HAL open science

Arithmétique quasicristalline : vers une définition des modules de Drinfeld en caractéristique nulle

Tim Gendron, Eric Leichtnam, Pierre Lochak

To cite this version:

Tim Gendron, Eric Leichtnam, Pierre Lochak. Arithmétique quasicristalline : vers une définition des modules de Drinfeld en caractéristique nulle. 2023. hal-04259793

HAL Id: hal-04259793

https://hal.science/hal-04259793v1

Preprint submitted on 26 Oct 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ARITHMÉTIQUE QUASICRISTALLINE : VERS UNE DÉFINITION DES MODULES DE DRINFELD EN CARACTÉRISTIQUE NULLE

T.M. GENDRON, E. LEICHTNAM, AND P. LOCHAK

Abstract. Dans cet article nous développons la notion de *module de Drinfeld quasicristallin*, que l'on peut voir comme un analogue en caractéristique zéro des modules de Drinfeld classiques. On prendra garde que l'adjectif se réfère aux quasi-cristaux (au sens de [**?**]), sans rapport avec la théorie cristalline initiée par A. Grothendieck.

Contents

Introduction 1
1. Bref résumé de la théorie de Drinfeld-Hayes 4
2. Anneaux et idéaux quasicristallins 6
3. Monoïdes des classes d'idéaux quasicristallins 10
4. La fonction zêta d'un idéal quasicristallin 17
5. L'invariant modulaire quantique et un résultat de R. Pink 23
6. Le solénoïde associé à un quasicristal 25
7. Fonction exponentielle et modules de Drinfeld quasicristallins 34
8. Appendice : continuité de la conjugaison 43
References 46

Introduction

Rassembler sous la dénomination commune de *corps globaux* les corps de nombres (alias les extensions finies de $\mathbb{Q}$) et les corps de fonctions (alias les extensions finies de $\mathbf{Q} := \mathbb{F}_q(T)$) a sans doute constitué l'un des gestes les plus productifs en théorie des nombres. Cette philosophie, promue par A.Weil dans son ouvrage si influent ([**?**]), a largement établi l'habitude de prouver d'abord les conjectures pour les corps de fonctions (donc en caractéristique positive), en utilisant les structures supplémentaires attachées à ces derniers, à savoir d'abord :

(1) La *géométrie des courbes* que l'on trouve comme en coulisses dans les extensions de $\mathbf{Q}$ mais pas pour les corps de nombres ;
(2) l'*arithmétique de rang* 1, c'est-à-dire l'existence d'anneaux de Dedekind avec groupe d'unités fini, qui découle du caractère non archimédien de la somme par rapport aux valuations à l'infini, tandis que les valuations à l'infini des extensions de $\mathbb{Q}$ sont, elles, archimédiennes.

L'aspect géométrique des extensions de $\mathbf{Q}$ était utilisé par Weil pour démontrer l'hypothèse de Riemann [**?**] dans ce cas, ce qui l'a conduit à la formulation des

fameuses conjectures, dites de Weil [**?**]. Les preuves de Weil et de Deligne continuent à inspirer certaines approches du cas "classique", comme le montrent les travaux d'A. Connes [**?**] et C. Deninger [**?**]. Il s'agit en particulier de chercher l'analogue d'un morphisme étale de courbes qui induirait une extension finie $K/\mathbb{Q}$.

D'autre part l'arithmétique des anneaux de Dedekind de rang 1 a été synthétisée par V. Drinfeld [**?**] et D. Hayes [**?**] dans une théorie du corps de classes en caractéristique positive qui combine des idées venues de la théorie de la multiplication complexe et du théorème de Kronecker-Weber. Plus généralement, V. Drinfeld [**?**] a appliqué sa théorie à la r ésolution d'un cas de la réciprocité de Langlands en caractéristique positive.

Ce qui précède rend très naturel le projet de chercher une version de la théorie de Drinfeld-Hayes pour les corps de nombres. Une piste était fournie dans les articles [**?**] et [**?**] qui concernent l'étude de l'*invariant modulaire quantique*

$$j^{\mathrm{qt}} : \mathbb{R}/\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}) \multimap \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

une fonction *multivaluée*, discontinue et invariante par rapport à l'action projective de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{R}$. La définition de $j(\theta)$ utilise les approximations diophantiennes de θ.

Il existe aussi une definition de j^{qt} en caractéristique positive

$$\mathbf{j}^{\mathrm{qt}} : \mathbf{R}/\mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}) \multimap \mathbf{R} \cup \{\infty\},$$

où $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_\infty$ est l'analogue des nombres réels et $\mathbf{Z} = \mathbb{F}_q[T] \subset \mathbf{Q}$ est l'analogue des entiers rationnels. Dans ce cas, pour $f \in \mathbf{R}$ une unité fondamentale quadratique sur $\mathbf{Q}$, $j^{\mathrm{qt}}(f)$ est *fini*, et on peut identifier

$$\mathbf{j}^{\mathrm{qt}}(f) = \{j(\mathfrak{a}_i) |\ \mathfrak{a}_i \subset \mathbf{A}_{\infty_1},\ i = 1, \dots, d\}, \tag{1}$$

où (voir [**?**] pour plus de précisions)

- $\mathbf{A}_{\infty_1}$ est un sous-anneau de Dedekind de $\mathbf{O_K}$ = l'anneau des entiers de $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(f)$, "petit" au sens que $\mathbf{A}_{\infty_1}^\times = \mathbb{F}_q^\times$;
- Les $\mathfrak{a}_i \subset \mathbf{A}_{\infty_1}$ sont des idéaux ;
- $j : \mathsf{Cl}_{\mathbf{A}_{\infty_1}} \longrightarrow \mathbf{R}$ est un invariant modulaire des classes d'idéaux de $\mathbf{A}_{\infty_1}$.

Si l'on note $\mathbf{H}_{\mathbf{O_K}}$ le corps de classes associé à $\mathbf{O_K}$, le théorème principal de [**?**] dit que

$$\mathbf{H}_{\mathbf{O_K}} = \mathbf{K}(\prod_{\alpha \in \mathbf{j}^{\mathrm{qt}}(f)} \alpha) = \mathbf{K}(\prod_{i=1}^{d} j(\mathfrak{a}_i)).$$

La preuve utilise la théorie de Drinfeld-Hayes, autrement dit une théorie du corps de classes basée sur le "petit" anneau $\mathbf{A}_{\infty_1}$ ([**?**], [**?**]). On a la conjecture suivante:

Conjecture (Demangos-Gendron [**?**])**.** *Soient $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ une unité fondamentale quadratique et $K = \mathbb{Q}(\theta)$ le corps quadratique associé, de discriminant D. Alors, $j^{\mathrm{qt}}(\theta)$ est un ensemble de Cantor autosimilaire d'ordre D et*

$$H_K = K(\mathsf{N}^{\mathrm{avg}}(j^{\mathrm{qt}}(\theta)))$$

où H_K est le corps de classes de Hilbert de K et $\mathsf{N}^{\mathrm{avg}}(j^{\mathrm{qt}}(\theta))$ est un produit pondéré des éléments de $j^{\mathrm{qt}}(\theta)$.

Dans cet article, on démontre que $j^{\mathrm{qt}}(\theta)$ est l'image continue d'un ensemble de Cantor ; en particulier il est soit de Cantor, soit fini (voir Corollaire **??**).

En vue de prouver l'analogue en caractéristique nulle des résultats résumés plus haut il est désirable de disposer de l'équivalent de la théorie de Drinfeld-Hayes dans ce cas. On constate immédiatement que le premier pas consiste à trouver un anneau analogue A_{σ_1} à $\mathbf{A}_{\infty_1}$ en caractéristique nulle, où $\sigma_1 : K \longrightarrow \mathbb{C}$ est un plongement de $K/\mathbb{Q}$.

Dans le cas où $K = \mathbb{Q}(\varphi)$, avec φ le nombre d'or, une description explicite de A_{σ_1} était implicite dans les calculs de renormalisation donnés en [**?**] (voir §§2,3). Richard Pink ([**?**]) a par la suite suggéré la définition élégante et transparente suivante : soit $K/\mathbb{Q}$ une extension quadratique réelle, σ_i, $i = 1, 2$, les deux plongements de K dans $\mathbb{R}$. On fixe σ_1 en identifiant K avec $\sigma_1(K)$. Soit

$$A_{\sigma_1} = \{\alpha \in \mathcal{O}_K |\ |\alpha'| \leq 1\}, \quad \alpha' = \sigma_2(\alpha).$$

Si l'on écrit $K = \mathbb{Q}(\theta)$ où θ est une unité fondamentale et que l'on définit les semigroupes multiplicatifs

$$\mathfrak{a}_x = \{\alpha \in \mathcal{O}_K |\ |\alpha'| < \theta^{-x}\} \subset \mathfrak{a}_x^+ = \{\alpha \in \mathcal{O}_K |\ |\alpha'| \leq \theta^{-x}\},$$

Pink a demontré que

$$j^{\mathrm{qt}}(\theta) = \bigcup_{x \in [0,1)} \{j(\mathfrak{a}_x), j(\mathfrak{a}_x^+)\},$$

où j est un analogue de l'invariant modulaire (voir §**??**). Cette formule est l'analogue exacte de (**??**): en fait, les idéaux $\mathfrak{a}_i$ qui apparaissent dans (**??**) s'écrivent explicitement

$$\mathfrak{a}_i = \{g \in \mathbf{K} |\ |g'|_{\infty_1} < q^{-i}\}.$$

Pink a observé également que les semigroupes $\mathfrak{a}_x$ sont des *quasicristaux* (et même des *ensembles modèles*). Cependant il leur manque pour constituer de véritables idéaux d'être stables par rapport à la somme. Dans cet article, partant de l'observation de R. Pink, nous explorons la possibilité de développer une théorie de Drinfeld-Hayes basée sur l'anneau quasicristallin A_{σ_1}.

Nous commençons au §**??** avec une récapitulation de la théorie de Drinfeld-Hayes. Au §**??** nous donnons la définition générale d'un anneau quasicristallin arithmétique puis discutons au §3 le monoïde des classes d'idéaux $\mathsf{Cl}^{\mathsf{qc}}_{A_{\sigma_1}}$. Nous définissons ensuite (§**??**) la fonction zêta $\zeta_{\mathfrak{a}}$ associée à un idéal quasicristallin et démontrons l'existence d'un prolongement méromorphe à tout le plan complexe. Au §**??** on utilise la fonction zêta $\zeta_{\mathfrak{a}}$ pour définir l'invariante modulaire $j : \mathsf{Cl}^{\mathsf{qc}}_{A_{\sigma_1}} \to \mathbb{R}$ et montrer sa continuité par rapport à la topologie cantorienne de $\mathsf{Cl}^{\mathsf{qc}}_{A_{\sigma_1}}$. Nous commençons ensuite (§**??**) un développement plus géométrique en introduisant pour chaque idéal quasicristallin un solénoïde associé qui constitue essentiellement une définition analytique d'un module de Drinfeld quasicristallin. Enfin au §**??** on introduit les fonctions trigonométriques quasicristallines qui découlent de formules du produit, ainsi que l'exponentielle associée, dans le cadre de ces modules quasicristallins.

Remerciements. Le premier auteur voudrait exprimer sa gratitude à 1) La Fondation des Sciences Mathématiques de Paris pour le financement de son séjour à Paris à l'automne 2017 ainsi que l'équipe d'algèbres d'operateurs de l'Institut de Mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche pour son hospitalité et ses encouragements et 2) Boris Zilber et le Merton College de l'Université de Oxford pour le financement de son séjour à Oxford au printemps 2018. Il a également bénéficié de

conversations avec Paul Nelson, Ryszard Nest, Richard Pink (qui a fait des commentaires très utiles sur une version antérieure de l'article), Georges Skandalis et Boris Zilber.

1. Bref résumé de la théorie de Drinfeld-Hayes

La théorie quasicristalline développée ici est basée sur la théorie des modules de Drinfeld-Hayes de rang 1, presentée par exemple dans [**?**], [**?**], [**?**] et que nous résumons ci-dessous.

Soient $\mathbf{Q} = \mathbb{F}_q(T) \supset \mathbf{Z} := \mathbb{F}_q[T]$ le corps des fonctions rationnelles à coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_q$ ($q = p^k$, p un nombre premier) avec son sous-anneau des polynômes. Alors $\mathbf{Q}$ est le corps de fonctions de la droite projective $\mathbb{P}^1 = \overline{\mathbf{Q}} \cup \{\infty\}$ et $\mathbf{Z}$ l'anneau des fonctions regulières sur $\mathbb{P}^1 - \{\infty\}$. Soit $\mathbf{R} := \mathbf{Q}_\infty$ le completé de $\mathbf{Q}$ à la place v_∞ : $v_\infty(f) = \deg_{T^{-1}}(f) = -\deg_T(f)$ et $|f| = q^{-v_\infty(f)}$. On identifie $\mathbf{R}$ à $\mathbb{F}_q[[T^{-1}]]$, le corps des séries de Laurent en la variable T^{-1}. On note enfin $\mathbf{C} = (\overline{\mathbf{R}})_\infty$, qui est un corps complet et algébriquement clos.

