



**HAL**  
open science

## Conception de situations et conditions pour la construction de nécessités dans le Cadre de l'Apprentissage par Problématisation (CAP)

Christine Choquet, Sylvie Grau, Magali Hersant, Jean-Marc Legrand, Nadia  
Zebiche

### ► To cite this version:

Christine Choquet, Sylvie Grau, Magali Hersant, Jean-Marc Legrand, Nadia Zebiche. Conception de situations et conditions pour la construction de nécessités dans le Cadre de l'Apprentissage par Problématisation (CAP). Septième Symposium d'Etude sur le Travail Mathématique, Association pour le Développement et la Diffusion de la Recherche sur les Espaces de Travail Mathématiques (ADRETM), Jun 2022, Strasbourg (67), France. pp.143-154. hal-04260031

**HAL Id: hal-04260031**

**<https://hal.science/hal-04260031v1>**

Submitted on 27 Oct 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# CONCEPTION DE SITUATIONS ET CONDITIONS POUR LA CONSTRUCTION DE NECESSITES DANS LE CAP

Christine Choquet, Sylvie Grau, Magali Hersant, Jean-Marc Legrand, Nadia Zebiche

INSPE Nantes Université – CREN

*Le cadre de l'apprentissage par problématisation permet de penser, dans une perspective d'ingénierie, la conception de séances qui visent l'apprentissage de savoirs problématisés. En nous appuyant sur des exemples, nous mettrons en évidence ce qui, du point de vue du CAP, constitue des conditions pour cette construction qui suppose une triple genèse : de nécessités, d'éléments empiriques, d'un registre explicatif. Nous nous intéresserons aux différents contrôles observés lors des expérimentations pour pointer leur fonction et les différents rôles qu'il s'agit d'endosser pour problématiser.*

*The framework of learning by problematization enable the researcher to think, from an engineering perspective, about the design of sessions aimed at learning problematized knowledge. Using examples, we highlight what, from the point of view of this framework, constitutes the conditions for this construction, which presupposes a triple genesis: that of necessities, empirical results and an explanatory register. We will focus on different controls observed during the experiments in order to point out their function and the different roles that must be assumed in order to problematize.*

## INTRODUCTION

Dans cette publication, nous nous intéresserons à cette question : comment guider et faciliter le contrôle du travail mathématique ? La notion de contrôle apparaît dans les différentes théories mobilisées lors de ce symposium. Nous allons essayer de préciser ici comment nous la comprenons et l'analysons au sein du cadre de l'apprentissage par problématisation – CAP désormais – (Hersant, 2021) en différenciant contrôle, action de contrôle et validation, et en lien avec la façon dont l'évaluation est envisagée dans le CAP (Doussot, Gomes, Hersant, Lebouvier, & Orange, 2022). Mais un contrôle ne peut s'effectuer que dans un cadre, un paradigme, que nous allons tenter de définir ici.

Le CAP envisage le travail mathématique comme un processus de problématisation. Les espaces de travail mathématiques – ETM désormais – désignent un environnement pensé et organisé pour permettre le travail des individus résolvant des problèmes mathématiques. Comme les ETM, le CAP s'intéresse à la résolution des problèmes mais il prend aussi en compte la manière dont les individus posent et construisent le problème. Ce sont ces trois étapes qui caractérisent le processus de problématisation. Dans le CAP, le temps long implique spécifiquement le processus d'institutionnalisation, processus qui est étroitement lié à la pratique des savoirs. Pour illustrer ce point, nous nous appuyerons en particulier sur Hersant (2010a) qui

propose une séquence pour entrer dans l'apprentissage de la rationalité mathématique à la fin de l'école élémentaire. Les travaux de Zebiche apportent par ailleurs un éclairage sur l'enjeu d'un apprentissage par problématisation en algèbre et la manière dont sont pensées les ingénieries didactiques dans le CAP. Ces ingénieries mettent en évidence que le CAP apporte des éléments d'analyse *a priori* pertinents pour penser un accompagnement des élèves dans la genèse d'un texte de savoir en parallèle de celle de la construction de nécessités en lien avec celle d'un nouveau registre explicatif. Nous aborderons alors la question des paradigmes et des référentiels et la manière dont nous les utilisons dans nos analyses. En particulier nous préciserons un lien possible entre théorie mathématique, registre explicatif et paradigme au sein du CAP.

