



HAL
open science

Le travail mathématique à l'aune du cadre de l'apprentissage par problématisation : travail mathématique et processus de problématisation chez les élèves.

Christine Choquet, Sylvie Grau, Magali Hersant, Jean-Marc Legrand, Nadia Zebiche

► To cite this version:

Christine Choquet, Sylvie Grau, Magali Hersant, Jean-Marc Legrand, Nadia Zebiche. Le travail mathématique à l'aune du cadre de l'apprentissage par problématisation : travail mathématique et processus de problématisation chez les élèves.. Étude sur le travail mathématique 7, LDAR, Jun 2022, Strasbourg (67), France. hal-04263465

HAL Id: hal-04263465

<https://hal.science/hal-04263465v1>

Submitted on 30 Oct 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Le travail mathématique à l'aune du cadre de l'apprentissage par problématisation : travail mathématique et processus de problématisation chez les élèves

Christine Choquet, Sylvie Grau, Magali Hersant, Jean-Marc Legrand, Nadia Zebiche

INSPE Nantes Université – Laboratoire du CREN

Le Cadre de l'apprentissage par problématisation (CAP) considère l'activité scientifique (de l'élève ou du chercheur) en tant que problématisation. Nous présentons, à partir de quelques exemples, une utilisation des mêmes outils du CAP dans des domaines mathématiques différents, et les genèses associées.

The Learning by problematization framework considers scientific activity (of the student or the researcher) as problematisation. We illustrate with few examples how we account for problematization processes, with the same tool in different mathematical domains, and the associated geneses.

INTRODUCTION

Dans le cadre de l'apprentissage par problématisation, l'activité scientifique de l'élève ou du chercheur n'est pas envisagée comme un travail, comme c'est le cas dans l'ETM, mais comme une problématisation. Nous illustrons ici à partir d'exemples la façon dont nous rendons compte des genèses associées à ce processus de problématisation en mobilisant des outils du CAP. Les exemples sont choisis à différents niveaux de classe et dans différents domaines mathématiques. Pour asseoir la suite de notre propos nous précisons d'abord le point de vue du CAP.

CAP, travail du problème et genèses

Nous ne pouvons pas ici développer notre cadre théorique CAP et les conditions de possibilités de son usage en mathématiques, pour cela voir (Hersant, 2021). Nous allons nous centrer sur la façon dont le travail mathématique est envisagé par le CAP et les genèses associées. Les exemples permettront d'illustrer.

Le processus de problématisation se déploie à l'intérieur d'un cadre qui détermine les types de questions et les types de réponses pertinentes. La dimension « cognitive » du processus, implique la position, la construction et la résolution de

problème. Poser un problème, c'est en prendre conscience ; construire un problème, c'est le déterminer en « chercher les données et les conditions pertinentes » (Fabre, 1999, p. 198) pour le circonscrire et le résoudre. Ces données et ces conditions sont des réponses à des questions implicites que l'on se pose, elles sont de l'ordre du comprendre et non de l'ordre du résoudre. La seconde dimension concerne la mise en tension des faits et d'idées si on s'intéresse aux problématisations scientifiques (Orange, 2000). Les conditions du problème sont des contraintes non contingentes, des impératifs du problème, ce qu'il faut respecter et ce sur quoi on n'a pas prise ; elles sont de l'ordre de l'apodictique (Bachelard, 1938), elles expriment des nécessités. Orange (2012), en référence à l'épistémologie des sciences, distingue trois registres : 1/ le registre empirique « des faits provenant d'observations ou expériences » (ces faits sont construits) ; 2/le registre des modèles (ou des nécessités) i.e. « des explications construites pour rendre compte des faits jugés pertinents pour le problème travaillé » (Orange, 2012, p. 24) ; 3/le registre explicatif (REX) qui correspond aux présupposés considérés comme allant de soi, non remis en cause, permettant de générer les explications. Le REX structure les explications construites par les élèves et la façon de travailler les problèmes scientifiques (Orange, 2012, p. 26). De ce fait, il ne correspond pas toujours à une théorie mathématique. Il donne avant tout « sens aux modèles et nécessités qui sont mis en jeu dans une problématisation. Il indique une manière habituelle ou établie de confronter les faits et les idées explicatives pour identifier les conditions de possibilité d'une explication » (Doussot, Hersant, Lhoste & Orange-Ravachol, 2022, p. 14). Ainsi, dans le CAP, c'est plus le travail de construction du problème par l'élève que le travail de l'élève qui est mis à l'étude. Ce point de vue sur l'activité de l'élève, orienté par un parti-pris épistémologique plus que cognitif, nous conduit à étudier plus particulièrement la genèse des nécessités du problème, en lien avec celles des éléments empiriques, à l'intérieur d'un REX et aussi la genèse de certains REX.