On dit qu'une extension $\mathbf{K}/\mathbf{Q}$ est *géométrique* si le corps des constantes $\mathbf{K} \cap \overline{\mathbb{F}_q}$ de $\mathbf{K}$ est aussi $\mathbb{F}_q$. Dans ce cas il existe un morphisme $\pi : \Sigma_{\mathbf{K}} \to \mathbb{P}^1$ de courbes défines sur $\mathbb{F}_q$ qui induit cette extension. Toutes les extensions considérées ici sont géométriques. À une telle extension on associe la clôture intégrale $\mathbf{O}_{\mathbf{K}}$ de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{K}$; on a

$$\mathbf{O}_{\mathbf{K}} = \mathrm{Reg}(\Sigma_{\mathbf{K}} \setminus \pi^{-1}(\infty)),$$

où Reg dénote les fonctions régulières. Si $\infty_1 \in \pi^{-1}(\infty)$ on peut définir

$$\mathbf{A}_{\infty_1} = \mathrm{Reg}(\Sigma_{\mathbf{K}} \setminus \{\infty_1\}) \subset \mathbf{O}_{\mathbf{K}},$$

qui est un anneau de Dedekind ; $\mathbf{A}_{\infty_1}$ est "petit" au sens que $\mathbf{A}_{\infty_1}^\times$ est fini, ce qui implique l'existence des places $\mathbf{A}_{\infty_1} \hookrightarrow \mathbf{C}$ d'images *discrètes*. À ces deux anneaux de Dedekind $\mathbf{O}_{\mathbf{K}}$ et $\mathbf{A}_{\infty_1}$ on peut associer les corps de classes de Hilbert au sens de Rosen ([**?**])

$$\begin{array}{c} \mathbf{H}_{\mathbf{A}_{\infty_1}} \\ | \\ \mathbf{H}_{\mathbf{O}_{\mathbf{K}}} \\ | \\ \mathbf{K} \end{array}$$

dont les groupes de Galois sont isomorphes aux groupe des classes idéaux correspondants:

$$\mathrm{Gal}(\mathbf{H}_{\mathbf{A}_{\infty_1}}/\mathbf{K}) \cong \mathsf{Cl}_{\mathbf{A}_{\infty_1}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Gal}(\mathbf{H}_{\mathbf{O}_{\mathbf{K}}}/\mathbf{K}) \cong \mathsf{Cl}_{\mathbf{O}_{\mathbf{K}}}.$$

Exemple 1. Le cas de $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}$ extension de degré 2 sur $\mathbf{Q}$, induite par le morphisme $\pi : \Sigma_{\mathbf{K}} \to \mathbb{P}^1$, de degré 2, est particulièrement intéressant. On a deux préimages de $\infty \in \mathbb{P}^1$, soit $\pi^{-1}(\infty) = \{\infty_1, \infty_2\}$. Dans ce contexte

$$\mathbf{A}_{\infty_1} = \{g \in \mathbf{K} |\ |g'|_{\infty_1} \leq 1\},$$

où g' est la conjuguée de Galois de g et $|g'|_{\infty_1} = q^{-v_{\infty_1}(g')}$. Fixons une unité fondamentale $f \in \mathbf{O}_{\mathbf{K}}^\times$ tel que $|f|_{\infty_1} = q^d > 1$. Suivant [**?**] on a l'identification

$$\mathbf{A}_{\infty_1} = \mathbb{F}_q[f, fT, \ldots, fT^{d-1}] \subset \mathbf{O}_{\mathbf{K}} = \mathbb{F}_q[f, T].$$

Dans cette même référence on a également démontré (cf. Theorem 4 de [**?**]) que :

$$\mathrm{Gal}(\mathbf{H}_{\mathbf{A}_{\infty_1}}/\mathbf{H}_{\mathbf{O_K}}) \cong \mathsf{Z} := \{\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_{d-1}\} \subset \mathsf{Cl}_{\mathbf{A}_{\infty_1}}$$

où

$$\mathfrak{a}_i = (f, fT, \ldots, fT^i) = \{g \in \mathbf{A}_{\infty_1} \mid |g'|_{\infty_1} \leq q^{i-d}\} \subset \mathbf{A}_{\infty_1}.$$

À tout idéal fractionaire de $\mathbf{A}_{\infty_1}$ on associe un $\mathbf{A}_{\infty_1}$-module de rang 1 comme suit. On définit d'abord l'exponentielle associé à $\mathfrak{a}$

$$\exp_{\mathfrak{a}}(z) = z \prod_{0 \neq \alpha \in \mathfrak{a}} \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) :$$

qui est un épimorphisme *additif* $(\mathbf{C}, +) \to (\mathbf{C}, +)$ de noyau $\mathfrak{a}$. Pour tout $\alpha \in \mathbf{A}_{\infty_1}$ il existe alors ([**?**]) un polynôme *additif* [1] $\rho_\alpha(X)$ tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}/\mathfrak{a} \arrow[r, "\alpha\cdot"] \arrow[d, "\exp_{\mathfrak{a}}"', "\cong"] & \mathbf{C}/\mathfrak{a} \arrow[d, "\exp_{\mathfrak{a}}", "\cong"'] \\
\mathbf{C} \arrow[r, "\rho_\alpha"'] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

Le *module de Drinfeld* (de rang 1) associé à $\mathfrak{a}$, soit $\mathbb{D}_{\mathfrak{a}} = (\mathbf{C}, \rho)$, est défini alors comme $\mathbf{C}$ muni de la structure de $\mathbf{A}_{\infty_1}$-module définie par les ρ_α. En tant que $\mathbf{A}_{\infty_1}$-module, on a

$$\mathbb{D}_{\mathfrak{a}} \cong \mathbf{C}/\mathfrak{a}.$$

Il existe une normalisation naturelle de $\mathbb{D}_{\mathfrak{a}}$ par $\xi_{\mathfrak{a}} \in \mathbf{C}$ qui joue un rôle analogue à la normalisation de $\mathbb{Z}$ par $\pi i \in \mathbb{C}$ dans la théorie de l'exponentielle classique. On remplace le réseau $\mathfrak{a} \subset \mathbf{C}$ par $\Lambda_{\mathfrak{a}} := \xi_{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}$ et on considère l'exponentielle correspondante

$$e_{\mathfrak{a}}(z) := \exp_{\Lambda_{\mathfrak{a}}}(z) = \xi_{\mathfrak{a}} \exp_{\mathfrak{a}}(\xi_{\mathfrak{a}}^{-1} z).$$

On choisit $\xi_{\mathfrak{a}}$ de manière à obtenir un module de Drinfeld $\widetilde{\mathbb{D}}_{\mathfrak{a}} = (\mathbf{C}, \tilde{\rho})$ conjugué à $\mathbb{D}_{\mathfrak{a}}$ et *normalisé par rapport au signe* (voir au §12 de [**?**]). Dans ce cas, pour chaque $\alpha \in \mathbf{A}_{\infty_1}$ les coefficients de $\tilde{\rho}_\alpha$ appartiennent au corps de classes de Hilbert $\mathbf{H}_{\mathbf{A}_{\infty_1}}$ et de plus (voir [**?**] et [**?**] Theorem 3.4.2) Hayes a montré qu'ils engendrent ce corps :

$$\mathbf{H}_{\mathbf{A}_{\infty_1}} = \mathbf{K}(\text{coefficients de } \tilde{\rho}_\alpha).$$

Le module $\widetilde{\mathbb{D}}_{\mathfrak{a}}$ s'appelle *module de Hayes*. Il a permis à ce dernier de développer une théorie explicite du corps de classes basée sur le "petit" anneau de Dedekind $\mathbf{A}_{\infty_1}$ en utilisant les modules $\tilde{\mathbb{D}}_{\mathfrak{a}}$.

Le but de cet article est de proposer un candidat pour représenter un analogue des modules de Hayes pour les anneaux d'entiers des corps de nombres. En particulier, on définira les analogues des objets suivants :

- le petit anneau $\mathbf{A}_{\infty_1}$: ce sera un *anneau quasicristallin PVS (Pisot-Vijayaraghavan et Salem)*, voir §**??** ;
- un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}_{\infty_1}$, appelé ci-dessous *idéal quasicristallin*, voir §**??** ;
- le groupe de classes d'idéaux $\mathsf{Cl}_{\mathbf{A}_{\infty_1}}$, ici le *monoïde des classes des idéaux quasicristallins*, voir §**??** ;

[1] C'est-à-dire de la forme $f(X) = \sum c_i \tau^i$ où $\tau(X) = X^q$ est le morphisme de Frobenius.

- le quotient $\mathbf{C}/\mathfrak{a}$, noté $\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$, alias ici le *solénoïde quasicristallin* associé à $\mathfrak{a}$, voir §**??** ;
- l'exponentielle $\exp_{\mathfrak{a}}$, voir §**??** ;
- le module de Drinfeld $\mathbb{D}_{\mathfrak{a}}$, devenu le *module de Drinfeld quasicristallin* et noté
$$\mathbb{E}_{\mathfrak{a}} \subset \mathbb{C}^*.$$
Sa structure de "module" provient d'applications multivaluées
$$\rho_\alpha : \mathbb{D}_{\mathfrak{a}} \longrightarrow \mathbb{D}_{\mathfrak{a}},$$
induisant des fonctions bien définies sur le cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^*$.

2. Anneaux et idéaux quasicristallins

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. On dit que X est un *ensemble de Delaunay* s'il est

1. *Uniformément discret* : il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $B_r(x) \cap X = \{x\}$, où $B_r(x)$ est le boule ouvert de radius r centré en x.
2. *Relativemente dense* : il existe $R > r > 0$ tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $B_R(v) \cap X$ est non nulle.

Un *quasicristal* (au sens d'Yves Meyer [**?**]) est un ensemble de Delaunay $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ qui est un *presque réseau* : il existe un ensemble fini $F \subset \mathbb{R}^n$ tel que
$$\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F.$$

Exemple 2 (Ensembles Modèles). Soit $\mathbb{R}^N = V_1 \oplus V_2$ une décomposition en somme directe de deux sous-espaces vectoriels, π_i les projections sur V_i, $i = 1, 2$. Soient $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ un réseau et $D \subset V_2$ un ensemble relativement compact (appelé *fenêtre*). L'*ensemble modèle* associé est défini par
$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\Gamma, D) = \mathcal{M}(V_1, V_2, \Gamma, D) = \{\pi_1(v) |\ v \in \Gamma, \pi_2(v) \in D\} \subset V_1.$$
Normalement on prendra $N = n + m$, $V_1 = \mathbb{R}^n$ et $V_2 = \mathbb{R}^m$, afin d'avoir $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$. Plus généralement, on peut remplacer $\mathbb{R}^N$ par $\mathbb{R}^n \oplus H$ où H est un groupe localement compact. En prenant $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \oplus H$ un réseau et $D \subset H$ relativement compact, on définit de même $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, H, \Gamma, D)$. Dans les deux cas, il en résulte que $\mathcal{M}$ est un quasicristal ([**?**], [**?**]). Tout quasicristal est contenu dans un ensemble modèle, mais il existe des quasicristaux qui ne sont pas des ensembles modèles ([**?**]).

Definition 1. Un *anneau quasicristallin* (euclidien de rang n) est un quasicristal $A \subset \mathbb{R}^n$ qui est un monoïde multiplicatif contenant $\{0, \pm 1\}$. Un sous-monoïde $\mathfrak{a} \subset A$ satisfaisant $A \cdot \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ est appelé *idéal quasicristallin* (entier)[2]. Plus généralement, un idéal quasicristallin fractionnaire est un quasicristal $\mathfrak{a} \subset \mathbb{R}^n$ tel que $A \cdot \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$.

Exemple 3. Soient $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+m}$ un réseau qui est aussi un anneau unitaire et $D \subset \mathbb{R}^m$ un monoïde multiplicatif relativement compact qui contient $\pi(1)$ (par exemple, on peut prendre $D = \{$la boule unitaire en $\mathbb{R}^m\}$ ou le produit $[-1, 1] \times \cdots \times [-1, 1]$). L'ensemble modèle associé $A = \mathcal{M}(\Gamma, D)$ est donc un anneau quasicristallin. Pour chaque idéal $\mathfrak{A} \subset \Gamma$ et chaque sous-monoïde relativement compact $D' \subset D$, $\mathfrak{a} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D')$ est un idéal quasicristallin de A.

[2]On note (voir [**?**]) qu'un idéal quasicristallin entier et non réduit à zéro est aussi un quasicristal.

Dans la suite on se concentrera sur le cas des idéaux quasicristallins associés aux sous monoïdes multiplicatifs d'un corps de nombres $K/\mathbb{Q}$ de degré $d > 1$. On note les d plongements $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ ainsi que l'espace de Minkowski

$$K \hookrightarrow K_\infty = \{\boldsymbol{z} = (z_\sigma) \in \mathbb{C}^d | \overline{z}_\sigma = z_{\overline{\sigma}}\} \cong \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s,$$

où r est le nombre de plongements réels, s le nombre des paires de plongements complexes conjugués et $d = r + 2s$. On fixe un sous ensemble

$$\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}, \quad \sigma_i : K \hookrightarrow K_{\sigma_i} = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ \mathbb{C} \end{cases}$$

de plongements tel que si $\sigma \in \Sigma$ est complexe, $\overline{\sigma} \in \Sigma$. L'ensemble Σ définit un sous-espace $K_\Sigma \subset K_\infty$ de façon évidente et un plongement

$$\Sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k) : K \hookrightarrow K_\Sigma.$$

Si Σ' est le complémentaire de Σ, on a $K_\infty = K_\Sigma \oplus K_{\Sigma'}$. On dit que $A \subset K$ est un *anneau quasicristallin* s'il existe $\Sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ comme ci-dessus et tel que l'image $\Sigma(A) \subset K_\Sigma$ est un anneau quasicristallin de K_Σ. On identifiera alors A avec son image $\Sigma(A) \subset K_\Sigma$.

Exemple 4. Fixons Σ comme ci-dessus. On peut associer à chaque $\sigma \in \Sigma'$ la fenêtre $D_\sigma = \{x \in K_\sigma | \, |x| \leq 1\}$. Alors l'ensemble modèle

$$A_\Sigma = \mathcal{M}(K_\Sigma, K_{\Sigma'}, \mathcal{O}_K, D_\Sigma),$$

où $D_\Sigma = \prod_{\sigma \in \Sigma'} D_\sigma$, définit un anneau quasicristallin $A_\Sigma \subset K_\Sigma$. Si $\Sigma = \{\sigma\}$ on note

$$A_\sigma \subset \begin{cases} \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ \mathbb{C} \end{cases}$$

l'anneau quasicristallin associé, qu'on dira de *rang* 1, réel ou complexe selon la nature du plongement σ.

Si par exemple $K = \mathbb{Q}(\theta) \subset \mathbb{R}$ est une extension quadratique réelle de $\mathbb{Q}$, alors on a deux plongements $\sigma_1 = \mathrm{id}$ et σ_2 de sorte que

$$A_{\sigma_1} = \{\alpha \in \mathcal{O}_K | \, |\alpha'| \leq 1\}, \quad A_{\sigma_2} = \{\alpha' \in \mathcal{O}_K | \, |\alpha| \leq 1\},$$

où α' dénote le conjugué galoisien de α. Dans ce cas, on a

$$A_{\sigma_1} \cap A_{\sigma_2} = \pm 1, \quad \langle A_{\sigma_i} \rangle = \mathcal{O}_K, \;\; i = 1, 2,$$

où $\langle X \rangle$ est le groupe engendré par X et la deuxième égalité est conséquence du fait que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$, pour θ une unité fondamental. Si $K = \mathbb{Q}(\omega)$ quadratique complexe, il n'y a qu'une paire de places conjuguées (σ et $\bar{\sigma}$) avec $A_\sigma = \mathcal{O}_K$. Si Σ comprend tous les plongements de K, on obtient $A_\Sigma = \mathcal{O}_K$.

Soient θ un entier algébrique réel tel que $\theta > 1$, θ^{σ_i} ses conjugués, $\sigma_i \neq \mathrm{id}$. On rappelle que θ est un *nombre de Pisot-Vijayaraghavan (PV)* si pour tout i, $|\theta^{\sigma_i}| < 1$, voir [**?**], [**?**]. Si $|\theta^{\sigma_i}| \leq 1$ pour tout i, avec égalité pour au moins une valeur de i, on dit que θ est un *nombre de Salem (S)* ([**?**]).