Enfin, nous nous appuyerons sur Grau (2017b) qui a expérimenté une séquence pour l'apprentissage du concept d'affinité à la fin du collège. Des productions d'élèves dépersonnalisées à l'aide de figurations (Grau, 2017a) sont mises en débat en petits groupes. Au cours de ces débats, les élèves prennent différents rôles, ce qui leur permet de construire des faits, des nécessités et de participer de la mise en texte des savoirs. Ce scénario vise à ce que les élèves soient explicitement dans des activités de contrôle. Nous essayerons de préciser en quoi cette scénarisation intervient dans la construction des connaissances à travers l'analyse dans le cadre du CAP d'une situation présentée par Flores González dans le thème 1 de ce symposium. Nous concluons sur une piste de croisement entre le cadre du CAP et celui des ETM pour analyser l'activité des élèves.

## **PROBLÉMATISER POUR CONSTRUIRE L'IMPOSSIBLE MATHÉMATIQUE À LA FIN DE L'ÉLÉMENTAIRE**

À la fin de l'école élémentaire, les élèves conceptualisent l'impossible mathématique de la même façon que l'impossible quotidien : comme ils le disent, « c'est impossible parce que j'ai beaucoup cherché et j'ai pas trouvé » (Hersant, 2008). Cette conception naïve et empirique de l'impossible mathématique est susceptible de limiter l'activité mathématique future des élèves, notamment au moment de l'entrée dans la preuve. En effet, ce qui se joue ici est bien de l'ordre de ce qu'est une preuve en mathématiques. Ce risque nous semble d'autant plus important pour trois raisons : les élèves ont rarement l'occasion de rencontrer des problèmes d'impossible mathématique ; lorsque c'est le cas la gestion en classe peut conduire à un fonctionnement basé sur les clauses sociales du contrat didactique qui privent les élèves d'une véritable activité mathématique (Hersant, 2008 ; Hersant, 2014) ; les savoirs sur la preuve en mathématiques sont peu travaillés explicitement au collège.

Pour ces raisons, nous avons conçu et expérimenté une séquence d'enseignement sur l'impossible mathématique à destination des élèves de 8 à 10 ans (Hersant, 2010a). Nous reprenons ici les principaux aspects de cette ingénierie élaborée en référence à deux cadres théoriques que nous avons articulés — le CAP et la théorie des

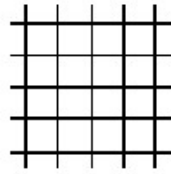
situations didactiques (Brousseau, 1998) — et mettons particulièrement en évidence les conditions que nous avons identifiées en référence à ces cadres.

L'enjeu de la séquence est de faire évoluer la façon dont les élèves s'expliquent l'impossible dans un problème de mathématique. Dans les termes du CAP (Hersant, 2021), il s'agit de permettre un changement de registre explicatif (REX dans la suite du texte) : d'un REX naïf qui n'est pas acceptable du point de vue des mathématiques — « c'est impossible parce que j'ai beaucoup cherché et j'ai pas trouvé » — à un REX scientifiquement acceptable. Une analyse préalable nous a permis d'identifier des conditions épistémologiques et didactiques à remplir pour que les élèves dépassent l'empirisme naïf et accèdent à l'impossible mathématique. Il s'agit de permettre aux élèves d'accéder aux nécessités du problème et de produire sa preuve. Ces conditions impliquent des propriétés du milieu de la situation qui doit être suffisamment proactif, rétroactif et contraignant (Hersant, 2010b). En effet, il s'agit d'amener les élèves, de façon pratiquement concomitante, avec un même problème, à invalider l'empirisme naïf et à établir des preuves acceptables, basées sur des nécessités mathématiques pour « leur permettre d'identifier clairement la différence entre les arguments naïfs et les arguments mathématiques ; rendre disponible auprès des élèves un moyen valide d'expliquer/prouver qui remplace l'argument empiriste » (Hersant, 2010a, p. 120). Il s'agit donc bien d'amener les élèves à un contrôle discursif tel que défini dans la théorie des ETM qui a pour fonction de valider un résultat.

