\hat{\beta}_i$  es la estimación del coeficiente y  $Var(\hat{\beta}_i)$  es su varianza estimada.

4. Evaluación de Significancia: Comparar la estadística de Wald para cada variable con una distribución chi-cuadrada con 1 grado de libertad. Un valor de p menor a un umbral de significancia (como 0.05 o 0.001) indicaría que la variable es un predictor significativo del resultado.

### **Interpretación y Aplicación Clínica**

- Los coeficientes que resulten ser significativos según el Test de Wald podrían considerarse como predictores importantes de la mortalidad por enfermedad cardiovascular.

- Esto podría llevar a la identificación de factores de riesgo modificables y, en última instancia, a intervenciones clínicas y de medicina preventiva más eficaces.

En esencia, el Test de Wald puede proporcionar información valiosa sobre qué variables son predictores significativos de mortalidad en pacientes con enfermedades cardiovasculares, lo que a su vez puede tener implicaciones importantes para la prevención y el tratamiento de estas enfermedades.

No obstante, conviene tener presente la serie de limitaciones antes señaladas: así como el hecho de que los resultados estadísticos deben necesariamente siempre interpretarse en el contexto de la calidad del diseño del estudio, la relevancia clínica y otros análisis estadísticos complementarios.

### **4.3 Aplicación a un tratamiento para reducir la progresión de la miopía en niños (diseño)**

Queremos saber si el tratamiento es efectivo comparado con un grupo de control que no recibe el tratamiento.

Parámetros:

$\theta_0$ : Cambio promedio en la miopía del grupo de control después de un año, medido en dioptrías (digamos, un aumento de 0.5 dioptrías).

$\hat{\theta}$ : Cambio promedio en la miopía del grupo de tratamiento después de un año.

$Var(\hat{\theta})$ : Varianza del cambio en la miopía en el grupo de tratamiento.



Se recolectan los datos seleccionando dos grupos de niños con miopía. Uno recibe el tratamiento y el otro actúa como grupo de control. Después de un año, se miden los cambios en las dioptrías de ambos grupos.

Supongamos que el cambio promedio en la miopía en el grupo de tratamiento fue un aumento de solo 0.2 dioptrías y que la varianza de este cambio fue de 0.1.

Aplicación de la Prueba de Wald, utilizando la fórmula:

$$W = \frac{(0.2 - 0.5)^2}{0.1} = \frac{(-0.3)^2}{0.1} = \frac{0.09}{0.1} = 0.9$$

Con el valor de W, consultamos una tabla de la distribución chi-cuadrado con 1 grado de libertad para determinar si el resultado es estadísticamente significativo. Si W es significativo a un nivel de confianza de, por ejemplo,  $\alpha=0.05$ , podríamos concluir que el tratamiento es efectivo para frenar la progresión de la miopía en comparación con el grupo de control.

La interpretación del resultado de la prueba de Wald es estadísticamente significativo, tendríamos evidencia sólida para afirmar que el tratamiento es efectivo para reducir la progresión de la miopía en niños, comparado con no recibir ningún tratamiento.