De même un entier algébrique complexe ω avec $|\omega| > 1$ est un *nombre de PV complexe* ([**?**]) si tous ses conjugués $\omega^{\sigma_i} \neq \overline{\omega}$ satisfont $|\omega^{\sigma_i}| < 1$; c'est un *nombre de S complexe* si tous ses conjugués $\omega^{\sigma_i} \neq \overline{\omega}$ satisfont $|\omega^{\sigma_i}| \leq 1$ avec de nouveau égalité pour au moins un i. On note PV l'ensemble de tous les nombres de

Pisot-Vijayaraghavan complexes, S celui des nombres de Salem complexes et PVS l'union de ces deux ensemles ($PVS = PV \cup S$). Les intersections $PV_{\mathbb{R}} = PV \cap \mathbb{R}$, $S_{\mathbb{R}} = S \cap \mathbb{R}$, $PVS_{\mathbb{R}} = PVS \cap \mathbb{R}$, consistent en les nombres PV, S et PVS classiques ainsi que leurs opposés. Si $K/\mathbb{Q}$ est finie, on note $PV_K = PV \cap K$ et de même pour S et PVS. On a alors l'énoncé suivant :

Proposition 1. *Soit $A_\sigma \subset K$ comme dans l'Exemple* **??**. *Alors on a l'égalité*

$$A_\sigma = PVS_K \cup \mu_K \cup \{0\}$$

où $\mu_K \subset \mathcal{O}_K^\times$ est le sous-groupe multiplicatif des racines de l'unité.

Preuve. On identifie A_σ à son plongement complexe en utilisant la place σ. Pour tout $\alpha \in A_\sigma$, $|\alpha^\tau| \leq 1$ pour tout $\tau \neq \sigma, \bar{\sigma}$. Si $|\alpha| > 1$ alors $\alpha \in PVS_K$ et sinon $|\alpha| = 1$ et donc $\alpha \in \mu_K$.

□

Un tel A_σ sera appelé *anneau quasicristallin PVS* associé à K et σ; dans ce que suit nous nous concentrerons sur l'étude de tels anneaux quasicristallins de rang 1. On choisit une fois pour toutes une place complexe dans chaque paire de places conjuguées : l'ensemble des σ_i tels que $\sigma_i, \overline{\sigma}_i \neq \sigma$ contient $r + s - 1$ éléments. Notons

$$\pi' : K_\infty \longrightarrow K_{\{\sigma\}'}$$

la projection sur $K_{\{\sigma\}'}$, où l'on rappelle que $\{\sigma\}'$ est le complémentaire de σ dans l'ensemble des places. Soient $\mathbf{z} \in K_{\sigma'}$ et $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_{r+s-1}) > 0$ (i.e. $\delta_i > 0$ pour tout i). On écrira

$$|\mathbf{z}| < \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{r+s-1},$$

si et seulement si $|z_i| < \delta_i^{x_i}$ pour tout i. Si

$$u \in U_K := \mathcal{O}_K^\times / \mu_K \cong \mathbb{Z}^{r+s-1}$$

est une unité d'ordre infini, on définit pour chaque $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{r+s-1}$

$$\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u) := \{\alpha \in \mathcal{O}_K | \ |\pi'(\alpha)| < |\pi'(u)|^{\mathbf{x}}\}.$$

Il est clair que $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u)$ est un ensemble modèle et un monoïde multiplicatif, donc un idéal quasicristallin fractionnaire puisque A_σ agit dessus par multiplication. Pour $u_1, u_2, u \in U_K$, on a les inclusions

$$\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u_1) \cdot \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u_2) \subset \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u_1 u_2), \quad \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u) \cdot \mathfrak{a}_{\mathbf{y}}(u) \subset \mathfrak{a}_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}(u),$$

ainsi que les égalités

$$\mathfrak{a}_{-\mathbf{x}}(u) = \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u^{-1}), \quad u \cdot \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u) = \mathfrak{a}_{\mathbf{x}+\mathbf{1}}(u)$$

où $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$. Pour tout $u \in U_K$, on a

$$\mathfrak{a}_{\mathbf{0}} := PV_K \cap A_\sigma = \mathfrak{a}_{\mathbf{0}}(u),$$

l'ensemble de nombres de PV de A_σ, qui est un idéal quasicristallin entier maximal de A_σ ; son complémentaire est donné par

$$A_\sigma \setminus \mathfrak{a}_0 = S_K \cup \mu_K.$$

Dans la suite on fixe u une *unité de PV* [3], c'est-à-dire une unité u d'ordre infini tel que $|\pi'(u)| < \mathbf{1}$. Nous omettrons parfois u dans la notation, écrivant simplement $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}$.

[3] Il en existe toujours ; voir par exemple la preuve du Théorème 3.26 de Narkiewicz [**?**].

Outre les quasicristaux $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}$, il sera commode de disposer des quasicristaux associés à un vecteur $\boldsymbol{+} = (+_1, \ldots, +_{d-1}) \in \{0,1\}^{d-1}$: si l'on note

$$<_{+_i} = \begin{cases} < & \text{si } +_i = 0, \\ \leq & \text{si } +_i = 1 \end{cases},$$

on définit

$$\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}^{+} = \{\alpha \in \mathcal{O}_K |\ |\pi'(\alpha)| <_{\boldsymbol{+}} |\pi'(u)|^{\mathbf{x}}\} \supset \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}.$$

Lorsque $\boldsymbol{+} = (1, \ldots, 1)$, on note

$$\overline{\mathfrak{a}} := \mathfrak{a}^{+},$$

de sorte que $A_\sigma = \overline{\mathfrak{a}}_{\mathbf{0}}$ et $\mathfrak{a}_{\boldsymbol{x}}^{+} = \mathfrak{a}_{\boldsymbol{x}}$ quand $\boldsymbol{+} = (0, \ldots, 0)$.

Les quasicristaux $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}} \subseteq \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}^{+}$ sont des idéaux quasicristallins entiers si $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ (parce que u est PV), et autrement des idéaux quasicristallins fractionnaires. Clairement,

$$\mathfrak{a}_{\mathbf{x}} \subsetneq \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}^{+} \implies \exists i \text{ tel que } \sigma_i(u)^{x_i} \in \mathcal{O}_K.$$

Par exemple, si $K = \mathbb{Q}(\theta)$ est une extension quadratique réelle et $\theta > 1$ une unité fondamentale, alors pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathfrak{a}_x(\theta) \subsetneq \mathfrak{a}_x^{+}(\theta) \Leftrightarrow \theta^x \in \mathcal{O}_K,$$

et dans ce cas

$$\mathfrak{a}_x^{+}(\theta) = \mathfrak{a}_x(\theta) \cup \{\pm\theta^x\}.$$

Note 1. Le choix de l'unité u est sans conséquence. Plus précisément la famille

$$Z := \{\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}^{+}(u)\}_{\boldsymbol{+},\mathbf{x}}$$

est indépendante du choix de u. En effet, si $\tilde{u}$ est autre unité de PV, il existe $\mathbf{y}$ tel que $|\pi'(u)|^{\mathbf{y}} = |\pi'(\tilde{u})|$.

Note 2. On peut considérer les analogues des quasicristaux et des ensembles modèles dans le cas de caractéristique positive (voir §**??** ci-dessus pour les notations). En remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbf{R}$ on peut définir pareillement les notions de quasicristal et d'ensemble modèle. On a alors

$$\mathbf{A}_{\infty_1} = \mathbf{A}_\sigma = \mathfrak{a}_0^{+} = \{g \in \mathbf{O_K} |\ |\pi'(g)|_{\infty_1} \leq \mathbf{1}\}$$

qui est un anneau au sens usuel. Dans ce contexte les $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u)$ s'identifient à

$$\mathfrak{a}_{\mathbf{n}} := \{g \in \mathbf{O_K} |\ |\pi'(g)|_{\infty_1} \leq q^{-\mathbf{n}}\}, \quad \mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_{r+s-1}) \in \mathbb{Z}^{r+s-1}.$$

où $\mathfrak{a}_{\mathbf{n}}$ est un idéal fractionnaire au sens usuel. Plus généralement tout idéal quasicristallin fractionnaire qui est un ensemble modèle est un idéal fractionnaire au sens usuel de l'anneau $\mathbf{A}_{\infty_1}$. On en conclut que les analogues en caractéristique nulle des "petits" anneaux $\mathbf{A}_{\infty_1}$ sont les anneaux quasicristallins PV de type A_σ.

Note 3. Notons enfin que les constructions faites ci-dessus en rang 1 ont des équivalents dans le cas où A_Σ est un anneau quasicristallin modèle de rang k, $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$. On définit en ce cas l'ensemble PV_Σ des nombres de PV associés à Σ comme

$$PV_\Sigma = \{\alpha \in \mathcal{O}_K |\ |\sigma_1(\alpha) \cdots \sigma_k(\alpha)| > 1,\ \ |\sigma'(\alpha)| < 1 \text{ pour tout } \sigma' \in \Sigma'\}.$$

On a donc toujours $A_\Sigma = PV_\Sigma \cup \mu_K$ et l'analogue des idéaux modèles $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u)$ se définit par l'intermédiaire d'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{r+s-k}$.

3. Monoïdes des classes d'idéaux quasicristallins

Dans ce qui suit on étudie l'arithmétique des idéaux quasicristallins. On montre tout d'abord l'existence d'un produit monoïdal :

Proposition 2. *Soient $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A \subset \mathbb{R}^n$ deux idéaux quasicristallins contenus dans un anneau quasicristallin A. Alors, le produit monoïdal*

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} := \{\alpha\beta |\ \alpha \in \mathfrak{a},\ \beta \in \mathfrak{b}\} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$$

est aussi un quasicristal.

Démonstration. On note tout d'abord que $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ est relativement dense car

$$\alpha \cdot \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$$

pour n'importe quel $\alpha \in \mathfrak{a}$ non zéro, et $\alpha \cdot \mathfrak{b}$ est relativement dense. On rappelle ensuite qu'un ensemble relativement dense est un quasicristal si et seulement si il est contenu dans un ensemble modèle (général) $\mathcal{M}$ (voir [**?**], Theorem 9.1.i). En particulier, $A \subset \mathcal{M}$ pour un certain ensemble modèle $\mathcal{M}$. Mais alors $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subset A \subset \mathcal{M}$, de sorte que $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ est bien un quasicristal.

□

Soit $A = A_\sigma \subset K$ un anneau quasicristallin avec les notations de l'Exemple 3 ci-dessus. Il est clair que si $\mathfrak{a}$ est un idéal quasicristallin fractionnaire, il en est de même de $\gamma\mathfrak{a}$ pour tout $\gamma \in K$. La classe projective

$$[\mathfrak{a}] = \{\gamma\mathfrak{a} |\ \gamma \in K\}$$

s'appelle la *classe de l'idéal quasicristallin.* L'ensemble des classes d'idéaux quasicristallins de A s'écrit

$$\mathsf{Cl}(A) = \{[\mathfrak{a}] \mid \mathfrak{a} \text{ un idéal quasicristallin fractionnaire de } A\}.$$

Proposition 3. $\mathsf{Cl}(A)$ *est un monoïde multiplicatif avec élément identité* $1 = [A]$. *Cependant ce monoïde n'est pas un groupe. En particulier :*

1. *Les $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}$ ne sont pas inversibles pour tout $\mathbf{x} \in K_{\sigma'}$;*
2. *Supposons qu'il existe $\alpha \in \overline{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}}$ tel que $\pi'(\alpha) = \pi'(u)^{\mathbf{x}} \in \mathcal{O}_K^\times$ pour tout i ; alors $\overline{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}}$ est inversible d'inverse $\overline{\mathfrak{a}}_{-\mathbf{x}}$.*

Démonstration. 1. Si $\mathfrak{b}$ est un inverse pour $\mathfrak{a}$, il existe $\alpha \in \mathfrak{a}$ tel que $\alpha^{-1} \in \mathfrak{b}$, puisque le produit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = A$ contient 1. Soit $\beta \in \mathfrak{a}$ tel que $|\alpha_i'| < |\beta_i'| < u_i^{-x_i}$ pour tout i ; un tel élément existe parce que $\mathcal{O}_K \subset K_\sigma'$ est dense. Alors $\beta/\alpha \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ mais n'est pas élément de A ; contradiction. 2. On peut supposer que $\alpha \in \mathcal{O}_K^\times$, puis $1 = \alpha \cdot \alpha^{-1} \in \overline{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathfrak{a}}_{-\mathbf{x}}$, ce qui implique que $\overline{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathfrak{a}}_{-\mathbf{x}} = A$. □

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal quasicristallin et soit

$$\mathfrak{A} := \mathfrak{a}\mathcal{O}_K$$

son *extension* en un $\mathcal{O}_K$-idéal, par définition l'ensemble des sommes finies de la forme $\sum_i \gamma_i\alpha_i$, $\gamma_i \in \mathcal{O}_K$, $\alpha_i \in \mathfrak{a}$. On note que $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathcal{O}_K = (\mathfrak{a}\mathcal{O}_K)(\mathfrak{b}\mathcal{O}_K)$ (produit des idéaux), d'où le fait que cette opération d'extension induit un morphisme de monoïdes

$$\Phi : \mathsf{Cl}(A) \longrightarrow \mathsf{Cl}(K).$$

Proposition 4. *L'application Φ est un épimorphisme de monoïdes. Son noyau contient l'ensemble Z defini dans la Note* **??**.

Démonstration. Choisissons $u \in A$ une unité PV. Si $\mathfrak{B} = (\alpha, \beta) \subset \mathcal{O}_K$ est un idéal, on peut supposer après multiplication par $\gamma = u^n \in \mathcal{O}_K^\times$, que α, β satisfont $|\pi'(\alpha)|, |\pi'(\beta)| < \mathbf{1}$, i.e. $\alpha, \beta \in A$. Alors $\mathfrak{b} := \mathfrak{B} \cap A$ définit un élément de $\mathsf{Cl}(A)$ tel que $\Phi(\mathfrak{b}) = \mathfrak{B}$. Puisque tout $\mathfrak{a} \in Z$ contient une unité de la forme $\gamma = u^n$, Z est bien contenu dans le noyau de Φ. □

On note que le produit monoïdal est "incomplet" dans le sens qu'il ne coïncide pas avec le produit des idéaux quand $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ en sont. Par exemple, on peut faire toutes les constructions ci-dessus en caractéristique positive, en considérant les extensions finies $\mathbf{K}$ du corps de fonctions $\mathbf{Q} = \mathbb{F}_q(T)$. En ce cas les ensembles modèles sont des idéax d'anneaux du type $\mathbf{A}_{\infty_1}$ (voir au §1 et la note 2 ci-dessus) mais le produit introduit ici n'est pas le produit de ces idéaux : il manque ici l'operation d'addition qui n'est pas assez bien contrôlée en caractéristique nulle, dans le cadre de quasicristaux. Cependant si l'on se restreint aux idéaux quasicristallins qui sont des ensembles modèles, il est possible de définir un produit qui incorpore la somme d'une manière satisfaisante, et tel qu'il coïncide avec le produit des idéaux lorsque $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ en sont. Dans ce qui suit, nous développons la définition d'un tel produit.