Nous donnons ici des exemples de ces genèses au travers de l'élaboration de trois espaces de contraintes (EC) (Orange, 2000) pour rendre compte *a priori* des potentialités de problématisation d'une situation (Hersant, 2010) et *a posteriori* du processus de problématisation. Dans ces EC, apparaît ce qui, pour un élève, va être considéré comme une nécessité du problème même si cela ne correspond pas forcément à une nécessité du point de vue des mathématiques et de l'enseignant. L'étude des conditions pour permettre une problématisation, et donc ces genèses, fait quant à elle l'objet d'une autre communication.

Résolution d'un problème en géométrie au collège

Cet exemple illustre la (re)construction *a posteriori* de l'activité mathématique des élèves menée tout au long de la recherche/résolution d'un problème. L'énoncé suivant est proposé à des élèves de 4^{ème} (12-14 ans) dans un collège en France (Figure 1) :

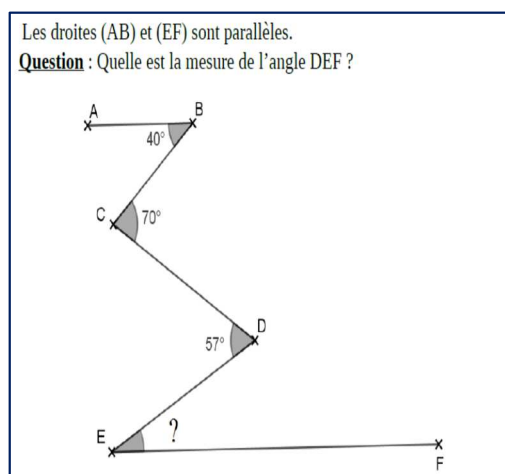


Figure 1 Énoncé du problème *Les angles*

La séance observée est élaborée et mise en œuvre par une enseignante débutante. Celle-ci envisage avec ce problème d'amener les élèves, *a minima*, à effectuer quelques tracés qui leur permettront de calculer des mesures d'angles et, *a maxima*, à organiser des calculs de mesures d'angles pour aboutir, en mobilisant des tracés pertinents et les propriétés des angles adéquats, à la solution du problème (27°). Les élèves sont répartis en petits groupes, ils disposent d'une feuille au format A3 où figure l'énoncé du problème (Figure 1) et du matériel de géométrie usuel (règle, équerre, compas et rapporteur). Suite à nos observations, en étudiant les productions écrites de chaque groupe et les échanges entre les élèves, nous avons construit *a posteriori* un espace de contraintes (Orange, 2012) (Figure 2) : cet EC permet de repérer les trois registres (empirique, des nécessités et explicatif) et de rendre compte du processus de problématisation se développant chez les élèves de cette classe, tout au long de la séance. Le registre empirique rend compte des observations faites par les élèves sur la figure qu'ils complètent au fur et à mesure des réflexions qu'ils mènent. Les tracés sur la figure peuvent être différents selon les groupes, ils les amènent à un repérage de faits empiriques différents : par exemple, les angles 3 et 4 sont correspondants ou la droite (CE) est perpendiculaire à la droite (AB). Ces élèves de 4^{ème} connaissent des propriétés des mesures des angles. Et comme l'énoncé précise que les deux droites (AB) et (EF) sont parallèles, un raisonnement mené par certains élèves aboutit à des nécessités : par exemple, si des angles alternes/internes sont repérables, ils seront de même mesure donc il faut repérer de tels angles.