## 5 Referencias

- [1] O. Morgenstern, «Abraham Wald, 1902-1950», *Econometrica*, vol. 19, n.º 4, pp. 361-367, 1951, doi: 10.2307/1907462.
- [2] A. Wald, «Sequential Tests of Statistical Hypotheses», *Ann. Math. Stat.*, vol. 16, n.º 2, pp. 117-86, 1945.
- [3] A. Wald, *Sequential Analysis*. Nueva York: John Wiley and Sons, 1947.
- [4] A. Wald, «Contributions to the Theory of Statistical Estimation and Testing Hypotheses», *Ann. Math. Stat.*, vol. 10, n.º 4, pp. 299-326, 1939.
- [5] A. Wald, «A New Formula for the Index of Cost of Living», *Econometrica*, vol. 7, n.º 4, pp. 319-331, 1939, doi: 10.2307/1906982.
- [6] «The Publications of Abraham Wald», *Ann. Math. Stat.*, vol. 23, n.º 1, pp. 29-33, 1952.
- [7] T. Wang y L. Wu, «Multivariate one-sided tests for nonlinear mixed-effects models», *Can. J. Stat.*, vol. 41, n.º 3, pp. 453-465, sep. 2013, doi: 10.1002/cjs.11180.
- [8] S. L. de Paula Ferrari y F. Cribari-Neto, «On the corrections to the Wald test of non-linear restrictions», *Econ. Lett.*, vol. 42, n.º 4, pp. 321-326, ene. 1993, doi: 10.1016/0165-1765(93)90079-R.
- [9] G. Y. Yi y Y. Yan, «Estimation and hypothesis testing with error-contaminated survival data under possibly misspecified measurement error models», *Can. J. Stat.*, vol. 49, n.º 3, pp. 853-874, sep. 2021, doi: 10.1002/cjs.11594.
- [10] J. Bouziotis, M. Arvanitakis, y J.-C. Preiser, «Indice de masse corporelle et mortalité des patients hospitalisés pour COVID-19», *Nutr. Clin. Métabolisme*, vol. 36, n.º 1, Supplement, pp. S18-S19, feb. 2022, doi: 10.1016/j.nupar.2021.12.034.
- [11] T. S. Breusch y A. R. Pagan, «A Simple Test for Heteroscedasticity and Random Coefficient Variation», *Econometrica*, vol. 47, n.º 5, pp. 1287-1294, 1979, doi: 10.2307/1911963.
- [12] H. White, «A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity», *Econometrica*, vol. 48, n.º 4, pp. 817-838, 1980, doi: 10.2307/1912934.

## 6 Anexo. Homocedasticidad e independencia de errores

### 6.1 Homocedasticidad

La homocedasticidad se refiere a la igualdad de la varianza de los errores en un modelo de regresión o análisis de datos. En un contexto sencillo, la homocedasticidad implica que la dispersión de los errores es constante y uniforme en todos los niveles de las variables independientes o predictores. Esto significa que no hay un patrón sistemático de aumento o disminución de la variabilidad de los errores a medida que cambian los valores de las variables independientes.

Cuando se presenta homocedasticidad en un modelo estadístico, se cumple una de las suposiciones clave de la regresión lineal clásica y otros métodos de análisis de datos. Esto facilita la interpretación de los resultados y la aplicación de pruebas estadísticas apropiadas. En presencia de heterocedasticidad (cuando la varianza de los errores no es constante), las estimaciones de los parámetros del modelo pueden ser sesgadas, y las pruebas de significancia pueden no ser confiables.

Para verificar la homocedasticidad de los errores en un modelo, se suelen utilizar gráficos de residuos, como gráficos de dispersión de residuos o gráficos de residuos estandarizados, que ayudan a detectar patrones de variabilidad no constante en los errores. También se pueden realizar pruebas estadísticas formales, como la prueba de Breusch-Pagan o la prueba de White, para evaluar la homocedasticidad.

La heterocedasticidad es un supuesto crucial en muchos modelos estadísticos, por ello, las pruebas de para determinar la heteroscedasticidad son esenciales. Breusch y Pagan presentan en su trabajo de 1979, una prueba para detectar la heteroscedasticidad[11].

Breusch y Pagan desarrollaron una prueba para diagnosticar la heterocedasticidad en un modelo de regresión lineal. Su prueba es especialmente útil cuando se sospecha que la varianza de los errores puede estar correlacionada con una o más variables independientes en el modelo. La prueba de Breusch-Pagan se basa en el principio de que, si no hay heterocedasticidad, los residuos al cuadrado (una medida de varianza) no deberían estar correlacionados con las variables independientes.

El procedimiento básico de la prueba de Breusch-Pagan es el siguiente:

- Estimar el modelo de regresión original mediante OLS y calcular los residuos.
- Obtener el cuadrado de los residuos para usar como medida de la varianza del error.
- Regresar los residuos al cuadrado sobre las variables independientes (o alguna función de las variables independientes).

- Realizar una prueba de hipótesis para determinar si los coeficientes de la regresión son diferentes de cero. Esto se hace típicamente mediante una prueba chi-cuadrado.