Soient $\mathfrak{A}$ un $\mathcal{O}_K$-idéal fractionnaire (réalisé comme un réseau de K_∞) et $D \subset K_{\sigma'}$ une fenêtre qui est un produit d'intervalles de la forme

$$D_{\mathbf{x}}^{+}(u) := \prod (-u^{x_i}, u^{x_i})_{+_i}, \quad (-u^{x_i}, u^{x_i})_{+_i} = \begin{cases} (-u^{x_i}, u^{x_i}) & \text{si } +_i = 0 \\ [-u^{x_i}, u^{x_i}] & \text{si } +_i = 1 \end{cases}.$$

Soit

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{A},\mathbf{x}}^{+}(u) = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D)$$

l'ensemble modèle associé. On observe que le choix de la fenêtre D n'est pas forcément unique : par exemple, il est possible (en fait probable) qu'on ait l'égalité

$$\mathcal{M}(\mathfrak{A}, D_{\mathbf{x}}^{+}(u)) = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D_{\mathbf{x}}(u))$$

pour tout $+$, où $D_{\mathbf{x}}(u)$ correspond à $+ = (0, \ldots, 0)$. Dans ce cas, on dit que l'ensemble modèle est *générique* et on le spécifie comme ensemble modèle, en privilégiant la fenêtre la plus petite, c'est-à-dire $D_{\mathbf{x}}(u)$, plutôt que les autres $D_{\mathbf{x}}^{+}(u)$. En général, il existe, pour chaque ensemble modèle de ce type, une plus petite fenêtre, à savoir l'intersection

$$\bigcap_{\mathfrak{a} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D_{\mathbf{x}}^{+}(u))} D_{\mathbf{x}}^{+}(u),$$

qui est aussi de la forme $D_{\mathbf{x}}^{+}(u)$ pour un choix approprié de $+$. De cette façon, chaque ensemble modèle basé sur le réseau $\mathfrak{A}$ est déterminé et se détermine par sa plus petite fenêtre. Dans le cas générique on note simplement $\mathfrak{a}$ pour

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{A},\mathbf{x}}(u) = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D_{\mathbf{x}}^{+}(u))) = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D_{\mathbf{x}}(u));$$

dans les autres cas on précisera la distinction

$$\mathfrak{a}^{+} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{A},\mathbf{x}}^{+}(u) \supsetneq \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{A},\mathbf{x}}(u).$$

Lemme 1. *Si $\mathcal{M}(\mathfrak{A}, D) = \mathcal{M}(\mathfrak{B}, D')$ où D, D' sont les plus petites fenêtres (au sens expliqué dans les paragraphes dessus) alors $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ et $D = D'$.*

Proof. Au moins l'un des ensembles $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{A}$ est infini si $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$: supposons que $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$ est infini. Soit $D'' = D \cap D'$. Puisque l'action de $u \in \mathcal{O}_K^\times$ stabilise $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$,

il en suit qu'il existe $\alpha \in \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D'') \setminus \mathcal{M}(\mathfrak{B}, D') \subset \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D) \setminus \mathcal{M}(\mathfrak{B}, D')$. Donc $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ et $D = D'$. □

On dit que l'ensemble modèle non générique $\overline{\mathfrak{a}}$ est *fermé* ; si de plus il existe $\alpha \in \overline{\mathfrak{a}}$ tel que $\alpha^{-1} \in \mathfrak{A}^{-1}$ et $|\pi'(\tilde{u})| = |\pi'(u)|^{-\mathbf{x}}$, on dit que $\overline{\mathfrak{a}}$ est *unitaire*. Dans tous les cas on appelle $\mathfrak{a}$ un *idéal quasicristallin modèle* : c'est bien un idéal quasicristallin de A au sens précédent.

Soient maintenant $\mathfrak{a} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D)$, $\mathfrak{b} = \mathcal{M}(\mathfrak{B}, D')$ deux idéaux quasicristallins modèles. On peut alors définir un produit qui se restreint au produit usuel des idéaux fractionnaires quand $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ en sont:

$$\mathfrak{a} * \mathfrak{b} := \mathcal{M}(\mathfrak{A} * \mathfrak{B}, D \cdot D') \supset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b},$$

où $\mathfrak{A} * \mathfrak{B}$ est le produit usuel d'idéaux fractionnaires et

$$D \cdot D' = \{\mathbf{x} = \mathbf{t}\mathbf{t}' |\ \mathbf{t} \in D,\ \mathbf{t}' \in D'\}.$$

En raison de notre convention pour le choix de fenêtre, le produit $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$ est bien défini et c'est aussi un idéal quasicristallin modèle. L'ensemble des idéaux quasicristallins modèles, soit

$$\mathsf{I}^{\mathsf{mod}}(A),$$

constitue un monoïde lorsqu'il est muni du produit $*$, dont l'élément neutre est $1 := A = \mathcal{M}(\mathcal{O}_K, D_{\mathbf{0}})$.

Proposition 5. *L'ensemble*

$$\mathsf{I}_0^{\mathsf{mod}}(A) := \{\textit{idéaux quasicristallins modèles unitaires}\}$$

est un sous-groupe du monoïde $\mathsf{I}^{\mathsf{mod}}(A)$.

Démonstration. Soient $\overline{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{A},\mathbf{x}} \in \mathsf{I}_0^{\mathsf{mod}}(A)$ et $\alpha \in \overline{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{A},\mathbf{x}}$ un élément qui montre que c'est un idéal unitaire ; on a donc $\alpha^{-1} \in \overline{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{A}^{-1},-\mathbf{x}}$ avec

$$\overline{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{A},\mathbf{x}} * \overline{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{A}^{-1},-\mathbf{x}} = A = 1.$$

Si $\overline{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{A},\mathbf{x}}, \overline{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{B},\mathbf{y}}$ sont unitaires, avec α, resp. β, comme ci-dessus, alors $\overline{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{A}*\mathfrak{B},\mathbf{x}+\mathbf{y}}$ est unitaire par rapport à $\alpha\beta$ et

$$\overline{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{A},\mathbf{x}} * \overline{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{B},\mathbf{y}} = \overline{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{A}*\mathfrak{B},\mathbf{x}+\mathbf{y}}.$$

□

On appellera *principal* l'idéal quasicristallin

$$\alpha A := \mathcal{M}(\alpha\mathcal{O}_K, D_\alpha)$$

où $\alpha \in K^\times$ et

$$D_\alpha = [-|\sigma_1(\alpha)|, |\sigma_1(\alpha)|] \times \cdots \times [-|\sigma_{r+s-1}(\alpha)|, |\sigma_{r+s-1}(\alpha)|].$$

De manière équivalente, si l'on note

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\alpha) &:= \log_{|\pi'(u)|}(|\pi'(\alpha)|) \\ &:= \left(\log_{|\sigma_1(u)|} |\sigma_1(\alpha)|, \ldots, \log_{|\sigma_{r+s-1}(u)|} |\sigma_{r+s-1}(\alpha)|\right), \end{aligned} \tag{2}$$

alors on a

$$\alpha A = \overline{\mathfrak{a}}_{(\alpha),\mathbf{x}(\alpha)}.$$

On remarque que pour tout $\alpha \in A$, $\alpha A \subset A$, autrement dit αA est un idéal quasicristallin entier. En général les idéaux quasicristallins principaux sont tous unitaires et forment un sous-groupe

$$\mathsf{P}^{\mathsf{mod}}(A) = \left\{\alpha A : \quad \alpha \in K^{\times}\right\} \subset \mathsf{I}_0^{\mathsf{mod}}(A) \subset \mathsf{I}^{\mathsf{mod}}(A).$$

On note le quotient

$$\mathsf{Cl}^{\mathsf{mod}}(A) := \mathsf{I}^{\mathsf{mod}}(A)/\mathsf{P}^{\mathsf{mod}}(A).$$

C'est le *monoïde des classes d'idéaux quasicristallins modèles.* Il contient

$$\mathsf{Cl}_0^{\mathsf{mod}}(A), \tag{3}$$

le sous-groupe des classes d'éléments de $\mathsf{I}_0^{\mathsf{mod}}(A)$.

Soient $u_1, \ldots, u_{r+s-1}$ un choix de système d'unités fondamentales. Les vecteurs

$$\mathbf{x}(u_1), \ldots, \mathbf{x}(u_{r+s-1}),$$

de $\mathbb{R}^{r+s-1}$ (voir (**??**) ci-dessus) sont linéairement independants ; on note Υ le groupe additif qu'ils engendrent.

Lemme 2. $\Upsilon \subset \mathbb{R}^{r+s-1}$ *est un réseau.*[4]

Démonstration. Le rang de Υ en tant que groupe abélien est $r+s-1$; reste à montrer que Υ est discret. Considèrons le cube centré à l'origine

$$C = \{\mathbf{x} : \ |x_i| \leq R\} \subset \mathbb{R}^{r+s-1}$$

avec $R > 0$: il suffit de vérifier que $\Upsilon \cap C$ est fini. La préimage $D \subset \mathbb{R}_+^{r+s-1}$ de C par l'inverse du logarithme est un produit :

$$D = \{\mathbf{y}|\ r_1 \leq |y_i| \leq r_2\}$$

et donc la préimage $\widetilde{D}$ de D dans $K_{\sigma'}$ pour la valeur absolue

$$|\cdot| : K_{\sigma'} \to \mathbb{R}_+^{r+s-1}$$

est un produit d'anneaux de dimensions 1 ou 2, uniformément éloignés de l'origine comme de l'infini. On en conclut que tout élément $\pi'(\delta) \in \pi'(\mathcal{O}_K^{\times}) \cap \widetilde{D}$ satisfait des inégalités

$$0 < c_1 < |\delta| < c_2$$

avec c_1, c_2 des constants qui ne dépendent que de C (parce que $\delta \cdot \prod \sigma_i(\delta) = \pm 1$). En particular, la préimage de $\pi'(\mathcal{O}_K^{\times}) \cap \widetilde{D}$ par π' est contenue dans un compact et contient donc un nombre fini d'éléments de $\mathcal{O}_K^{\times} \subset \mathcal{O}_K$. Ainsi $\Upsilon \cap C$ est bien un ensemble fini. □

On note le tore quotient

$$\mathbb{T}_{\Upsilon} := \mathbb{R}^{r+s-1}/\Upsilon.$$

Du fait de l'identité

$$u_i \cdot \mathfrak{a}^+_{\mathcal{O}_K,\mathbf{x}} = \mathfrak{a}^+_{\mathcal{O}_K,\mathbf{x}+\mathbf{x}(u_i)}, \quad i = 1, \ldots, r+s-1,$$

l'ensemble

$$\mathsf{Z} := \left\{\mathfrak{a}^+_{\mathcal{O}_K,\mathbf{x}} \mod \mathsf{P}^{\mathsf{mod}}(A)\right\}_{\mathbf{x}\in\mathbb{T}_{\Upsilon},\,+} \tag{4}$$

est un sous-monoïde de $\mathsf{Cl}^{\mathsf{mod}}(A)$.

[4]Ce lemme est essentiellement équivalent au théorème des unités de Dirichlet, à une nuance près : on utilise $\log_{|\pi'(u)|}$ au lieu du logarithme népérien.

Théorème 1. *L'application*

$$\mathsf{Cl}^{\mathsf{mod}}(A) \longrightarrow \mathsf{Cl}(K), \quad \mathfrak{a} \longmapsto \mathfrak{a}\mathcal{O}_K = \text{le } \mathcal{O}_K\text{-idéal engendré par } \mathfrak{a},$$

est surjective, de noyau le sous-monoïde Z.

Démonstration. On commence par montrer que cette application est un homomorphisme. Soient $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ deux idéaux quasicristallins modèles : il faut montrer que

$$(\mathfrak{a} * \mathfrak{b})\mathcal{O}_K = (\mathfrak{a}\mathcal{O}_K * \mathfrak{b}\mathcal{O}_K) \mod \mathsf{P}(K), \tag{5}$$

où $\mathsf{P}(K)$ désigne l'ensemble des idéaux fractionnaires principaux de $\mathcal{O}_K$. En multipliant par des éléments appropriés de $\mathcal{O}_K$, on peut supposer sans perte de généralité que $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sont des quasicristaux entiers i.e. des ensembles modèles basés sur les idéaux entiers $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathcal{O}_K$ avec des fenêtres paramétrées par $\mathbf{x}, \mathbf{y} > 0$. Supposons pour plus de clarté que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont tous deux génériques ; la preuve dans les autres cas est identique. Soient alors $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ resp. $\beta_1, \beta_2, \dots$, resp. $\omega_1, \omega_2, \dots$ une liste de tous les éléments positifs de $\mathfrak{a}$, resp. $\mathfrak{b}$, resp. $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$. Un élément de $(\mathfrak{a} * \mathfrak{b})\mathcal{O}_K$ est donc de la forme

$$\eta = \sum_I \gamma_I \omega_I, \quad \omega_I := \prod_{i \in I} \omega_i,$$

où $I \subset \mathbb{N}$ est fini et $\gamma_I \in \mathcal{O}_K$ est nul pour presque tout $I \subset \mathbb{N}$. Par définition de $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$ comme ensemble modèle basé sur le réseau $\mathfrak{A} * \mathfrak{B}$, on a

$$\omega_i = \sum_j \alpha_{ij}\beta_{ij}, \quad \alpha_{ij} \in \mathfrak{A}, \ \ \beta_{ij} \in \mathfrak{B}, \quad |\pi'(\omega_i)| < |\pi'(u)|^{-(\mathbf{x}+\mathbf{y})}.$$

On note que $\alpha_{ij} \in \mathfrak{A}$, resp. $\beta_{ij} \in \mathfrak{B}$ n'est pas forcément un élément de $\mathfrak{a}$, resp. $\mathfrak{b}$; il est possible par exemple que $|\pi'(\alpha_{ij})| \not< |\pi'(u)|^{-\mathbf{x}}$. Néanmoins, en multipliant η par $1 = u^{-2MN}u^{2MN}$, $M \geq |I|$ pour tout I où $\gamma_I \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\eta &= \sum_I u^{-2NM}\gamma_I u^{2NM} \prod_{i \in I}\left(\sum_j \alpha_{ij}\beta_{ij}\right) \\ &= \sum_I u^{-2N|I|}\gamma_I \prod_{i \in I}\left(\sum_j (u^N\alpha_{ij})(u^N\beta_{ij})\right)\end{aligned}$$

et pour N suffisamment grand, $u^N\alpha_{ij} \in \mathfrak{a}$ et $u^N\beta_{ij} \in \mathfrak{b}$. On peut donc supposer sans perte de généralité que $\alpha_{ij} \in \mathfrak{a}$, $\beta_{ij} \in \mathfrak{b}$. Puis

$$\eta = \sum_I \gamma_I \prod_{i \in I}\left(\sum_j \alpha_{ij}\beta_{ij}\right) \tag{6}$$

$$= \sum_I \gamma_I \sum\left(\prod \alpha_{ij} \prod \beta_{ij}\right) \tag{7}$$

où les sommes de produits qui apparaissent à la ligne (**??**) proviennent du développement des produits de sommes de la ligne (**??**). Il est alors clair que l'expression (**??**) appartient au produit d'idéaux $\mathfrak{a}\mathcal{O}_K * \mathfrak{b}\mathcal{O}_K$. Autrement dit

$$(\mathfrak{a} * \mathfrak{b})\mathcal{O}_K \subset (\mathfrak{a}\mathcal{O}_K * \mathfrak{b}\mathcal{O}_K) \mod \mathsf{P}(K).$$