Les problèmes d'optimisation discrète nous sont apparus comme de « bons » problèmes pour dépasser l'empirisme naïf. En effet, d'abord, ils permettent de tester des possibles, incitent à améliorer la solution trouvée et conduisent à se confronter à l'impossibilité de l'améliorer et quelques fois de la dépasser de nouveau. Finalement tout ceci rend nécessaire la construction de raisons mathématiques du possible et de l'impossible. Dit dans les termes du CAP, ces problèmes, à condition qu'ils n'embarquent que des savoirs disponibles pour les élèves de cet âge, permettent un dialogue des faits et des raisons à l'intérieur d'un REX. De plus, ces problèmes sont porteurs de possibilités de contradictions à l'échelle de chaque élève et de la classe qui permettent de mettre en défaut les raisons construites en référence au REX « empirisme naïf » et donc de faire évoluer le REX des élèves vers un REX plus adéquate d'un point de vue mathématique. Ce changement de REX correspond à l'apprentissage visé.

Illustrons cela en reprenant le déroulement observé dans une classe à propos du problème « Pas trois points qui se suivent » (Hersant, 2010a, p. 123) :

**Pas trois points alignés, énoncé** Combien de points au maximum peut-on placer sur les intersections de cette grille sans former aucun alignement de trois points ?



Les élèves s'engagent facilement dans la recherche du problème. Ils posent sans difficultés 6 à 8 points. Le 8ème point est plus difficile à poser et beaucoup pensent qu'il est impossible de placer plus de 8 points. Mais un élève en a placé 9. Vérification faite, il n'y a aucun alignement de trois points dans cette solution à 9. On peut estimer qu'il s'agit ici d'un contrôle instrumental. L'empirisme naïf peut alors être mis au travail. En effet, il ne suffit pas de dire qu'on n'a pas réussi, il faut faire le tri entre ce dont est sûr et ce dont on n'est pas sûr du point de vue des mathématiques : on est sûr qu'on peut placer 1, ...7, 8, 9 points car on l'a fait ; rien ne nous assure qu'on ne peut pas en placer plus. On poursuit en se demandant si, par exemple, on peut placer 25, 20, 11 points sans en aligner trois. Les premiers arguments sont faciles à trouver et, à l'aide d'un changement de cadre, les élèves peuvent construire la nécessité que jamais personne ne pourra placer 11 points (sur chacune des 5 lignes on peut mettre 2 points, pas plus, donc on ne peut pas placer 11 points). Ils accèdent alors à l'impossible mathématique. La nature du contrôle évolue, ainsi que sa fonction : il doit permettre de décider, de structurer le raisonnement et de sélectionner des indices. Ainsi le savoir construit résulte « d'un processus d'évaluation des idées et pratiques mobilisées en vue de la production d'explications ou de solutions et un processus spécifique de la discipline. » (Doussot, Gomes, Hersant, Lebouvier, & Orange, 2021, p.39).

Dans le CAP, nous estimons qu'un apprentissage a lieu lorsque, à partir des traces des explications que les élèves donnent à leur activité, nous identifions des éléments nouveaux, des indices d'un changement de REX. Dans cet exemple, le changement de REX ne correspond pas à un changement de domaine au sein des mathématiques ou de grand paradigme au sein d'un domaine comme le sont par exemple les paradigmes [A1] et [A2] de l'Analyse (Montoya Delgadillo & Vivier, 2016). Ici le changement de REX correspond au passage d'un REX non scientifique à un REX mathématique. Ainsi le REX « est composé de principes structurants, de modes de raisonnement, des références à des mondes d'expérience. » (Doussot et al., 2022, p.14). Un changement de REX ne suppose pas nécessairement un renoncement au REX initial du fait que différents éléments peuvent le faire évoluer. Il peut s'agir d'un nouveau REX englobant provoqué par l'apparition de nouveaux objets mathématiques ou d'un nouveau REX issu d'un nouveau point de vue sur un objet (comme les paradigmes de l'Analyse), voire des REX qui entrent en opposition