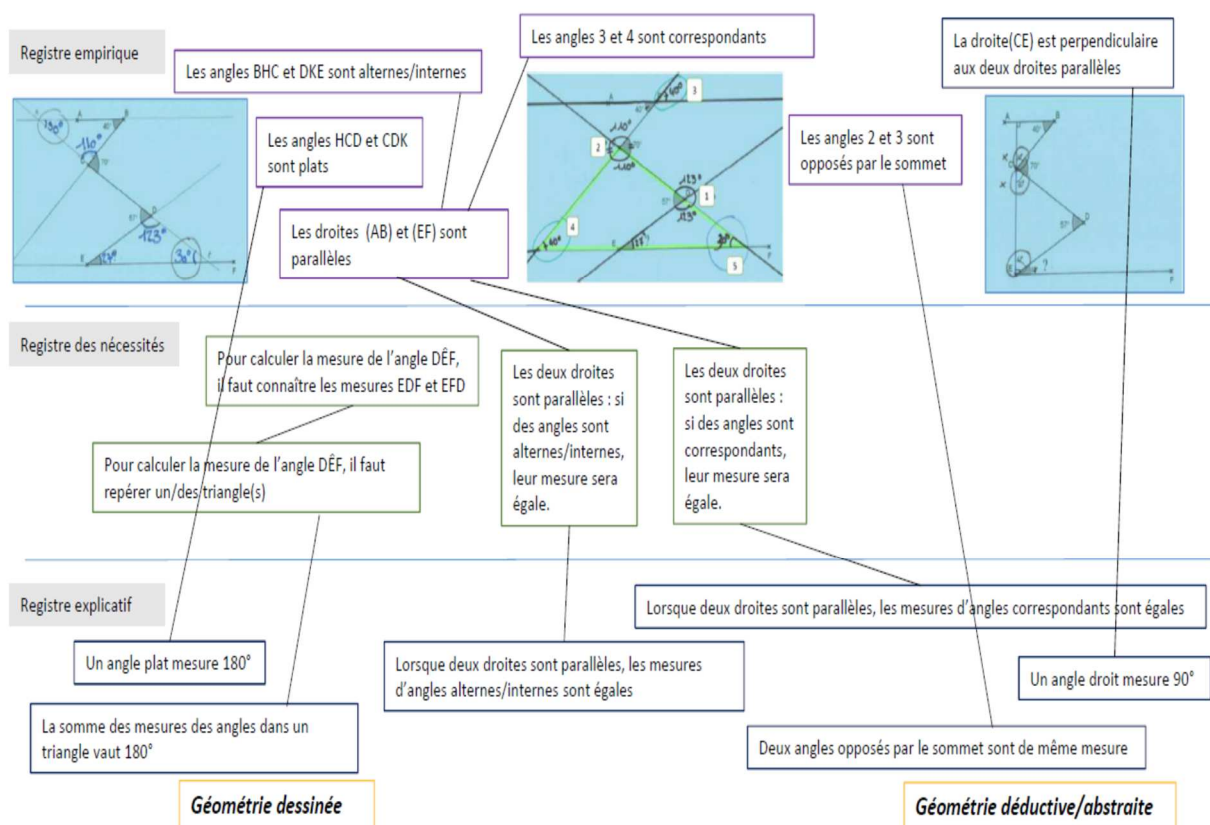


Figure 2 Espace de contraintes a posteriori Les angles

Nous observons notamment dans quel(s) registre(s) explicatif(s) se situe le processus de problématisation des groupes : GI ou GII ou avec des allers-retours entre les deux. Ce processus peut alors être associé, dans le cas de cet exemple, aux jeux indispensables entre deux géométries (GI/GII) qui rendent compte de « toutes les articulations entre deux géométries où la seconde géométrie du couple contrôle et assure la validité des techniques et des méthodes mises en œuvre dans l'autre géométrie » (Kuzniak, 2006, p. 174).

Lors de la séance suivante, l'enseignante propose une synthèse écrite reprenant quelques productions d'élèves. Elle y expose les procédures qu'elle attendait : une première procédure utilisant une propriété des angles alternes/internes et une deuxième basée sur le repérage de différents triangles et des égalités de mesures d'angles correspondants. Elle fait le choix de ne pas évoquer une des procédures centrée sur le tracé d'une droite perpendiculaire aux deux droites parallèles. Nous en déduisons un décalage fort entre les éléments mis en avant par l'enseignante dans cette synthèse et ceux issus de l'analyse *a posteriori* dans le CAP. En effet, la synthèse focalisée sur deux procédures seulement ne rend pas compte du processus de problématisation en œuvre dans les différents groupes. Elle ne montre pas comment une majorité des élèves s'est interrogée sur la mobilisation ou non de

propriétés qu'ils connaissent déjà, en les mettant à l'épreuve d'allers-retours avec une figure qu'ils ont complétée au fur et à mesure de leurs questionnements. Par ailleurs, étant donné que l'espace de contraintes permet l'identification des deux registres explicatifs dans lesquels ou entre lesquels évoluent les élèves de cette classe, il peut ainsi contribuer à envisager un processus d'institutionnalisation au regard non seulement des productions de certains groupes (comme le propose l'enseignante) mais plutôt en lien avec une explicitation d'articulations mises en œuvre entre GI et GII, à laquelle les élèves sont capables à ce moment-là, dans cette classe, d'accéder.