Inversement soit $\eta \in \mathfrak{a}\mathcal{O}_K * \mathfrak{b}\mathcal{O}_K$; on peut écrire

$$\eta = \sum_k \left[\left(\sum_I \gamma_{I,k}\alpha_I \right) \cdot \left(\sum_J \gamma_{J,k}\beta_J \right) \right], \quad \sum \gamma_{I,k}\alpha_I \in \mathfrak{a}\mathcal{O}_K, \ \sum \gamma_{J,k}\beta_J \in \mathfrak{b}\mathcal{O}_K,$$

où $I, J \subset \mathbb{N}$ sont finis et α_I, β_J sont des produits d'éléments de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\gamma_{I,k}, \gamma_{J,k} \in \mathcal{O}_K$. En développant les produits, on obtient des $\mathcal{O}_K$-combinations linaires d'expressions de la forme $\alpha_I\beta_J \in (\mathfrak{a} * \mathfrak{b})\mathcal{O}_K$. Alors, $\eta \in (\mathfrak{a} * \mathfrak{b})\mathcal{O}_K$ et on a prouvé l'égalité (**??**) i.e. que l'application du théorème est un homomorphisme. Si $\mathfrak{A} = (\alpha, \beta)$ est un $\mathcal{O}_K$-idéal, l'idéal quasicristallin modèle

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{A},\mathbf{x}}, \quad |\pi'(\alpha)|, \ |\pi'(\beta)| < |\pi'(u)|^{-\mathbf{x}}$$

satisfait $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}\mathcal{O}_K$, et donc l'application est également surjective. Tout élément de Z est entier et contient une unité (une puissance de u), d'où le fait que Z est contenu dans le noyau. Inversement si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{A},\mathbf{x}}$ est dans le noyau, $\mathfrak{A} \in \mathsf{P}(K)$ et il existe $\gamma \in K$ tel que $\gamma\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\mathcal{O}_K,\mathbf{y}}$. □

Dans ce qui suit nous munirons $\mathsf{Cl}^{\mathsf{mod}}(A)$ d'une topologie d'ensemble de Cantor. Soit $\mathsf{I}^{\mathsf{mod}}_{\mathfrak{A}}(A)$ l'ensemble des idéaux quasicristallins de A basés sur $\mathfrak{A} \subset K$, $\mathcal{O}_K$-idéal fractionnaire :

$$\mathsf{I}^{\mathsf{mod}}_{\mathfrak{A}}(A) = \{\mathfrak{a} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D)\} \subset \mathsf{I}^{\mathsf{mod}}(A).$$

(Par le Lemma **??**, il existe un seul $\mathfrak{A}$ tel que $\mathfrak{a} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D)$.) On peut identifier chaque element $\mathfrak{a}$ de $\mathsf{I}^{\mathsf{mod}}_{\mathfrak{A}}(A)$ avec sa fonction caractéristique

$$\chi_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{A} \longrightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_{\mathfrak{a}}(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha \in \mathfrak{a}.$$

On munit $\mathsf{I}^{\mathsf{mod}}_{\mathfrak{A}}(A)$ de la topologie induite du plongement $\mathsf{I}^{\mathsf{mod}}_{\mathfrak{A}}(A) \hookrightarrow 2^{\mathfrak{A}}$, où $2 = \{0, 1\}$ et $2^{\mathfrak{A}}$ est muni de la topologie produit. Chaque inclusion $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ induit un plongement $2^{\mathfrak{A}} \hookrightarrow 2^{\mathfrak{B}}$ qui est un homéomorphisme sur son image, defini en prolongeant $f : \mathfrak{A} \to 2$ à $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{A}$ par 0. Notons que d'après la démonstration du Lemme **??**, l'image de $\mathsf{I}^{\mathsf{mod}}_{\mathfrak{A}}(A)$ dans $2^{\mathfrak{B}}$ est disjointe de $\mathsf{I}^{\mathsf{mod}}_{\mathfrak{B}}(A)$. Autrement dit

$$\mathsf{I}^{\mathsf{mod}}(A) = \bigsqcup_{\mathfrak{A}} \mathsf{I}^{\mathsf{mod}}_{\mathfrak{A}}(A) \subset \varinjlim 2^{\mathfrak{A}}$$

est topologisé comme union disjointe, incluse dans la limite inductive $\varinjlim 2^{\mathfrak{A}}$.

Proposition 6. *L'action multiplicative de $K^\times$ sur $\mathsf{I}^{\mathsf{mod}}(A)$ induit une action bien définie du quotient $K^\times/\mu_K$ par homéomorphismes, qui est propre et discontinue. La topologie quotient sur $\mathsf{Cl}^{\mathsf{mod}}(A)$ est Hausdorff.*

Démonstration. L'action de μ_K laisse invariante chaque $\mathcal{O}_K$-idéal $\mathfrak{A}$ et chaque fenêtre D ; son action sur $\mathsf{I}^{\mathsf{mod}}(A)$ est donc triviale. Tout $\gamma \in K^\times/\mu_K$ agit sans point fixe : en effet, c'est clair si $\gamma \notin \mathcal{O}_K^\times/\mu_K$, parce que $\gamma\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}$ pour tout $\mathcal{O}_K$-idéal ; si maintenant $\gamma \in \mathcal{O}_K^\times/\mu_K$, $\gamma \notin \mu_K$, chaque fenêtre D satisfait $\overline{\gamma D} \neq \overline{D}$. Alors, γ définit une bijection de $\mathsf{I}^{\mathsf{mod}}(A)$ qui respecte la topologie.

Soit $\mathfrak{a} \in \mathsf{I}^{\mathsf{mod}}_{\mathfrak{A}}(A)$ defini par la fenêtre D. Soit

$$X = \{\gamma \in \mathcal{O}_K^\times/\mu_K |\ \gamma D \subset D\}, \quad X^{\complement} = \left(\mathcal{O}_K^\times/\mu_K\right) \setminus X.$$

D'après le Lemma **??**, l'action multiplicative de $\pi'(\mathcal{O}_K^\times)$ est sans point d'accumulation. Donc, il existe

- $\alpha \in \mathfrak{a}$ tel que $\pi'(\alpha) \notin \bigcup_{\gamma \in X} \gamma D$;
- $\beta \notin \mathfrak{a}$ tel que $\pi'(\beta) \in \bigcap_{\gamma \in X^{\complement}} \gamma D$.

On définit alors l'ouvert $U \ni \mathfrak{a}$ dont la fonction caractéristique χ satisfait

1. $\chi(\alpha) = 1$;
2. $\chi \in \mathsf{I}^{\mathsf{mod}}_{\mathfrak{A}}(A)$ i.e. $\chi|_{K\setminus\mathfrak{A}} \equiv 0$ et en particulier, $\chi(\beta) = 0$.

Si $\gamma \notin \mathcal{O}_K^\times/\mu_K$, $\gamma U \subset \mathsf{I}^{\mathsf{mod}}_{\gamma\mathfrak{A}}(A)$ d'intersection nulle avec $U \subset \mathsf{I}^{\mathsf{mod}}_{\mathfrak{A}}(A)$. Si $\gamma \in X$, $\chi_{\gamma\mathfrak{a}}(\alpha) = 0$ i.e. $\gamma U \cap U$ est vide ; de la même façon, si $\gamma \in X^{\complement}$, $\chi_{\gamma\mathfrak{a}}(\beta) = 1$ et $\gamma U \cap U$ est également vide. On en conclut bien que l'action est propre et discontinue. □

Note 4. Lorsque $K/\mathbb{Q}$ est quadratique et réelle, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^+_{\mathfrak{A},\mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ et $\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$, θ une unité fondamentale, on peut identifier canoniquement $\chi_{\mathfrak{a}}$ avec une *fonction de codage*

$$\overline{\chi}_{\mathfrak{a}} : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}.$$

Plus précisement, $\overline{\chi}_{\mathfrak{a}}(a) = 1$ si et seulement si il existe $b \in \mathbb{N}$ tel que $\chi_{\mathfrak{a}}(a\theta + b) = 1$. La correspondance $\mathfrak{a} \mapsto \overline{\chi}_{\mathfrak{a}}$ est injective sur Z car la projection $\alpha = a\theta + b \to a$ est injective sur $\mathcal{O}_K$.

Soit maintenant

$$\mathsf{Z}_0 := \mathsf{Z} \cap \mathsf{Cl}^{\mathsf{mod}}_0(A),$$

où $\mathsf{Cl}^{\mathsf{mod}}_0(A)$ est défini dans (**??**). On a alors le résultat suivant :

Théorème 2. *$\mathsf{Cl}^{\mathsf{mod}}(A)$ est un monoïde de Cantor*[5] *et $\mathsf{Cl}^{\mathsf{mod}}_0(A)$ est dense dans $\mathsf{Cl}^{\mathsf{mod}}(A)$. De plus le sous-groupe Z_0 est dense dans Z et de rang topologique*[6] *au plus $r + s - 1$.*

Démonstration. Par le Théorème **??**, pour prouver que $\mathsf{Cl}^{\mathsf{mod}}(A)$ est de Cantor, il suffit de montrer que c'est le cas de Z. On note d'abord que comme espace topologique Z s'identifie homéomorphiquement avec le sous espace de $\mathsf{I}^{\mathsf{mod}}_{\mathcal{O}_K}(A) \subset 2^{\mathcal{O}_K}$ défini par les fonctions $\chi_{\mathfrak{a}^+_{\mathbf{x}}}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{T}_\gamma$, (voir (**??**)). On commence alors par prouver que Z est parfait. Si $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}} = \mathfrak{a}_{\mathcal{O}_K,\mathbf{x}} \in \mathsf{Z}$ est générique, alors $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}$ est une limite à gauche :

$$\lim_{\mathbf{y}>\mathbf{x}} \mathfrak{a}_{\mathbf{y}} = \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}.$$

En effet, si $\mathbf{y} > \mathbf{x}$, $\mathfrak{a}_{\mathbf{y}} \subset \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}$ et par généricité, tout $\alpha \in \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}$ appartient à $\mathfrak{a}_{\mathbf{y}}$ si $\mathbf{y}$ est assez proche à $\mathbf{x}$, ce qui implique que $\chi_{\mathfrak{a}_{\mathbf{y}}} \to \chi_{\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}}$ dans la topologie faible (de Tychonoff). Inversement, si $\overline{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}}$ est fermé, on a $\mathfrak{a}_{\mathbf{y}} \supset \overline{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}}$ pour tout $\mathbf{y} < \mathbf{x}$ et

$$\lim_{\mathbf{y}<\mathbf{x}} \mathfrak{a}_{\mathbf{y}} = \overline{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}}.$$

Pour $\mathfrak{a}^+_{\mathbf{x}}$ non générique général, on considère $\mathbf{y} \to \mathbf{x}$ tel que $y_i > x_i$ si $+_i = 0$ et $y_i < x_i$ si $+_i = 1$ puis $\lim \mathfrak{a}_{\mathbf{y}} = \mathfrak{a}^+_{\mathbf{x}}$. Le même genre d'argument montre que Z est fermé. L'ensemble Z étant parfait et fermé dans un ensemble de Cantor, il est lui aussi de Cantor. L'ensemble Z_0 est dense parce que l'ensemble des paramètres $\mathbf{x}$ tels que $\pi'(u)^{\mathbf{x}} \in \mathcal{O}_K$ est dense en $K_{\sigma'}$ et d'après ce qui précède on peut trouver une suite d'éléments de Z_0 qui converge vers n'importe quel element de Z. Soient $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{r+s-1} \in \mathbb{T}_\gamma$ tels que

$$\pi'(u)^{\mathbf{x}_i} =: \pi'(\alpha_i) \in \pi'\left(\mathcal{O}_K \setminus (\mathcal{O}_K^\times \cup \mathbb{Q})\right), \quad i = 1, \ldots, r + s - 1,$$

et tels que $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{r+s-1}$ sont indépendants dans le sens qu'il existe un choix de préimages $\tilde{\mathbf{x}}_i$ dans $\mathbb{R}^{r+s-1}$ qui forment une base ; c'est possible, parce que l'ensemble

[5] Un *monoïde de Cantor* est un ensemble de Cantor qui est un monoïde dont le produit est continu.

[6] Le *rang topologique* est le nombre minimal de générateurs d'un sous-monoïde dense.

$\pi'\left(\mathcal{O}_K \setminus (\mathcal{O}_K^\times \cup \mathbb{Q})\right)$ est dense en $K_{\sigma'}$. Observons qu'il n'existe *pas* de combination entière non triviale nulle

$$n_1\mathbf{x}_1 + \cdots + n_{r+s-1}\mathbf{x}_{r+s-1} = 0 \ ;$$

en effet l'existence d'une telle relation impliquerait que $\prod \alpha_i \in \mathcal{O}_K^\times$. De plus, puisque il existe des préimages qui forment une base de $\mathbb{R}^{r+s-1}$, il suit que le groupe $T := \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{r+s-1}\rangle \subset \mathbb{T}_\gamma$ est dense. Soient $\overline{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}_1}, \ldots, \overline{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}_{r+s-1}} \in \mathsf{Z}_0$ les idéaux quasicristallins fermés associés à $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{r+s-1}$. Alors, de la densité du groupe T des paramètres et de l'analyse de la convergence dans Z en termes du paramètre $\mathbf{x}$ il suit que le groupe engendré par les $\overline{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}_i}$ est bien dense dans Z.