(comme ceux de la Géométrie). Mais ces REX sont en lien avec le problème posé, l'expérience de l'élève et donc aux contraintes des programmes... Ainsi l'analyse d'une situation peut mettre en évidence différents REX suivant qu'il s'agit de l'analyse *a priori* à partir de l'activité supposée d'un élève générique à un niveau donné de la scolarité ou *a posteriori* à partir des traces effectives de l'activité des élèves au niveau méso d'un travail de groupe, ou micro d'un moment précis de l'activité d'un sujet. Le REX est ce qui fonde l'ensemble des éléments explicatifs du problème spécifique construit par l'élève, en lien avec des présupposés théoriques. Le REX est associé à la formalisation par l'élève d'explications ou du moins d'indices explicatifs identifiés dans son activité, et lors des débats.

## **PROBLEMATISER POUR ENTRER DANS L'ALGEBRE AU COLLEGE**

La recherche engagée par Zebiche vise à proposer une ingénierie didactique (Artigue, 1988 ; Perrin-Glorian, 2011) favorisant l'appropriation du processus de démonstration algébrique dans le cas particulier des propriétés arithmétiques en cycle 4. L'ingénierie didactique, en tant que méthodologie de recherche, nous amène à procéder à une analyse préalable. Cette première étape nous permet d'identifier des conditions favorables à l'appropriation d'un tel processus.

Les prescriptions institutionnelles [1] ciblent la dimension objet du calcul algébrique à travers le travail sur le statut de la lettre, le statut du signe égal, les règles sur les manipulations d'écritures, en particulier la règle de la distributivité, et à travers la résolution d'équations de degré 1 ou s'y ramenant. Elles ciblent aussi la dimension outil à travers quatre grands types de tâches parmi lesquelles figure la démonstration d'un résultat général. Cet aspect est illustré par la proposition suivante : « prouver que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de trois ». Ainsi la volonté institutionnelle d'engager les élèves dans des démonstrations algébriques dans le domaine de l'arithmétique est bien présente.

Arrivée récemment dans les programmes de collège, l'arithmétique a pour l'instant fait l'objet de peu de recherches à l'instar de l'algèbre ou de la démonstration. Les travaux de Battie (2003) constituent un apport majeur : ils ont mis en évidence des potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement, potentialités exprimées en termes de dimension organisatrice et opératoire et de dialectique entre celles-ci. Or l'étude de manuels permet de constater que les séquences sur l'arithmétique et celles sur le calcul algébrique sont menées sans aucun lien et que les technologies (Chevallard, 1985) mises en œuvre ne sont que trop rarement explicitées. Ces premiers résultats rendent compte d'un vide didactique et conforte l'urgence de réfléchir à des alternatives.

Nous nous appuyons également sur les travaux de Sackhur et al. (2005) sur les ordres des connaissances. Pour les « calculateurs aveugles » identifiées par Sackhur et al. (2005) pour lesquels « le travail mathématique se réduit à l'application de règles,

vraies ou fausses, dépourvues de cohérence globale, dont l'origine leur est inconnue et qu'ils ne cherchent pas à contrôler par leurs connaissances personnelles préalables », c'est le caractère nécessaire ou apodictique des énoncés qui n'est pas perçu. Ces connaissances ne peuvent être enseignées comme le sont les définitions et les théorèmes : on ne peut faire un cours sur la nécessité.