Généralisation informatisée de motif (cycle 4)

Ici, l'espace de contraintes (Cf. Figure 3) permet de décrire les relations mettant en jeu des faits ou des nécessités construits par les élèves lors de la généralisation, avec le support de programmation Snap !, d'un algorithme de tracé et de dénombrement d'un motif. Cet exemple est présenté plus en détails dans une communication du thème 2 (Legrand, J.-M.) Il s'agit d'une généralisation de motifs (Radford, 2006a), mais informatisée, c'est-à-dire automatisée. Le motif, la première itération d'un triangle de Sierpinski construit avec des hexagones, est tracé (et les hexagones dénombrés) par le programme.

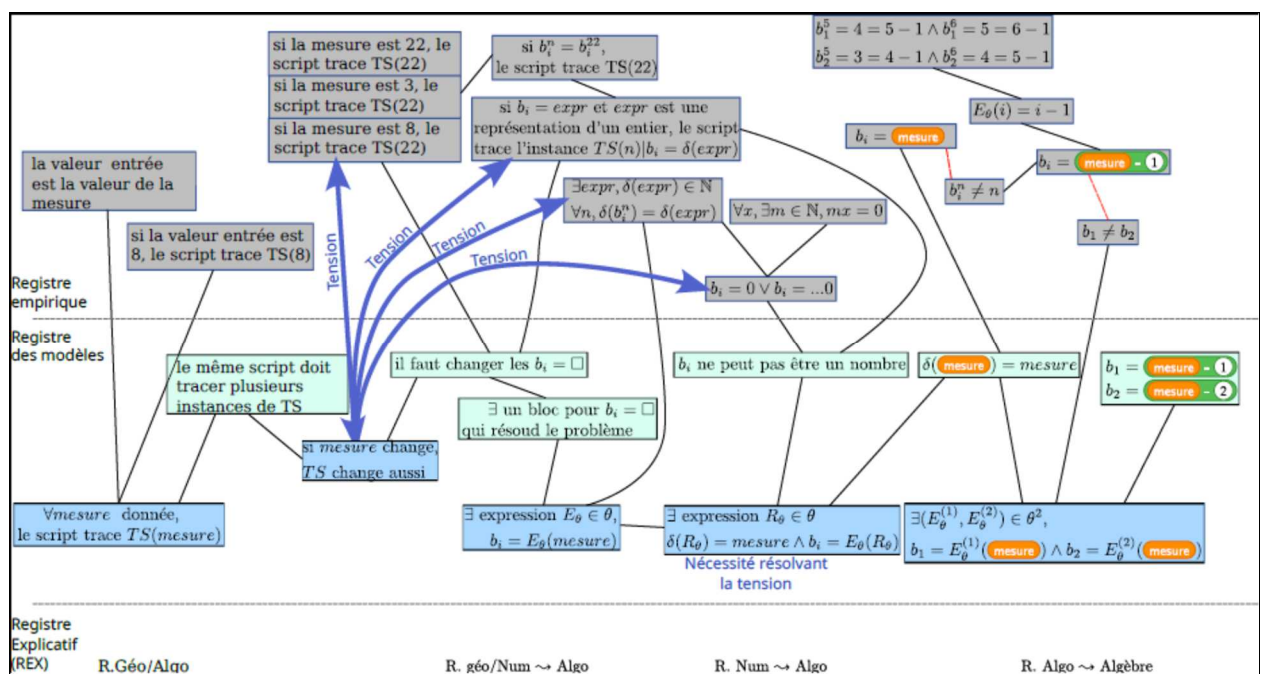
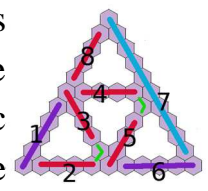