□

4. La fonction zêta d'un idéal quasicristallin

Soit $\mathfrak{a} \subset \mathbb{R}$ un idéal quasicristallin de dimension 1 ; lorsque $\mathfrak{a}$ est un idéal modèle nous le distinguerons en utilisant la notation

$$\mathfrak{m} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D) = \mathcal{M}(K_\sigma, K_{\sigma'}, \mathfrak{A}, D) \subset \mathbb{R},$$

où $D = D_{\mathbf{x}}^+(u) \subset K_{\sigma'}$ (voir §§**??**, **??** pour des précisions). La *fonction zêta* associée s'écrit

$$\zeta_{\mathfrak{a}}(s) = \sum_{0<\alpha\in\mathfrak{a}} \alpha^{-s}.$$

Dans cette section nous montrons l'existence d'un prolongement méromorphe de $\zeta_{\mathfrak{a}}$ au plan tout entier. Nous donnons également, lorsque $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ est un idéal quasicristallin modèle, une équation fonctionnelle généralisée pour $\zeta_{\mathfrak{m}}$. En vue de ce dernier objectif on considère plus généralement la situation suivante. Soit $f \in \mathcal{S}(K_{\sigma'})$, l'espace de Schwartz de $K_{\sigma'}$, avec f paire i.e. telle que $f(-x) = f(x)$. On définit les *f-poids* sur $\mathfrak{m}$ (plus bas la dépendance par rapport à f sera omise de la notation) selon

$$\chi(\alpha) = \chi_f(\alpha) := f(\alpha'), \quad \alpha \in \mathfrak{m}, \ \ \alpha' := \pi'(\alpha) \in D.$$

La *fonction* L *quasicristalline* associée à $\mathfrak{m}$ et χ est alors définie par

$$L(\mathfrak{m}, \chi, s) := \sum_{0<\alpha\in\mathfrak{m}} \frac{\chi(\alpha)}{\alpha^s}.$$

Proposition 7. *Soient $\mathfrak{a}$ un idéal quasicristallin de rang 1 et $\mathfrak{m} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D) \subset \mathbb{R}$ un idéal quasicristallin modèle avec poids $\chi = \chi_f$. Les fonctions $\zeta_{\mathfrak{a}}(s)$, $L(\mathfrak{m}, \chi, s)$ convergent uniformément sur tout compact du demi-plan ouvert* $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Note 5. L'argument qui suit s'étend à tout ensemble de Delaunay $X \subset (0, \infty)$, c'est-a-dire que la fonction zêta $\zeta_X(s) := \sum_{x\in X} x^{-s}$ aussi converge uniformément sur tout compact du demi-plan ouvert $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Démonstration. Soient $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ les éléments positifs de $\mathfrak{a}$. Comme celui-ci est uniformément discret, il existe $r > 0$ tel que $B_r(\alpha_n) \cap \mathfrak{a} = \{\alpha_n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En remplaçant $\mathfrak{a}$ par

$$\widetilde{\mathfrak{a}} = r^{-1}\left(\mathfrak{a} - \alpha_1\right) + 1,$$

on obtient un autre quasicristal dont les éléments positifs sont les

$$\widetilde{\alpha}_n := r^{-1}(\alpha_n - \alpha_1) + 1$$

où $\tilde{\alpha}_1 = 1$ et $\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n > 1$ pour tout n. Alors il existe un constante $C > 0$ tel que, pour tout s tel que $\mathrm{Re}(s) \geq \sigma > 1$,

$$|\zeta_{\mathfrak{a}}(s)| \leq C \sum \frac{1}{\tilde{\alpha}_n^{\mathrm{Re}(s)}} \leq C \sum \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}} = C\zeta(\mathrm{Re}(s)).$$

On trouve bien que $\zeta_{\mathfrak{a}}(s)$ converge uniformément sur tout demi-plan de la forme $\mathrm{Re}(s) \geq \sigma > 1$, d'où le résultat. Le cas de $L(\mathfrak{m}, \chi, s)$ est complètement analogue, où l'on utilise $C \cdot \max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |f(\alpha')|$ au lieu de C. □

Note 6. Il faut noter que $\zeta_{\mathfrak{a}}$ n'est pas une *fonction zêta au sens de Beurling.* Voir [**?**] où l'on introduit formellement les multiplicités qui correspondent aux factorisations distinctes d'éléments, pour avoir un produit eulérien. Du fait de l'absence de factorisation unique pour $\mathfrak{m}$, les fonctions zêta et L considerées ici ne s'écrivent pas en général comme produits eulériens.

Proposition 8. *$\zeta_{\mathfrak{a}}(s)$ possède une extension méromorphe (unique) sur tout $\mathbb{C}$, avec un seul pôle simple en $s = 1$.*

Démonstration. On utilise la méthode usuelle de l'intégrale de Riemann-Stieltjes (voir par exemple [**?**], Theorem 1.12). Soit $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ comme dans la démonstration de Proposition **??**. En écrivant $\alpha_0 := 0$, $\alpha_{-m} := -\alpha_m$, $m \in \mathbb{N}$, on définit la $\mathfrak{a}$-*partie entière* comme $[x]_{\mathfrak{a}} := \alpha_m$ si $\alpha_m \leq x \leq \alpha_{m+1}$ et la $\mathfrak{a}$ -*partie fractionnaire* comme $\{x\}_{\mathfrak{a}} := x - [x]_{\mathfrak{a}} \in [0, R]$ où $\mathfrak{a}$ est relativement dense par rapport à $R > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathfrak{a}}(s) = \sum_{0<\alpha\leq x} \alpha^{-s} + \sum_{\alpha>x} \alpha^{-s} &= \sum_{0<\alpha\leq x} \alpha^{-s} + \int_x^\infty u^{-s} d[u]_{\mathfrak{a}} \\
&= \sum_{0<\alpha\leq x} \alpha^{-s} + \int_x^\infty u^{-s} du - \int_x^\infty u^{-s} d\{u\}_{\mathfrak{a}} \\
&= \sum_{0<\alpha\leq x} \alpha^{-s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + \{x\}_{\mathfrak{a}} x^{-s} + \int_x^\infty \{u\}_{\mathfrak{a}} du^{-s} \qquad (8) \\
&= \sum_{0<\alpha\leq x} \alpha^{-s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + \{x\}_{\mathfrak{a}} x^{-s} - s\int_x^\infty \{u\}_{\mathfrak{a}} u^{-s-1} du, \qquad (9)
\end{aligned}$$

où l'égalité (**??**) provient d'une intégration par parties dans l'intégrale de Riemann-Stieltjes (voir Theorem A.3 de [**?**]). La dernière expression (**??**) est méromorphe pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, avec un seul pôle simple en $s = 1$. Ici, on notera que l'intégrale figurant dans (**??**) converge uniformément sur les compacts du demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$ et que l'intégrand est holomorphe, ce qui implique que l'intégrale est également holomorphe sur ce demi-plan. En intégrant par parties de façon répétée, on obtient le prolongement souhaité. □

Note 7. Grâce à la Proposition **??** on peut définir les $\mathfrak{a}$-*nombres de Bernoulli* par

$$B_{\mathfrak{a},n} = \zeta_{\mathfrak{a}}(-n), \quad n \text{ impair}.$$

On suppose maintenant que $\mathfrak{a} = \mathfrak{m} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D) \subset \mathbb{R}$ est un idéal quasicristallin modèle ; le reste de cette section est consacré à la démonstration d'une équation fonctionnelle pour $\zeta_{\mathfrak{m}}$. Pour commencer, il est nécessaire d'introduire un peu de terminologie supplémentaire.

D'après Meyer ([**?**]), l'*idéal quasicristallin modèle dual* de $\mathfrak{m}$ est l'idéal modèle fractionnaire

$$\mathfrak{m}^\vee = \mathcal{M}[\mathfrak{A}^\vee, D^\vee]$$

associé au réseau dual

$$\mathfrak{A}^\vee = \{\alpha \in K |\ \mathrm{Tr}(\alpha\mathfrak{A}) \subset \mathbb{Z}\}$$

et à la fenêtre

$$D^\vee := (\pi/3) \cdot \{\mathbf{x} |\ |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq 1,\ \forall \mathbf{y} \in D\},$$

homothétique du convexe dual de D. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on aura besoin de considérer aussi les idéaux modèles

$$\mathfrak{m}_n^\vee := \mathcal{M}(\mathfrak{A}^\vee, n \cdot D^\vee)$$

de sorte que

$$\mathfrak{m}^\vee = \mathfrak{m}_1^\vee \subset \mathfrak{m}_2^\vee \subset \cdots \quad \text{et} \quad \bigcup \mathfrak{m}_n^\vee = \mathfrak{A}^\vee.$$

Soit maintenant $\delta(x)$ la distribution de Dirac ($\delta(f) = f(0)$ pour une fonction f lisse au voisinage de l'origine) et considérons le *peigne de Dirac*

$$\mu_{\mathfrak{m}}(x) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{m}} \delta(x - \alpha). \tag{10}$$

De plus, soit

$$\mu_{\mathfrak{m},\chi}(x) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{m}} \chi(\alpha)\delta(x - \alpha)$$

le peigne pondéré associé à χ. Le résultat suivant (*formule de Poisson-Meyer*) est formulé dans [**?**] avec référence à [**?**], [**?**] pour les preuves. Pour plus de clarté nous en donnons ci-dessous une démonstration dans notre contexte.

Théorème 3 (Meyer [**?**], §V.7.3)**.** *La transformation de Fourier de* $\mu = \mu_{\mathfrak{m},\chi}$ *au sens des distributions est donnée par le* peigne de Dirac généralisé

$$\mu^\vee(x) = \sum_{\xi \in \mathfrak{A}^\vee} \chi^\vee(\xi)\delta(x - \xi) := \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(x) \tag{11}$$

où

a. *La fonction* $\chi^\vee$ *est définie par*

$$\chi^\vee(\xi) := \frac{2\pi}{\sqrt{|\mathrm{disc}(\mathfrak{A})|}} \cdot f^\vee(\xi'),$$

avec $f^\vee$ *le dual de Fourier de* f *et* $\mathrm{disc}(\mathfrak{A})$ *le discriminant de* $\mathfrak{A}$ *;*

b. *Pour chaque* $n \in \mathbb{N}$, ν_n *est un peigne pondéré*

$$\nu_n(x) = \sum_{\xi \in \Delta\mathfrak{m}_n^\vee} \chi^\vee(\xi)\delta(x - \xi)$$

avec support $\Delta\mathfrak{m}_1^\vee := \mathfrak{m}^\vee$ *quand* $n = 1$ *et*

$$\Delta\mathfrak{m}_n^\vee := \mathfrak{m}_n^\vee - \mathfrak{m}_{n-1}^\vee = \mathcal{M}\left(\mathfrak{A}^\vee, nD^\vee - (n-1)D^\vee\right)$$

pour $n \geq 2$ *;*

c. *La convergence de la deuxième série dans* (**??**) *est très rapide : pour tous* $N \in \mathbb{N}$ *et* $R \in \mathbb{R}_+$

$$\int_{a-R}^{a+R} d|\nu_n|(x) = O(n^{-N}) \quad \textit{quand } n \to \infty, \tag{12}$$

uniformement en a.

Démonstration. Le poids χ se prolonge à tout $\mathcal{O}_K$ en posant $\chi(\alpha) = f(\alpha')$. Alors, pour toute fonction test $g \in \mathcal{S}(K_\sigma)$, on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, d\mu(x) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{m}} f(\alpha') g(\alpha).$$

La fonction définie sur K_∞ par

$$G(x, y) = f(y)g(x)$$

décroît rapidement à l'infini et sa transformée de Fourier $G^\vee(\xi, \eta) = f^\vee(\xi) g^\vee(\eta)$ est également à décroissance rapide à l'infini. Appliquant à G la formule de Poisson classique par rapport au réseau $\mathfrak{A} \subset K_\infty$ on obtient :

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{m}} f(\alpha')g(\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} f(\alpha')g(\alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{\mathrm{disc}(\mathfrak{A})}} \sum_{\xi \in \mathfrak{A}^\vee} f^\vee(\xi')g^\vee(\xi),$$

qui fournit la première égalité dans (**??**). La fonction $f^\vee$ étant aussi de la classe de Schwartz, l'assertion c) est immédiate, sauf l'indépendence par rapport à a. Mais les ensembles modèles $\Delta\mathfrak{m}_n^\vee$, utilisés dans la définition des ν_n, font intervenir des fenêtres du volume

$$\mathrm{Vol}\,(nD^\vee - (n-1)D^\vee) = O(n^{r+s-2}).$$

On peut donc effectuer une partition de $nD^\vee \setminus (n-1)D^\vee$ en n^{r+s-2} parties de volume uniformément borné par une constante indépendante de n. On obtient ainsi pour tout n les partitions

$$\Delta\mathfrak{m}_n = \bigsqcup_{i=1}^{n^{r+s-2}} \Delta\mathfrak{m}_{n,i}, \quad |\nu_n| = \sum_{i=1}^{n^{r+s-2}} |\nu_{n,i}|\ .$$

Les quasicristaux $\Delta\mathfrak{m}_{n,i}$ (voir [**?**], [**?**]) sont uniformément discrets avec une constante $r > 0$ qui ne dépend pas de n, i. Les poids décroissant rapidement à l'infini, on en déduit l'estimation figurant dans (**??**) et que l'on peut choisir la constante, implicite dans (**??**), indépendamment de a. □

Nous nous proposons d'appliquer le Théorème **??** à l'étude des fonctions L associées à $\Delta\mathfrak{m}_n^\vee$ et $\chi^\vee$:

$$L_n^\vee(\mathfrak{m}, \chi, s) := L(\Delta\mathfrak{m}_n^\vee, \chi^\vee, s) = \sum_{0 < \beta \in \Delta\mathfrak{m}_n^\vee} \frac{\chi^\vee(\beta)}{\beta^s}.$$

Proposition 9. *La suite de fonctions* $L_n^\vee(\mathfrak{m}, \chi, s)$ *convergent uniformément vers zéro sur tout compact du demi-plan* $\mathrm{Re}(s) > 1$. *De plus la somme*

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n^\vee(\mathfrak{m}, \chi, s) \tag{13}$$

converge uniformément sur un domaine du même type et définit donc une fonction holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Démonstration. Comme déjà observé dans la preuve du Théorème **??**, les ensembles modèles $\Delta\mathfrak{m}_n^\vee$ sont uniformément discrets avec une constant $r > 0$ indépendante de n. Alors, pour $[c, C] \subset \mathbb{R}$, $c > 1$,

$$|L_n^\vee(\mathfrak{m}, \chi, s)| \leq A \cdot \max_{\beta \in \Delta\mathfrak{m}_n^\vee} |f^\vee(\beta')|, \quad \mathrm{Re}(s) \in [c, C],$$

où A est de nouveau une constante indépendante de n. Ainsi puisque la transformée de Fourier $f^\vee$ de f est dans l'espace de Schwartz, $L_n^\vee(\mathfrak{m}, \chi, s)$ converge uniformément vers 0 sur les compacts pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. À cause de la décroissance rapide de $f^\vee$ à l'infini, la somme (**??**) converge de même. □

Notons

$$L^\vee(\mathfrak{m}, \chi, s) := \sum_{n=1}^{\infty} L_n^\vee(\mathfrak{m}, \chi, s),$$

qu'on appellera *fonction L généralisée.* Les fonctions normalisées

$$\Lambda(\mathfrak{m}, \chi, s), \quad \Lambda_n^\vee(\mathfrak{m}, \chi, s), \quad \Lambda^\vee(\mathfrak{m}, \chi, s)$$

se définissent en multipliant chacune des fonctions $L(\mathfrak{m}, \chi, s)$, $L_n^\vee(\mathfrak{m}, \chi, s)$ et $L^\vee(\mathfrak{m}, \chi, s)$ par le facteur classique $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$.

La *fonction thêta quasicristalline* associée à $\mathfrak{m}$, χ s'écrit

$$\theta_{\mathfrak{m},\chi}(t) := \frac{1}{2}\chi(0) + \sum_{0<\alpha\in\mathfrak{m}} \chi(\alpha) e^{-\pi\alpha^2 t},$$

et les *fonctions thêta duales* de niveaux $n = 1, 2, \ldots$ sont définies par

$$\theta_{\mathfrak{m},\chi,1}^\vee(t) := \frac{1}{2}\chi^\vee(0) + \sum_{0<\beta\in\mathfrak{m}^\vee} \chi^\vee(\beta) e^{-\pi\beta^2 t}$$

pour $n = 1$ et

$$\theta_{\mathfrak{m},\chi,n}^\vee(t) := \sum_{0<\beta\in\Delta\mathfrak{m}_n^\vee} \chi^\vee(\beta) e^{-\pi\beta^2 t}$$

pour $n \geq 2$. Les quasicristaux $\Delta\mathfrak{m}_n^\vee$, étant uniformément discrets avec une constante r que l'on peut choisir indépendamment de n, ils définissent une suite $\{\theta_{\mathfrak{m},\chi,n}^\vee(t)\}$ qui converge uniformément sur tout compact de $(0, \infty)$. Comme la restriction de $\chi^\vee$ à $\Delta\mathfrak{m}_n^\vee$ tend rapidement à zéro, la limite de cette suite est nulle. De la même façon qu'à la Proposition **??**, la somme

$$\theta_{\mathfrak{m},\chi}^\vee(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{\mathfrak{m},\chi,n}^\vee(t)$$

converge et définit une fonction lisse.