Ainsi une approche problématisée des savoirs à construire semble en adéquation avec ces recherches. En engageant des élèves dans un processus de problématisation, on vise à supplanter des savoirs assertoriques par des savoirs apodictiques : on vise la construction de nécessités, c'est-à-dire de savoirs scientifiques : « c'est vrai et il ne peut pas en être autrement ». Fabre et Orange (1997) éclairent les savoirs scientifiques sous trois aspects. Les savoirs scientifiques sont des compétences pour maîtriser des problèmes, pas seulement les résoudre. Les savoirs scientifiques sont raisonnés. Les savoirs scientifiques sont partagés, soumis à la critique. Ainsi, ces premiers éléments nous permettent de poser déjà des pistes quant aux conditions favorables à la construction de notre ingénierie. Certaines conditions relèvent de l'explicitation de connaissances que l'on peut qualifier d'ordre 1 (Sackur, Assude, Maurel, Drouhard, & Paquelier, 2005) comme peuvent l'être les notions de divisibilité sur les entiers. D'autres relèvent de l'expérience de la nécessité épistémique (Sackur et al., 2005) pour amener les élèves à problématiser et se saisir du sens porté par les expressions algébriques.

On comprend donc ici qu'un REX est caractérisé par des nécessités théoriques. La construction de nécessités par les élèves a pour objectif de construire de nouvelles connaissances opérationnelles dans un REX spécifique qui, soit est une évolution d'un REX antérieur, soit un changement de REX, par la mise en évidence d'une incohérence au sein de l'ancien. Le REX est ainsi multi-référencé. Il prend en compte certains éléments théoriques d'un domaine mathématique précis, certains éléments de l'organisation mathématique de référence (programme officiel, programmation de l'enseignant, organisation au sein d'un manuel ou d'un parcours numérique de formation) et certains aspects cognitifs liés aux élèves (âge, développement, expériences...).

La preuve joue un rôle primordial dans cette construction de nécessités. Elle est le moteur de leur formalisation et permet celle des connaissances construites au sein d'une communauté. La preuve n'est pas seulement détenue par l'enseignant ou le savant, elle s'appuie sur les nécessités mises en évidence par le processus de problématisation et participe à la construction théorique de référence.

## **ACTIVITE DE CONTROLE ET PROBLÉMATISATION AU LYCEE**

Dans son travail de thèse, Grau (2017b) a expérimenté une situation de problématisation en classe de seconde (élèves de 15-16 ans). Le problème demande de modéliser la relation entre la pression d'un corps à volume constant (exprimée en hPa) et sa température exprimée dans différentes unités – degrés Celsius, Kelvin et

degrés Fahrenheit – pour amener les élèves à formaliser une caractéristique des fonctions affines – la proportionnalité des accroissements. La séquence proposée alterne des temps de recherche dans différents groupes et sa spécificité est d’amener les élèves à travailler à partir des productions faites antérieurement par la classe. Ce scénario dit de « problématisation par analyse des productions » (PPAP) est basé sur la construction par l’enseignant de figurations à partir des productions des élèves (Grau, 2017b, 2017a). Une figuration consiste à dépersonnaliser certaines productions, à amplifier certains éléments qui seront soumis à l’analyse et à introduire des éléments symboliques comme ostensifs des objets mathématiques sur lesquels doit porter l’analyse. L’enchaînement de ces situations doit conduire à une triple genèse : celle d’un savoir problématisé par une activité constructive (l’élève agit sur et dans un milieu à fort potentiel a-didactique (Perrin-Glorian & Hersant, 2003)), celle d’une problématisation (l’élève est amené à poser, construire et résoudre un problème), et celle d’un texte de savoir par une activité productive (l’élève doit formaliser des nécessités liées au savoir étudié). En parallèle, le paradigme dans lequel se construisent ces nécessités évolue, amenant une autre genèse, celle d’un nouveau REX. La figuration étant une production anonyme, elle assure la protection des élèves qui peuvent avoir fait des erreurs. Par ailleurs la PPAP permet de donner le temps nécessaire à tous de s’approprier les travaux des autres groupes et de formaliser des éléments de synthèse. Elle vise ainsi à diminuer l’effet discriminant des recherches de problèmes ouverts en situation de classe ordinaire (Choquet, 2017 ; Grau, 2017a, 2018, 2019) du fait de la gestion des temps de mise en commun et de synthèse sous forme de débats ou de cours dialogués. Une autre caractéristique est de séparer deux types de débats : le premier type porte sur la validité (on débat du vrai ou du faux), le second sur la preuve (savoir que c’est ainsi et que cela ne peut pas être autrement).