Figure 3 Espace de contraintes Triangle de Sierpinski

L'EC permet de représenter les liens et tensions entre faits et nécessités afin de construire le concept de « paramètre » (ou de variable dans un rôle de paramètre), « ce qui fait la force de l'algèbre » pour (Chevallard, 1989) et qui est fondamental

pour l'informatique. Les élèves du binôme, dont les actions de programmation et les interactions langagières permettent d'identifier les faits et nécessités représentés dans cet espace, construisent la nécessaire existence : d'un objet o dénotant une valeur arbitraire non définie *a priori* (ici la valeur du paramètre *measure*, on notera $\delta(o) = \delta(\textit{measure})$) ; disposant d'une représentation $R_\theta(o)$ dans le registre de représentation sémiotique θ dans lequel on représente la résolution du problème, ici le langage de programmation par bloc Snap! (Duval, 1993, 2006) ; dont cette représentation est manipulable dans une expression $E_\theta(o, b_i)$ de θ qui détermine la relation entre la *measure* et le nombre d'itération des boucles, comme si la valeur $\delta(R_\theta(o))$ était connue. On retrouve ici les 3 critères caractérisant la pensée algébrique selon (Radford, 2013) : « indeterminacy », « denotation », « analyticity » et observer que c'est la tension fixe-variable, ou unique-multiple, qui, lors de la construction du problème par ces élèves, génère la nécessité dans un premier temps de $E_\theta(o)$: une représentation fixe de $R_\theta(b_i)$ (en l'occurrence la représentation d'un nombre) trace une et une seule instance $TS(n)$ (par exemple si $R_\theta(b_1) = 8$, cela correspond à l'instance $TS(9)$), alors qu'« il faut trouver un programme pour aller pour toutes les mesures », or « là par exemple si je mets 8 [*i.e.* la valeur entrée par l'utilisateur, définissant la mesure du TS à tracer], il faut qu'il m'en fasse 8, enfin un de mesure 8, mais sauf que là ça va m'en faire un de mesure 22 », et de même pour une valeur entrée de 3 ou de 22, « mais du coup [...] c'est le même programme ». On a ici une mise en tension entre faits et nécessités qui fait avancer les élèves dans la construction du problème. Dans cet EC, on constate la construction de faits d'origines différentes : ceux qui sont issus d'un raisonnement, et ceux qui sont issus d'une mise en relation « action-effet de l'action ». Comme b_i ne peut pas être un nombre, une nouvelle nécessité est construite : non seulement il existe une expression $E_\theta(o)$ mettant en relation la mesure et le nombre d'itérations des boucles b_i , mais il faut aussi qu'il y ait « un bloc » qui représente la valeur entrée par l'utilisateur. Ainsi, l'EC représenté permet d'identifier les nécessités construites et les tensions qu'elles entretiennent avec les faits (les énoncés tenus pour vrai, au moins momentanément). La construction de la nécessité de la représentation du paramètre dans un registre sémiotique donné est ici permise par les nécessaires conversions d'un système sémiotique multifonctionnel (langue naturelle et représentation « non-iconique ») vers (et depuis) un registre monofonctionnel (langage informatique choisi) (Duval, 2006). Ces conversions étant elles-mêmes impliquées par l'automatisation de la méthode de tracé/dénombrement : en restant dans le langage naturel ou en n'automatisant pas la méthode, il est probable que les élèves ne puissent pas concevoir que, non seulement les représentations dans θ permettent de résoudre le problème, mais aussi qu'il ne peut en être autrement.

Le cas de la résolution d'un problème de modélisation à la fin du lycée

Nous reprenons ici une étude de cas déjà publiée (Hankeln, Hersant, 2020) pour illustrer les genèses que permettent d'étudier le CAP. Un élève de T^{ale} résout à voix haute le problème de modélisation du « Phare des Baleineaux » dont l'énoncé est :

Le phare des Baleineaux est une construction située à 3 km de la pointe du Phare au nord-ouest de l'île de Ré. Il était originellement prévu que la tour mesure 50 m mais finalement, avec les difficultés géographiques, le phare ne s'élève qu'à 31 m. Avec son feu il permet aux navires de repérer la position des zones dangereuses se trouvant près des côtes, ainsi que les ports maritimes. À quelle distance des côtes se trouve le navire quand il aperçoit la lumière du phare pour la première fois ?

L'EC (Figure 4) met en évidence qu'il y a bien construction explicite de nécessités donc problématisation à partir d'éléments empiriques. De quelles genèses rend-il compte ? Dans ce schéma (Figure 4), ce qui figure dans un cadre en pointillés dans le registre empirique correspond à des éléments fournis par la chercheuse à des moments où Jean est bloqué. Partons des nécessités erronées construites par Jean (cadre gris) pour comprendre comment il progresse dans la construction du problème. Au cours de son avancée dans le problème, ces nécessités se précisent ou se fissurent jusqu'à être abandonnées ou explicitement rejetées. Ainsi, au début de la résolution du problème, Jean considère que c'est uniquement la distance au phare qui va déterminer la possibilité ou pas de voir la lumière du phare, comme si l'intensité du rayon lumineux s'atténuait avec la distance.