Lemme 3. *La fonction*

$$\theta_{\mathfrak{m},\chi}^\vee(t) - \frac{\chi^\vee(0)}{2}$$

est à décroissance rapide à l'infini.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des faits suivants : 1) les $\Delta\mathfrak{m}_n$ sont uniformément discrets de constante $r > 0$ indépendante de n et 2) la fonction $\chi^\vee$ est elle-même à décroissance rapide à l'infini. □

Appliquons maintenant la formule sommatoire distributionnelle de Poisson-Meyer à la fonction

$$f_t(x) := e^{-\pi t x^2}, \quad f_t^\vee = t^{-1/2} f_{t^{-1}}.$$

En utilisant l'identité $T^\vee(f) = T(f^\vee)$, où T est une distribution tempérée, et le fait que f_t est paire, on obtient l'équation fonctionnelle :

$$\theta_{\mathfrak{m},\chi}(t) = \frac{2\pi}{\sqrt{|\mathrm{disc}(\mathfrak{A})|}} t^{-1/2} \theta^\vee_{\mathfrak{m},\chi}(t^{-1}). \tag{14}$$

Théorème 4. *La fonction $\Lambda(\mathfrak{m},\chi,s)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier, avec deux pôles simples en $s=0$ et $s=1$, et des résidus $\chi(0)$ et $2\pi\chi^\vee(0)/\sqrt{|\mathrm{disc}(\mathfrak{A}|}$. De plus, on a l'équation fonctionnelle :*

$$\Lambda(\mathfrak{m},\chi,s) = \frac{2\pi}{\sqrt{|\mathrm{disc}(\mathfrak{A})|}} \Lambda^\vee(\mathfrak{m},\chi,1-s).$$

Démonstration. En suivant la preuve classique, l'équation fonctionnelle (**??**) implique que la transformée de Mellin

$$\mathsf{M}\left(\theta_{\mathfrak{m},\chi} - \frac{1}{2}\chi(0)\right)(s) := \int_0^\infty \left(\theta_{\mathfrak{m},\chi}(t) - \frac{1}{2}\chi(0)\right) t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

converge pour tout s. Si $\mathrm{Re}(s) > 1$ on a

$$\int_0^\infty e^{-\pi t \alpha^2} t^{s/2} \frac{dt}{t} = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\alpha^{-s},$$

ce qui donne

$$\mathsf{M}\left(\theta_{\mathfrak{m},\chi} - \frac{1}{2}\chi(0)\right)(s) = \Lambda(\mathfrak{m},\chi,s).$$

Puis

$$\begin{aligned}
\Lambda(\mathfrak{m},\chi,s) &= \int_0^1 \left[\frac{2\pi}{\mathrm{disc}(\mathfrak{A})}\theta^\vee_{\mathfrak{m},\chi}(t^{-1}) - \frac{\chi(0)}{2}\right] t^{s/2}\frac{dt}{t} + \int_1^\infty \left[\theta_{\mathfrak{m},\chi}(t) - \frac{\chi(0)}{2}\right] t^{s/2}\frac{dt}{t} \\
&= \frac{2\pi}{\mathrm{disc}(\mathfrak{A})} \int_1^\infty \left[\theta^\vee_{\mathfrak{m},\chi}(t) - \frac{\chi^\vee(0)}{2}\right] t^{(1-s)/2}\frac{dt}{t} + \int_1^\infty \left[\theta_{\mathfrak{m},\chi}(t) - \frac{\chi(0)}{2}\right] t^{s/2}\frac{dt}{t} \\
&\quad + \frac{\chi(0)}{s} + \frac{2\pi}{\sqrt{\mathrm{disc}(\mathfrak{A})}} \cdot \frac{\chi^\vee(0)}{s-1}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Il reste à observer que les intégrales apparaissant dans (**??**) sont holomorphes en s sur $\mathbb{C}$ tout entier du fait de la décroissance rapide à l'infini des intégrands (voir le Lemme **??**). L'équation fonctionnelle annoncée est alors conséquence de l'équation pour les fonctions thêta correspondantes. □

Revenons à la fonction zêta, $\zeta_{\mathfrak{m}}(s)$. On aurait envie de prendre $f = f_D$, fonction indicatrice de la fenêtre D, dans la formule sommatoire de Poisson-Meyer. Toutefois celle-ci n'est valable que pour f lisse et f_D ne l'est pas. Néanmoins, on va voir qu'en prenant une suite de fonctions lisses à supports compacts qui converge vers f_D, la limite correspondante du côté droit de (**??**) est uniforme sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$.

Soient donc $\varepsilon \to 0$ et $f_\varepsilon \to f_D$ une suite de fonctions lisses qui convergent uniformément vers f_D et telles que

(1) $\mathrm{supp}(f_\varepsilon) = D_\varepsilon$ est relativement compacte pour tout ε et $D_\varepsilon \to D$ uniformément pour la topologie de Hausdorff.

(2) $f_\varepsilon|_D \equiv 1$ et $|f_\varepsilon(x)| \leq 1$ pour tout x ;
(3) $f_\varepsilon \geq 0$ et $f_\varepsilon(-x) = f_\varepsilon(x)$ pour tout $x \in K_{\{\sigma\}'}$.

Soit $\mathfrak{m}_\varepsilon = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D_\varepsilon) = \mathrm{supp}(\chi_\varepsilon)$. On note d'abord que $\Lambda(\mathfrak{m}_\varepsilon, \chi_\varepsilon, s)$ converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ vers

$$\Lambda(\mathfrak{m}, s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta_{\mathfrak{m}}(s)$$

(qui admet une extension meromorphique à $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ à cause de la Proposition **??**). Cette convergence a lieu parce que :

1. Tout $\alpha \in \mathfrak{m}_\varepsilon \setminus \mathfrak{m}$ satisfait $x_i <_{+_i} |\sigma_i(\alpha)| < x_i + \varepsilon$. Alors (à l'exception de α "limite" e.g. $|\sigma_i(\alpha)| = x_i$ pour tout i), la dernière inégalité implique que pour tout $M > 0$ il existe N tel que $|\alpha| > M$ quand $\varepsilon^{-1} \geq N$;
2. $|\chi_\varepsilon(\alpha)| \leq 1$.

Pour les mêmes raisons on a convergence uniforme sur les compacts des fonctions $\theta_{\mathfrak{m}_\varepsilon,\chi_\varepsilon}(t)$ vers $\theta_{\mathfrak{m}}(t)$, donc convergence des intégrales

$$\int_1^\infty \left[\theta_{\mathfrak{m}_\varepsilon,\chi_\varepsilon}(t) - \frac{\chi(0)}{2}\right] t^{s/2}\frac{dt}{t} \longrightarrow \int_1^\infty \left[\theta_{\mathfrak{m}}(t) - \frac{\chi(0)}{2}\right] t^{s/2}\frac{dt}{t}.$$

Alors, d'après (**??**), les intégrales

$$\frac{2\pi}{\mathrm{disc}(\mathfrak{A})}\int_1^\infty \left[\theta^\vee_{\mathfrak{m}_\varepsilon,\chi_\varepsilon}(t) - \frac{\chi^\vee_\varepsilon(0)}{2}\right] t^{(1-s)/2}\frac{dt}{t} \tag{16}$$

convergent aussi uniformément sur les compacts, toujours pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. En utilisant la symétrie $s \mapsto 1-s$, on déduit que la famille $\{\Lambda^\vee(\mathfrak{m}_\varepsilon, \chi_\varepsilon, s)\}$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$. Notons la limite

$$\Lambda^\vee(\mathfrak{m}, s) := \lim_{\varepsilon\to 0}\Lambda^\vee(\mathfrak{m}_\varepsilon, \chi_\varepsilon, s).$$

On obtient ainsi l'équation fonctionnelle :

Théorème 5. $\Lambda(\mathfrak{m}, s) = \frac{2\pi}{\sqrt{|\mathrm{disc}(\mathfrak{A})|}}\Lambda^\vee(\mathfrak{m}, 1-s)$ *pour tout* $s \in \mathbb{C}$.

Démonstration. D'après le Théorème **??**, on a pour tout $s \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$

$$\Lambda(\mathfrak{m}, s) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Lambda(\mathfrak{m}_\varepsilon, \chi_\varepsilon, s) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\pi}{\sqrt{|\mathrm{disc}(\mathfrak{A})|}}\Lambda^\vee(\mathfrak{m}_\varepsilon, \chi_\varepsilon, 1-s) = \frac{2\pi}{\sqrt{|\mathrm{disc}(\mathfrak{A})|}}\Lambda^\vee(\mathfrak{m}, 1-s).$$

□

5. L'invariant modulaire quantique et un résultat de R. Pink

Nous développons ici la relation, découverte par Richard Pink ([**?**]), entre les quasicristaux et l'invariant modulaire quantique ; voir le Théorème **??** ci-dessous. Cette section, si brève soit-elle, revêt néanmoins une importance centrale, l'observation de Pink ayant en grande partie motivé le présent travail.

Soient $A = A_\sigma \subset \mathbb{R}$ un anneau quasicristallin de rang 1 et $\mathfrak{a} \subset \mathbb{R}$ un idéal quasicristallin fractionnaire de A. En utilisant la fonction zêta $\zeta_{\mathfrak{a}}$ (voir §**??**) on peut définir l'*invariant modulaire quasicristallin*, à savoir

$$j(\mathfrak{a}) := \frac{12^3}{1 - \frac{49}{40}J(\mathfrak{a})}, \quad J(\mathfrak{a}) := \frac{\zeta_{\mathfrak{a}}(6)^2}{\zeta_{\mathfrak{a}}(4)^3}.$$

Il y a évidemment invariance par rapport à la multiplication par les éléments de $K^\times$, par suite de l'égalité $\zeta_{\alpha\mathfrak{a}}(s) = \alpha^{-s}\zeta_{\mathfrak{a}}(s)$, $\alpha \in K^\times$. On obtient ainsi une fonction bien définie

$$j : \mathsf{Cl}^{\mathsf{mod}}(A) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Théorème 6. *L'invariant modulaire quasicristallin j est continu.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la restriction au monoïde $Z \subset \mathsf{Cl}^{\mathsf{mod}}(A)$ est continue. Si $\mathfrak{a}_i \to \mathfrak{a}$, alors $\mathfrak{a}_i$ converge vers $\mathfrak{a}$ dans la topologie de Hausdorff (uniformément sur tout compact) et donc pour tout s fixé, $\zeta_{\mathfrak{a}_i}(s) \to \zeta_{\mathfrak{a}}(s)$. La continuité de j est une conséquence immédiate. □

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $\varepsilon > 0$ on définit

$$\Lambda_\varepsilon(\theta) := \{n \in \mathbb{Z} \mid \|n\theta\| < \varepsilon\}$$

où $\|x\|$ est la distance de x à l'entier le plus proche. On introduit la fonction zêta

$$\zeta_{\theta,\varepsilon}(s) = \sum_{0<n\in\Lambda_\varepsilon(\theta)} n^{-s}$$

qui converge pour $\Re(s) > 1$, en tant qu'une sous-somme de celle qui définit la fonction zêta classique. On définit de plus

$$j_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

pour

$$j_\varepsilon(\theta) := \frac{12}{1 - J_\varepsilon(\theta)}, \quad J_\varepsilon(\theta) := \frac{49}{40}\frac{\zeta_{\theta,\varepsilon}(6)^2}{\zeta_{\theta,\varepsilon}(4)^3}.$$

L'*invariant modulaire quantique* ([**?**]) est la fonction *multivaluée*

$$j^{\mathrm{qt}} : \mathsf{Mod}^{\mathrm{qt}} := \mathbb{R}/\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}) \multimap \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad j^{\mathrm{qt}}(\theta) := \lim_{\varepsilon\to 0} j_\varepsilon(\theta),$$

où la limite est définie comme l'ensemble des points d'adhérence lorsque $\varepsilon \to 0$.

Soit maintenant θ une unité fondamentale quadratique réelle de $K = \mathbb{Q}(\theta)$ avec $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$ l'anneau des entiers. Lors d'une conversation privée ([**?**]), Richard Pink a dégagé la formule suivante pour $j^{\mathrm{qt}}(\theta)$. Revenant au monoïde Z défini dans la formule (**??**) du §**??**, celui-ci s'écrit dans le cas quadratique sous la forme

$$\mathsf{Z} = \bigcup_{x\in[0,1)} \{\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_x^+\} \subset \mathsf{Cl}^{\mathsf{mod}}(A).$$

Théorème 7 (R.Pink)**.** *Soit θ une unité fondamentale quadratique réelle. Alors*

$$j^{\mathsf{qt}}(\theta) = \{j(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a} \in \mathsf{Z}\}.$$

Démonstration. On peut supposer que $\theta > 1$, étant donné que $j^{\mathrm{qt}}(\theta) = j^{\mathrm{qt}}(\pm\theta^{\pm 1})$. Notons $\Lambda_x := \Lambda_{\theta^{-x}}(\theta)$ et $\Delta := \theta - \theta'$. Pour $x \geq 0$ et $n \in \Lambda_x$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $|n\theta + m| < \theta^{-x}$. En particulier, en écrivant $\alpha = n\theta + m$, on a

$$\Lambda_x = \left\{ \frac{\alpha - \alpha'}{\Delta} \,\middle|\, \alpha \in \mathcal{O}_K,\ |\alpha| < \theta^{-x} \right\},$$

où α' est le conjugué de α. D'où

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{\theta^m}\Lambda_{x+m} &= \left\{ \frac{\alpha-\alpha'}{\theta^m} \,\middle|\, \alpha \in \mathcal{O}_K, |\alpha| < \theta^{-x-m} \right\} \\ &\qquad \text{(change de variable } \alpha \rightsquigarrow -\beta'\theta'^m) \\ &= \left\{ \frac{-\beta'\theta'^m + \beta\theta^m}{\theta^m} \,\middle|\, \beta \in \mathcal{O}_K, |\beta'| < \theta^{-x} \right\} \\ &= \left\{ \beta - \frac{\beta'}{(-\theta^2)^m} \,\middle|\, \beta \in \mathcal{O}_K, |\beta'| < \theta^{-x} \right\}.\end{aligned}$$

En particulier

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\Delta}{\theta^m}\Lambda_{x+m} = \mathfrak{a}_x$$

et

$$\lim_{m\to\infty} j_{\theta^{-x-m}}(\theta) = j(\mathfrak{a}_x).$$

On en déduit que

$$\{j(\mathfrak{a}_x) |\, x \in [0,1)\} = \{j(\mathfrak{a}_x) |\, x \geq 0\} \subset j^{\mathrm{qt}}(\theta)$$

où la première égalité est conséquence de l'identité $\mathfrak{a}_{x+1} = \theta\mathfrak{a}_x$ et de l'invariance de $j(\mathfrak{a})$ par rapport à $\mathfrak{a} \mapsto \lambda\mathfrak{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc tout point d'adhérence de $j_\varepsilon(\theta)$ l'est aussi des $j(\mathfrak{a}_x)$, ce qui fournit le résultat. □

Corollaire 1. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ une unité fondamentale quadratique. Alors $j^{\mathrm{qt}}(\theta)$ est l'image continue d'un ensemble de Cantor.*

Note 8. Pour démontrer que $j^{\mathrm{qt}}(\theta)$ est de Cantor, il serait suffisant établir que j est *injective*, proprieté qui est conjecturée.