L’enregistrement des échanges entre les élèves dans les différents groupes permet de comprendre comment les élèves posent et construisent le problème et en particulier comment ils construisent des faits. En effet, il s’agit d’identifier ce qui est hors question pour les élèves, le hors-question désignant des faits considérés comme vrais et non remis en question et non ce qui est ignoré. Il s’agit aussi d’identifier quels sont les arguments exposés par les élèves pour justifier la valeur de vérité d’une proposition, ou quelles sont les représentations ou principes élèves qui font que ces arguments ne sont pas nécessairement formalisés, tant cette valeur de vérité est acquise pour l’ensemble des élèves du groupe.

Au sein des interactions, nous avons pu repérer que les élèves peuvent jouer alternativement quatre rôles différents : ils peuvent questionner, formaliser, agir, vérifier. Ces rôles sont ceux que nous utilisons pour mener un débat intérieur, ils permettent le contrôle de l’activité (Grau, à paraître). Un des principes de la PPAP, est de proposer aux élèves des tâches explicites de contrôle en étant contraint à endosser un rôle spécifique aux différentes étapes de la séquence. Par exemple



lorsque des traitements sont demandés, il est en fait demandé d'agir : on est sur un contrôle interne instrumental. Lorsque la figuration doit amener les élèves à valider une proposition, il s'agit de vérifier : on force ici le contrôle local qu'il soit instrumental, sémiotique ou discursif. Quand la consigne demande de poser le problème, il s'agit de questionner, le contrôle est alors global, l'élève doit se situer dans un cadre déterminé pour poser le problème. Enfin demander de rédiger une conclusion à partir des résultats de recherche de différents groupes correspond à formaliser : ici il s'agit d'attester la validité du contrôle, on vise un contrôle discursif au sein d'un REX.

Si nous reprenons la situation expérimentée et analysée par Flores González dans sa présentation à ce symposium, il s'agissait d'amener les élèves à exercer les trois types de contrôles locaux – sémiotique, instrumental et discursif. Son analyse montre que « si la dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] peut être comprise par certains élèves, le contrôle discursif n'est pas toujours mis en fonctionnement ». Une PPAP à partir du problème posé pourrait contraindre les élèves à exercer spécifiquement, en plusieurs étapes, ces différents contrôles. Rappelons le contexte : on donne une suite  $(u_n)$  définie par  $u_{n+1} = 1 / (2 - u_n)$  avec  $u_0$  dans  $[0,1]$ . Les élèves doivent émettre des conjectures sur les propriétés de la suite en utilisant la calculatrice, puis démontrer ces propriétés. Nous pouvons considérer la formalisation de conjectures comme la première étape de la PPAP et partir de ces conjectures pour construire une figuration. On peut ainsi proposer aux élèves un nouveau travail contraignant à un contrôle local instrumental afin de les amener à valider ou invalider les informations. Il peut s'agir par exemple de donner plusieurs affichages à critiquer avec une consigne du type « comment peut-on être certain que l'affichage A ne correspond pas à la suite que nous devons étudier ? ». Ce qui est mis en débat sera alors le contrôle lui-même, la fonction du contrôle est *l'exactitude* des données du problème. Une fois les élèves d'accord sur les affichages valides, une nouvelle figuration peut proposer différentes conjectures émises valides et demander aux élèves d'expliquer quels indices permettent de les formuler dans les différents registres que sont le graphique, le tableau de valeurs et l'expression algébrique. Ici, la fonction du contrôle est surtout *la conformité*, le contrôle sémiotique est largement convoqué. La troisième étape de la PPAP peut consister à proposer les explications données par les élèves à l'étape précédente, sachant qu'elles auront mobilisé un contrôle sémiotique, instrumental ou discursif. La tâche demandée peut être de rédiger une démonstration à partir de ces explications. La fonction du contrôle est alors *la complétude*. Le principe de la PPAP est de donner un temps long pour permettre à chacun de construire les connaissances attendues. Cela peut sembler difficile à mettre en œuvre en classe ordinaire mais l'expérimentation sur une année montre que quelques situations exemplaires suffisent pour installer des automatismes. Ici encore le contrat didactique joue de manière importante. On voit par ailleurs que les différents contrôles peuvent être caractérisés par leur finalité (sélectionner, décider, raisonner), leur nature (global ou local : discursif,

instrumental ou sémiotique), leur fonction (conformité, exactitude, complétude) telles que Nechache les a définies dans sa présentation « *La notion de contrôle dans la théorie des ETM* ».