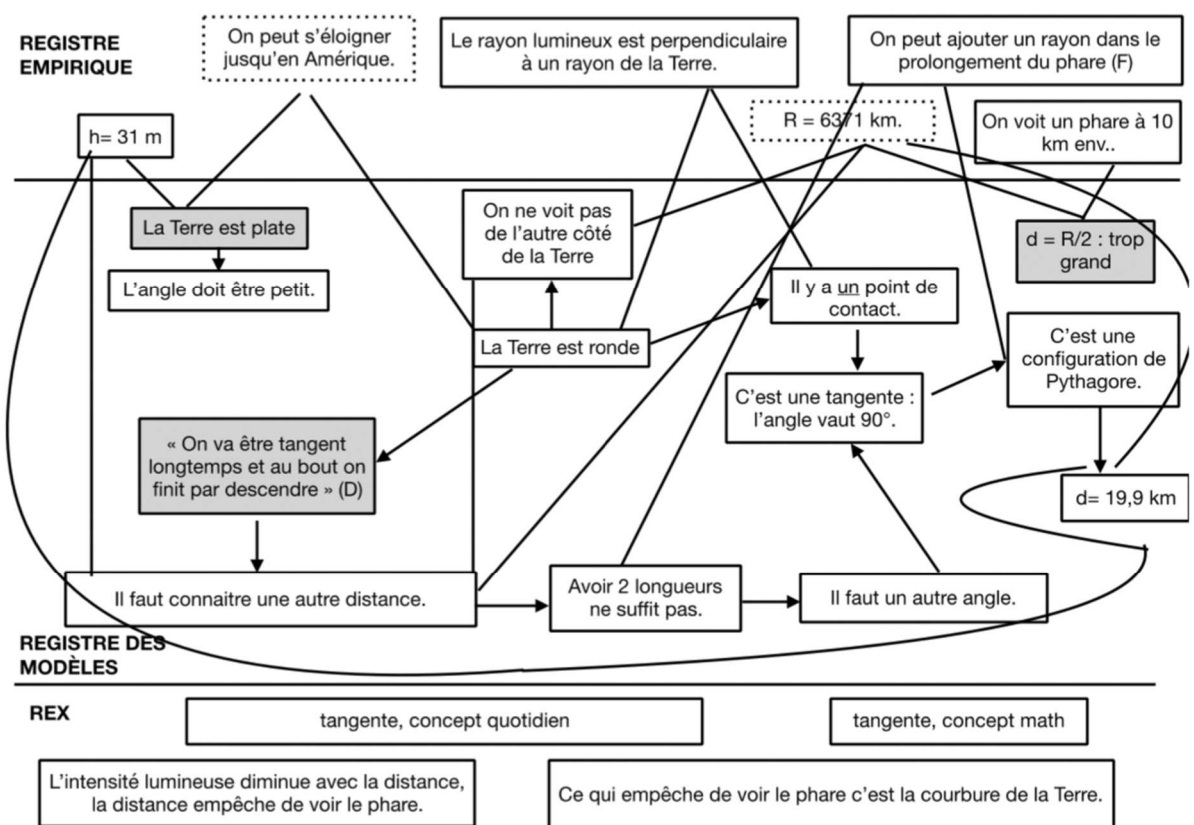


Figure 4 : espace de contraintes pour *Le phare des Baleineux*

Il cherche alors à trouver la valeur d'un angle, petit, pour déterminer la distance à laquelle on verra pour la première fois le phare. Puis, petit à petit, il prend en compte le fait que la Terre « se tord ». Cela l'amène à construire la nécessité que, puisque la lumière se déplace en ligne droite dans un milieu sans obstacle, « on est tangent longtemps » puis « qu'on a l'air tangent à la Terre » et enfin à considérer, en rupture avec ces premières nécessités, qu'il y a un seul point de tangence, conformément à la définition mathématique de la tangente. Cette propriété de la tangente est probablement rendue disponible par une des figures qu'il construit.