Por un lado, si la prueba de hipótesis rechaza la hipótesis nula de que los coeficientes son iguales a cero, se tiene evidencia en contra de la homocedasticidad, sugiriendo que la heterocedasticidad está presente en el modelo. Por otra parte, si se detecta heterocedasticidad, existen diferentes maneras de corregirla o de hacer ajustes en la estimación, como la utilización de estimadores robustos de errores estándar o la transformación de variables. En esencia, la prueba de Breusch-Pagan ofrece una metodología sistemática para detectar la heterocedasticidad en modelos de regresión lineal y proporciona una base sólida para tomar medidas correctivas si se detecta dicho fenómeno.

Por otra parte, en un trabajo publicado en *Econometrica* en 1980, Halbert White introdujo un estimador de la matriz de covarianza que es consistente en presencia de heterocedasticidad de forma desconocida[12]. Esta es una de las primeras soluciones robustas al problema de la heterocedasticidad y ha sido muy influyente en la práctica econométrica.

El enfoque de White no requiere especificar la forma funcional de cómo la varianza del término de error cambia con las variables independientes, lo que lo hace "robusto". Aquí se encuentra un resumen del procedimiento:

- Estimar los parámetros del modelo original utilizando el método de los mínimos cuadrados ordinarios (OLS).
- Calcular los residuos de la estimación.
- Utilizar estos residuos para estimar una matriz de covarianza de los parámetros del modelo que es robusta a la heterocedasticidad. Específicamente, la matriz de covarianza se estima como una forma particular de promedio ponderado de los productos externos de los gradientes de la función de verosimilitud, corregido para ser robusto a la heterocedasticidad.

El estimador de la matriz de covarianza de White permite realizar inferencias estadísticas que son válidas incluso cuando la heterocedasticidad está presente en el modelo. Esto significa que los errores estándar, los intervalos de confianza y las pruebas de hipótesis basadas en este estimador serán válidos bajo heterocedasticidad.

White también propuso una prueba específica para detectar la presencia de heterocedasticidad. Esta prueba es un tipo de prueba de especificación que se utiliza para evaluar si la matriz de covarianza estimada difiere significativamente de la matriz de covarianza bajo el supuesto de homocedasticidad. Al igual que la prueba de Breusch-Pagan, esta prueba también se realiza mediante una estadística de prueba que sigue una distribución chi-cuadrado bajo la hipótesis nula de homocedasticidad. La característica de la aportación de Halbert White consiste en proporcionar una herramienta para llevar a cabo inferencias estadísticas robustas en presencia de heterocedasticidad, sin necesidad de modelar explícitamente la heterocedasticidad. Esta metodología ha tenido un impacto significativo en la

econometría y otras disciplinas que utilizan modelos de regresión para análisis empíricos.

En esencia, la homocedasticidad de los errores significa que la variabilidad de los errores es constante en todos los niveles de las variables independientes, lo que es una suposición importante para aplicar e interpretar adecuadamente modelos de regresión y análisis de datos.

## 6.2 Independencia de errores

Por otra parte, la independencia de los errores es otra suposición fundamental en Estadística y Econometría, especialmente en el contexto de modelos de regresión y análisis de series temporales. Esta suposición se refiere a que los errores, o residuos, de un modelo estadístico son independientes entre sí, lo que significa que el valor de un error no está relacionado de manera sistemática o predecible con el valor de otro error.

En esencia, la independencia de los errores implica que no hay patrones o autocorrelación en los residuos. Si los errores no son independientes, es decir, si existe autocorrelación, puede llevar a conclusiones incorrectas y sesgadas en la interpretación de un modelo estadístico. La independencia de los errores es importante porque garantiza que las estimaciones de los parámetros del modelo sean eficientes y no estén sesgadas.

En el caso de las series temporales, la independencia de los errores implica que los valores pasados de la serie no influyen en los errores actuales, lo que es importante para realizar pronósticos precisos.

Para verificar la independencia de los errores, se pueden realizar pruebas estadísticas, como la prueba de Durbin-Watson en el caso de regresiones lineales, o gráficos de autocorrelación de residuos en el caso de series temporales. Estas pruebas y visualizaciones ayudan a identificar si existen patrones de autocorrelación en los errores, lo que podría indicar que la suposición de independencia no se cumple.