Enfin dans le processus de problématisation, le contrôle n'a pas la même finalité, suivant qu'il s'agit de poser, construire ou résoudre le problème. Le contrôle peut permettre de prendre une décision, de sélectionner ou construire un fait, de valider un processus, de maîtriser le raisonnement. Des inducteurs de problématisation (Fabre & Musquer, 2009) peuvent alors intervenir pour potentiellement orienter l'activité de contrôle des élèves.

## CONCLUSION

Le CAP vise la construction d'un savoir apodictique. En mathématiques, nous articulons le CAP avec la théorie des situations didactiques de Brousseau. Notre hypothèse est que poser, construire et résoudre des problèmes, amène à conceptualiser les objets étudiés en lien d'une part avec le problème posé, et d'autre part avec des contraintes de différentes natures : épistémique, heuristique et cognitive. Ces contraintes mettent alors en évidence des nécessités au sein des modèles utilisés qui délimitent le domaine de validité du savoir et justifient en quoi il est opérationnel pour le problème posé. L'enjeu est double. D'une part, il s'agit de rendre ce savoir disponible pour les élèves, de sorte qu'ils puissent le mobiliser dans des problèmes reconnus comme similaires par la mise en évidence des nécessités qu'ils ont identifiées comme des caractéristiques de schèmes en lien avec ce savoir. D'autre part, le point de vue du CAP permet d'identifier et de mettre au travail des savoirs cachés, ignorés, non enseignés et pourtant indispensables à l'activité mathématique. D'un point de vue épistémique, il s'avère particulièrement pertinent d'utiliser le CAP pour penser des situations d'enseignement et d'apprentissage pour aborder des notions résistantes et des modes de pensée spécifiques. Cela revient à dire que ces savoirs supposent la construction d'un nouveau registre explicatif (REX). Nous avons vu que c'était le cas de l'apprentissage de la rationalité mathématique des jeunes élèves avec les travaux de Hersant, de la démonstration algébrique avec ceux de Zebiche, de celui des fonctions affines avec ceux de Grau. En effet, dans ces exemples, il s'agit d'amener les élèves à construire de nouvelles connaissances qui supposent des continuités et des ruptures avec des représentations anciennes associées à des savoirs ancrés dans des REX qu'il s'agit de faire évoluer – le calcul arithmétique, la proportionnalité, la façon de penser l'impossible en mathématiques. Ces ruptures sont liées à des obstacles et les franchir ne peut se faire que sur un temps long pour en éprouver la résistance.

La question est alors de concevoir des situations favorisant la problématisation, la difficulté étant d'accompagner les élèves dans le processus tout en veillant à ne pas problématiser à leur place. Des ingénieries ont été testées. Une caractéristique des situations construites avec le CAP est que les élèves sont largement associés au

processus d'institutionnalisation et que l'activité de contrôle y est prédominante. Ces situations visent une évolution ou une genèse du REX adossée à deux autres genèses : celle des nécessités et celle des éléments empiriques. L'ingénierie didactique doit permettre à l'enseignant de provoquer cette triple genèse en proposant des situations contraignantes amenant alternativement à effectuer des traitements, identifier des paradoxes, comparer et critiquer des propositions, mettre en débat des éléments de preuve etc. L'ingénierie didactique pensée à travers le prisme du CAP amène ainsi à concevoir de nouveaux scénarios de séquences, en particulier pour que le débat ne vise pas seulement à valider ou invalider des procédures mais à expliciter les raisons du vrai et du faux et à séquentialiser l'activité de contrôle qui peut alors avoir différentes finalités, natures et fonctions. Un croisement des analyses dans les deux cadres que sont les ETM et le CAP devraient permettre de mieux comprendre la nature du REX mobilisé par les élèves et de mieux ajuster les situations proposées pour viser un ETM complet. La notion de contrôle peut alors être intéressante à préciser à la croisée de ces deux cadres.