À partir de là, il ne cherche plus à déterminer la mesure de l'angle pour avoir la distance au phare mais à trouver la distance entre ce point de tangence et le phare. Cette évolution est sous-tendue par une évolution de la façon dont Jean s'explique le fait qu'on voit ou qu'on ne voit pas le phare, c'est pourquoi nous avons distingué deux registres explicatifs. D'abord, tout se passe comme si, pour Jean, ce qui empêche de voir le phare depuis le bateau est la distance, uniquement ; comme s'il y avait une perte de l'intensité lumineuse avec la distance. Cette explication renvoie à une conception erronée de la diffusion de la lumière qui correspond plutôt à une expérience terrestre et quotidienne d'un piéton, où les obstacles à la vue sont nombreux et empêchent de percevoir la rondeur de la Terre, et non à une expérience marine. Mais, en association étroite avec une représentation schématisée de la

situation, Jean mobilise une autre explication du phénomène : ce qui empêche de voir le phare est la courbure de la Terre. Cette seconde explication correspond à une explication scientifique, du phénomène. Le passage d'une explication à l'autre marque son changement de point de vue sur le phénomène et sa modélisation. Il ne se réalise pas de façon brutale, comme une sorte de révélation à partir du moment où le fait que la Terre est ronde est explicité.

En effet, Jean remarque que la Terre est ronde mais ce n'est que bien plus tard qu'il place sur sa figure un angle droit et qu'il indique « parce que, vu que c'est la tangente qui me permet de voir, je sais qu'il y a un angle droit ». Ce changement de REX témoigne d'un événement de problématisation (Doussot et al., 2013 ; Doussot, Hersant, Lhoste, Orange-Ravachol, 2022) et s'articule étroitement avec une dynamique de problèmes. En effet, Jean pose et construit trois problèmes qui se font écho dans son activité : quel est l'angle entre la trajectoire du bateau et le sommet du phare ? quelle est la distance au phare lorsqu'un marin le voit pour la première fois ? et « combien de temps la Terre est-elle plate ? ».

L'EC et la dynamique des problèmes nous permettent ainsi de préciser la genèse des nécessités et du nouveau REX chez Jean. Un premier stade associe le REX « l'intensité lumineuse diminue avec la distance » et la nécessité, implicite dans le raisonnement de Jean, que la Terre est plate. Un second associe le même REX à deux nécessités : la Terre est ronde, qu'on « va être longtemps tangent à la Terre » ; la droite est perpendiculaire au rayon. Le troisième associe le REX « ce qui empêche de voir la lumière est la rondeur de Terre » à la nécessité que la Terre est ronde et que le rayon lumineux est tangent à la Terre. Le second stade est intermédiaire puisque, à la fois, Jean tient compte du fait que la Terre est ronde et qu'il va y avoir un phénomène de tangence mais n'en tire pas plus de conclusion. Ici, Jean utilise une conception de la tangente où l'unicité du point commun entre le cercle et la droite tangente est absente. Au stade 2, seul le fait que la droite est perpendiculaire au rayon est pris en compte ; Jean ne fait pas le lien entre la perpendicularité avec le rayon de la Terre, la tangence de la droite et l'unicité du point de contact. Autrement dit il ne mobilise pas le sens mathématique du mot « tangent » mais un sens plus commun. Cette représentation du problème est sollicitée à la fois pour la recherche d'un angle et pour la recherche d'une distance. Cependant, la recherche de la distance conduit Jean à se poser la question « combien de temps la Terre est plate ? » car pour calculer la distance au phare il lui faut déterminer un point de départ. À la suite de cet épisode, Jean associe clairement le fait que la Terre est ronde et le sens mathématique de la tangente, même s'il oscille entre le sens trigonométrique de ce mot pour chercher l'angle et son sens géométrique pour chercher une distance. Un déclic semble se produire lorsque Jean reprend ses différentes figures. Cela nous

conduit à penser que la conception, erronée et imprécise de la tangente mobilisée dans un contexte non mathématique, a fait obstacle de façon majeure. Mais l'abandon du premier registre explicatif est aussi associé à l'abandon d'une pensée chronologique au profit d'une pensée logique. En effet, dans les propos de Jean, avant ce déclic, la notion de temps est prégnante : il cherche une distance, un angle ou un point en lien avec un déplacement dans le temps et l'espace qui explique qu'on aperçoive ou pas la lumière du phare. D'une certaine façon, tout se passe comme s'il y avait un avant et un après à propos de la possibilité de voir le phare plus que comme s'il y avait une partie de la circonférence de la Terre où l'on voit le phare et une autre où on ne le voit pas. Sa question « combien de temps la Terre est-elle plate ? » est à cet égard particulièrement significative. On est proche de l'obstacle chrono-causal identifié en histoire par Doussot et Vézier (2016). Et on comprend alors l'importance d'une avancée dans le processus de modélisation pour rompre avec ce raisonnement. La genèse des nécessités est étroitement liée au REX et aux éléments empiriques dont dispose Jean. La genèse d'un nouveau REX se produit en lien avec une dynamique de problèmes et le dépassement de certains obstacles en appui sur des schématisations du problème (Hersant, 2020).