## NOTES

1. BO de 2020 <https://eduscol.education.fr/90/j-enseigne-au-cycle-4>.

## REFERENCES

- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*. Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot - Paris VII.
- Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.
- Choquet, C. (2017). Profils de professeurs des écoles proposant des problèmes ouverts en mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 36 (1), 11-47.
- Doussot, S., Gomes, L., Hersant, M., Lebouvier, B., & Orange, C., (2021). Le cadre de l'apprentissage par problématisation et les questions de l'évaluation, *Recherches en Didactiques*, 33, 37-58.
- Doussot, S., Hersant, M., Lhoste, Y., & Orange-Ravachol, D. (2022). Origine et développement du cadre de l'apprentissage par problématisation. In *Le cadre de l'apprentissage par problématisation. Apports aux recherches en didactique*. Presses Universitaires Rennaises.

- Fabre, M., & Musquer, A. (2009). Comment aider les élèves à problématiser ? Les inducteurs de problématisation. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle*, Vol. 42(3), 111-129. <https://doi.org/10.3917/lsdle.423.0111>
- Fabre, M., & Orange, C. (1997). Construction des problèmes et franchissements d'obstacles. *ASTER*, 24, 37-57.
- Flores Gonzalez, M. (2021). *Activité et travail mathématique à la transition lycée université en Analyse : le cas de suites  $u_{n+1}=f(u_n)$* . Thèse de doctorat. Université de Paris.
- Grau, S. (2017a). Les figurations : Écrit intermédiaire pour problématiser. *Actes du 44e Colloque COPIRELEM*, Epinal.
- Grau, S. (2017b). *Problématisation en mathématiques : Le cas de l'apprentissage des fonctions affines*. Thèse de doctorat. Université Bretagne Loire. <https://hal.science/tel-01629911>
- Grau, S. (2018). *Enseigner par les problèmes : La question de la mise en commun*. Conférence CREN-CARDIE, Nantes.
- Grau, S. (2019). Entre problème construit par l'élève et problème théorique : Distance et/ou malentendu. In Chaachoua, H., Bessot, A., Barquero, B., Coulange, L., Cirade, G., Job, P., ... Vandebrouk, F. (Dir), *Nouvelles perspectives en didactique : le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure*. Grenoble : La pensée sauvage. (p.541-552). <https://hal-02517943>
- Grau, S. (à paraître). Le modèle de séquence PPAP in Lebouvier, B. (Ed.), *Aider les apprentissages par problématisation en classe*. Manuscript in preparation
- Hersant, M. (2008). "Problèmes pour chercher": Experience, Possible and Necessity in Pupils Reasonings. *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and Shaping the World of Mathematics Education*. Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI, Rome. <https://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/>
- Hersant, M. (2010a). *Empirisme et rationalité à l'école élémentaire, vers la preuve au cycle 3*. Mémoire de recherche pour l'Habilitation à Diriger des recherches, Université de Nantes. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01777604>
- Hersant, M. (2010b). *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir : De l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations didactiques*. [Note de synthèse des travaux, habilitation à diriger des recherches, Université de Nantes]. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01777604/document>
- Hersant, M. (2014). Facette épistémologique et facette sociale du contrat didactique : Une distinction pour mieux caractériser la relation contrat didactique milieu,

l'action de l'enseignant et l'activité potentielle des élèves. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(1), 9-31.

Hersant, M. (2021). L'usage du CAP en didactique des mathématiques : Quels apports possibles ? In A. Chesnais, H. Sabra (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2020*. Grenoble : La pensée Sauvage. (p. 202-224).

Montoya Delgadillo, E. M., & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM*, 48(6), 739–754.

Perrin-Glorian, M.-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage. (p. 57-78).

Perrin-Glorian, M.J., & Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(2), 217-276.

Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J.-P., & Paquelier, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 25(1), 57–90.