CONCLUSION

Nous avons présenté ici comment le CAP nous permet d'envisager la question du travail mathématique des élèves : pour nous le travail du problème par les élèves correspond à un processus de problématisation qui revêt une dimension cognitive (Fabre, 1999) de construction du(des) problème(s) et une dimension incluant la mise en tension de données et de conditions (Fabre, 1999) ou de faits et d'idées (Orange, 2000). Les recherches présentées montrent comment nous rendons compte de ce travail du problème par les élèves à l'aide des EC (Orange, 2012). Ces EC renseignent la façon dont l'élève construit le problème : des modèles, des nécessités qu'il construit en lien avec des éléments empiriques et un registre explicatif. La catégorisation retenue pour construire ces espaces de contraintes les situe clairement dans une analyse épistémologique. Ces EC permettent de mettre en évidence une triple genèse : celle des nécessités, celle des éléments empiriques et celle du REX. Les trois forment un système d'interdépendance. L'évolution du REX peut témoigner de la genèse d'un nouveau REX par l'abandon d'un autre, ou sa transformation d'un REX. Dans cette dynamique se déploie une autre genèse, celle de nouveaux problèmes.

REFERENCES

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Vrin.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : Perspectives curriculaires : La notion de modélisation. *Petit x*, 19, 45-75.

Choquet, C. (2017). Profils de professeurs des écoles proposant des problèmes ouverts en mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 36 (1), 11-47.

Doussot, S., Hersant, M., & Orange-Ravachol. (2013). Événement de problématisation et dynamiques de problématisation, Communication au 11^e colloque du Réseau Probléma, Bruxelles.

Doussot, S., & Vézier, A. (2016). L'apprentissage par problématisation en histoire : proximité et distance avec la didactique des sciences de la nature. *Questions Vives*, 26. [<http://jour-nals.openedition.org/questionsvives/1990>].

Doussot, S., Hersant, M., Lhoste, Y., Orange-Ravachol, D. (2022). Origine et développement du cadre de l'apprentissage par problématisation. *Le cadre de l'apprentissage par problématisation. Apports aux recherches en didactique*. Presses Universitaires Rennaises.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Duval, R. (2006). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. 67-89. *Actes du XXXII^e Colloque COPIRELEM*. 2005. IREM de Strasbourg.

Fabre, M. (1999). *Situations-problèmes et savoir scolaire*. Paris : Presses universitaires de France.

Fabre, M. (2011). *Eduquer pour un mode problématique. La carte et la boussole*. Presses universitaires de France.

Fabre, M. (2016). *Le sens du problème. Problématiser à l'école*. De Boeck Education.

Hankeln, C. & Hersant, M. (2020). Processus de modélisation et processus de problématisation en mathématiques à la fin du lycée Une étude de cas dans une perspective de didactique comparée. *Education et Didactique*. 14(3), 39-67.

Hersant, M. (2010). *Empirisme et rationalité à l'école élémentaire, vers la preuve au cycle 3* [Mémoire de recherche, Habilitation à Diriger des recherches, Université de Nantes]. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01777604>

Hersant, M. (2014). Facette épistémologique et facette sociale du contrat didactique: Une distinction pour mieux caractériser la relation contrat didactique milieu, l'action de l'enseignant et l'activité potentielle des élèves. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(1), 9-31.

Hersant, M. (2021). L'usage du CAP en didactique des mathématiques : quels apports possibles ? In A. Chesnais, H. Sabra, *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques*, 2020, 202-224.

Orange, C. (2000). *Idées et raisons*. [Mémoire de recherche, Habilitation à Diriger des recherches. Université de Nantes].

Orange, C. (2012). *Enseigner les sciences. Problèmes, débats et savoirs scientifiques en classe*. De Boeck Education.

Radford, L. (2006a). Algebraic thinking and the generalization of patterns : A semiotic perspective. In Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A. (Eds.) (2006). *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2006b). The Cultural-Epistemological Conditions of the Emergence of Algebraic Symbolism. In F. Furinghetti, S. Kaijser & C. Tzanakis, *Proceedings of the 2004 History and Pedagogy of Mathematics Conference & ESU4*, Uppsala, Sweden, 509-524 (Plenary Lecture).

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277.

Samurçay, R., & Rouchier, A. (1985). De « faire » à « faire faire » : Planification d'actions dans la situation de programmation. *Enfance*, 2, 241-254.