Note 9. Le Théorème de Pink constitue l'analogue exact du Theorem 4 de [**?**]. Plus précisément (pour la notation voir au §**??** ci-dessus) soit $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(f)$ où f est une unité fondamentale. Si l'on note

$$\mathbf{j}^{\mathrm{qt}} : \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})\backslash\mathbf{R} \multimap \mathbf{R} \cup \{\infty\}$$

l'invariant modulaire quantique en caractéristique positive associé au corps de fonctions $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_\infty$ ([**?**], [**?**]), on a

$$\mathbf{j}^{\mathrm{qt}}(f) = \{j(\mathfrak{a}) |\, \mathfrak{a} \in \mathsf{Z}\}$$

où maintenant $\mathsf{Z} = \{\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_{d-1}\} \cong \mathrm{Gal}(\mathbf{H}_{\mathbf{A}_{\infty_1}}/\mathbf{H}_{\mathbf{O_K}})$ est le sous groupe de $\mathsf{Cl}_{\mathbf{A}_{\infty_1}}$ décrit au §**??**.

6. Le solénoïde associé à un quasicristal

D'après la Note **??** ci-dessus les quasicristaux dans le Théorème **??** jouent le même rôle que les idéaux $\mathfrak{a} \subset A_{\sigma_1}$, et donc les quasicristaux de rang 1 devraient fournir un analogue des modules de Drinfeld en caractéristique nulle. Dans cette section on développe l'analogue de la notion *analytique* de module de Drinfeld, c'est-à-dire l'analogue du module quotient $\mathbf{R}/\mathfrak{a}$.

L'ensemble des quasicristaux de $\mathbb{R}^n$ est muni d'une topologie de la manière suivante : à un quasicristal $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on associe la mesure de Radon μ_Ω qui est le peigne de Dirac de Ω (voir la formule (**??**)) et on met la topologie faible sur l'espace des mesures μ_Ω. Si on fixe Ω, on note la clôture

$$\hat{\mathbb{S}}_\Omega := \overline{\{v + \Omega\}}_{v\in\mathbb{R}^n}$$

(voir par exemple [**?**]). De manière équivalente $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ peut être défini en utilisant le pavage de Voronoï P_Ω associé à Ω, où maintenant $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ est la clôture de l'ensemble $\{v + P_\Omega\}_{v\in\mathbb{R}^n}$ des translatés de P_Ω. Dans [**?**] les auteurs montrent que $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ est homéomorphe à la limite inverse d'un système de varietés ramifiées plates ("branched flat manifolds") de dimension n. Si Ω est un réseau, $\hat{\mathbb{S}}_\Omega \approx \mathbb{R}^n/\Omega$ et on retrouve la notion classique de tore quotient. Un point de $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ est répresenté par un pavage construit avec les mêmes mailles que Ω et qui possède des sous-pavages arbitrairement grands qui coïncident à translation près avec des sous-pavages de Ω.

Proposition 10. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un quasicristal. Alors $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ est un solénoïde compact de dimension n. Si $\Omega = \mathcal{M}$ est un ensemble modèle générique, $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ est minimal.*

Démonstration. $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ est un solénoïde comme limite inverse de varietés ramifiées de dimension n. Puisque Ω est de Delaunay, $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ est compact. Enfin si Ω est générique, il est répétitif, ce qui implique que $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ est minimal (voir par exemple [**?**]). □

Il est instructif de rappeler le cas du solénoïde classique

$$\hat{\mathbb{S}}^1 = \varprojlim \mathbb{S}^1,$$

où la limite est définie par rapport à tous les épimorphismes de $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ vers lui-même. Le complété profini $\hat{\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Z}$ s'identifie au noyau de l'épimorphisme $\hat{\mathbb{S}}^1 \to \mathbb{S}^1$; de plus $\hat{\mathbb{S}}^1/\hat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{S}^1$ définit un sous-groupe de $\hat{\mathbb{S}}^1$ qui est une transversale canonique. De manière équivalente $\hat{\mathbb{Z}} = \overline{\mathbb{Z}}$ est la clôture topologique de $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \hat{\mathbb{S}}^1$, où le plongement $\mathbb{R} \hookrightarrow \hat{\mathbb{S}}^1$ est induit par $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$.

Un épimorphisme $\rho : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ induit un *homéomorphisme* $\hat{\rho} : \hat{\mathbb{S}}^1 \to \hat{\mathbb{S}}^1$, de la même manière que ρ induit un homéomorphisme $\tilde{\rho} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ du revêtement universel $\mathbb{R}$ de $\mathbb{S}^1$. Mais si l'on considère plutôt comme objet principal la paire $(\hat{\mathbb{S}}^1, \hat{\mathbb{Z}})$, alors $\hat{\rho}$ est un morphisme de telles paires, $\hat{\rho}(\hat{\mathbb{Z}}) \subset \hat{\mathbb{Z}}$, et

$$\hat{\rho}^{-1}(\hat{\mathbb{Z}}) = \bigsqcup_{i=1}^{\deg(\rho)} (r_i + \hat{\mathbb{Z}}).$$

On peut ainsi considérer $\hat{\rho}$ comme un *revêtement de paires* de degré égal à $\deg(\rho)$. Intuitivement, on peut voir $\hat{\mathbb{Z}}$ comme un élargissement de l'élément neutre du cercle $\mathbb{S}^1$ et, en conservant la transversale $\hat{\mathbb{Z}}$, on récupère les propriétés de $\mathbb{S}^1$ en travaillant avec la paire $(\hat{\mathbb{S}}^1, \hat{\mathbb{Z}})$.

Revenant au solénoïde $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$, le rôle de $\hat{\mathbb{Z}}$ est joué par l'ensemble

$$\hat{\Omega} = \overline{\{\omega + \Omega\}}_{\omega\in\Omega} \subset \hat{\mathbb{S}}_\Omega,$$

transversale complète[7] passant par 0, la *complétée pro-quasicristalline* de Ω. Si Ω est un réseau $\hat{\Omega} = \{0\}$; on peut donc voir en général $\hat{\Omega}$ comme un élargissement de l'élément neutre. Par contre, si l'on identifie deux points de $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ qui appartiennent à la même $\hat{\Omega}$-transversale, i.e. $x \sim y$ si et seulement si $x, y \in z + \hat{\Omega}$, on obtient le *quotient transversal topologique* défini par $\hat{\Omega}$, qui est en général une varieté ramifiée plate. Nous adopterons dans la suite une position intermédiaire, considèrant parfois des notions comme "fonction" ou "torsion" modulo $\hat{\Omega}$, mais sans identifier ce dernier

[7]Une *transversale* (*complète*) d'une lamination $\mathcal{L}$ est un sous-ensemble $T \subset \mathcal{L}$ tel que $T \cap L$ est discret (non vide) pour la topologie de L, pour toute feuille $L \subset \mathcal{L}$.

ensemble à un point. Autrement dit on regardera $\hat{\Omega}$ comme la *transversale neutre* en développant une théorie qui n'oublie pas ce fait en passant au quotient.

Considérons maintenant l'analogue d'une isogénie entre deux solénoïdes quasicristallins. On dit que deux quasicristaux $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ sont *équivalents* ([**?**], [**?**]) s'il existe un couple d'ensembles finis $F, F' \subset \mathbb{R}^n$ telle que

$$\Omega \subset \Omega' + F' \quad \text{et} \quad \Omega' \subset \Omega + F.$$

Exemple 5. i) Si Ω, Ω' sont deux réseaux isogènes alors Ω, Ω' sont équivalents ; cette relation d'équivalence est donc une généralisation de la relation d'isogénie.

ii) Si $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ sont deux ensembles modèles définis par rapport au même réseau $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+k}$, alors Ω, Ω' sont toujours équivalents ([**?**]).

On rappelle qu'un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est *apériodique* si le groupe de ses périodes

$$\mathrm{Per}(X) := \{v \in \mathbb{R}^n |\ v + X = X\}$$

est réduit à $\{0\}$. Si un quasicristal $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est apériodique, on appelle

$$L_\Omega := \mathbb{R}^n + \Omega \subset \hat{\mathbb{S}}_\Omega$$

la *feuille canonique* ; elle est clairement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ et dense dans $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$.

Théorème 8. *Soient*

$$\Omega \subset \Omega' \subset \mathbb{R}^n$$

deux quasicristaux modèles définis par le même réseau. Alors, la correspondence $x + \Omega \mapsto x + \Omega'$, $x \in \mathbb{R}^n$, *définit un morphisme de paires* (revêtement) *canonique*

$$\rho : (\hat{\mathbb{S}}_\Omega, \hat{\Omega}) \longrightarrow (\hat{\mathbb{S}}_{\Omega'}, \hat{\Omega}')$$

qui est surjectif. Plus précisément, $\rho : \hat{\mathbb{S}}_\Omega \to \hat{\mathbb{S}}_{\Omega'}$ *est un homéomorphisme local surjectif de solénoïdes telle que* $\rho(\hat{\Omega}) \subset \hat{\Omega}'$ *et*

$$\rho^{-1}(\hat{\Omega}') \subset \bigcup_{i=1}^{d} (x_i + \hat{\Omega}), \quad x_i \in \mathbb{R}^n, \tag{17}$$

où l'union n'est pas forcément disjointe. Si Ω, Ω' *sont tous les deux apériodiques,* $\rho : \hat{\mathbb{S}}_\Omega \to \hat{\mathbb{S}}_{\Omega'}$ *est un homéomorphisme.*

Démonstration. D'après l'Exemple **??**, ii), il existe F fini tel que $\Omega' \subset \Omega + F$. Si la suite $x_i + \Omega$ converge dans $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$, $x_i + \Omega + F$ converge aussi dans $\hat{\mathbb{S}}_{\Omega+F}$, ce qui implique que $x_i + \Omega' \subset x_i + \Omega + F$ converge dans $\hat{\mathbb{S}}_{\Omega'}$. Donc ρ est continue. Inversement, supposant que $x_i + \Omega'$ converge dans $\hat{\mathbb{S}}_{\Omega'}$, le même argument montre que $x_i + \Omega \subset x_i + \Omega'$ converge dans $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$, ce qui signifie que ρ est surjective. Montrons que de plus $\rho|_{\hat{\Omega}}$ est injective. Supposons au contraire que $\hat{\gamma} = \lim \gamma_i + \Omega \neq \hat{\eta} = \lim \eta_i + \Omega$ sont des points distincts de $\hat{\Omega}$ tels que $\rho(\hat{\gamma}) = \rho(\hat{\eta})$. On observe alors que, par définition de la topologie, la limite $\hat{\gamma} = \lim \gamma_i + \Omega$ existe si γ_i' est de Cauchy et $\hat{\gamma} \neq \hat{\eta}$ si et seulement si $(\gamma_i - \eta_i)' \not\to 0$. La même chose est vraie en échangeant Ω et Ω', d'où il suit que $\rho(\hat{\gamma}) = \lim \gamma_i + \Omega' \neq \lim \eta_i + \Omega' = \rho(\hat{\eta})$, contradiction. Comme Ω, Ω' sont relativement denses l'injectivité de ρ en $\hat{\Omega}$ se prolonge à un voisinage feuilleté et ρ est donc bijective et bicontinue dans un voisinage de 0. On montre de même l'injectivité sur chaque transversale $x + \hat{\Omega}$, ce qui prouve que ρ est un homéomorphisme local. La préimage $\rho^{-1}(\hat{\Omega}')$ est égale à la clôture de

$$\bigcup_{x \in \Omega'} (x + \Omega) \subset \bigcup_{y \in \Omega,\ f \in F} (y + f + \Omega) \subset \bigcup_{f \in F} (f + \hat{\Omega}),$$

qui fournit bien (**??**).

Enfin si Ω, Ω' sont apériodiques, ρ induit un homéomorphisme $L_\Omega \approx L_{\Omega'}$ des feuilles canoniques denses ce qui, joint au fait que ρ est un homéomorphisme local, implique qu'il s'agit bien d'un homéomorphisme. □

La proprieté d'être un presque réseau implique que

$$\Sigma^n\Omega := \Omega + \cdots + \Omega \quad (n \text{ fois})$$

est aussi un quasicristal (et un idéal quasicristallin dans le cas où Ω en est un). De plus, $\Sigma^n\Omega$ est équivalent à Ω. Le Théorème **??** implique qu'il existe une surjection continue

$$+ : (\hat{\mathbb{S}}_\Omega, \hat{\Omega}) \times (\hat{\mathbb{S}}_\Omega, \hat{\Omega}) \longrightarrow (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^2\Omega}, \Sigma^2\hat{\Omega}), \quad (x+\Omega, y+\Omega) \longmapsto x+y+\Sigma^2\Omega,$$

où l'on a identifié $\Sigma^n\hat{\Omega} = \widehat{\Sigma^n\Omega}$. En général, pour $\vec{m} \in \mathbb{N}^k$ où $m_1 + \cdots + m_k = n$, il y a une application

$$+ = +_{\vec{m},n} : (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_1}\Omega}, \Sigma^{m_1}\hat{\Omega}) \times \cdots \times (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_k}\Omega}, \Sigma^{m_k}\hat{\Omega}) \longrightarrow (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\Omega}, \Sigma^n\hat{\Omega}), \tag{18}$$

induite par

$$(x_1+\Omega, \ldots, x_k+\Omega) \longmapsto x_1 + \cdots + x_k + \Sigma^n\Omega.$$

Si l'on note $+_3 = +_{\vec{1},3}$, $\vec{1} = (1,1,1)$, l'égalité des compositions

$$+_3(x+\Omega, y+\Omega, z+\Omega) = +(+(x+\Omega, y+\Omega), z+\Omega) = +(x+\Omega, +(y+\Omega, z+\Omega)),$$

ainsi que des version plus générales nous donnent l'analogue de la loi de l'associativité. On peut donc considérer $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ comme une généralisation de la notion de tore, ou mieux la collection de solenoïdes

$$\{(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\Omega}, \Sigma^n\hat{\Omega})\}_{n\geq 1},$$

munie des applications (**??**).

Pour prouver la continuité de la somme, il faut disposer du résultat suivant :

Théorème 9. *Soit Ω un ensemble modèle de fenêtre D. Alors la correspondance*

$$\alpha \in \Omega \longmapsto \alpha' \in D \tag{19}$$

induit une application continue et surjective

$$\hat{\Omega} \twoheadrightarrow \overline{D}.$$

Démonstration. C'est essentiellement une conéquence de la Proposition 4.3 de [**?**], qui affirme la continuité de l'application canonique

$$\beta : \left(\hat{\mathbb{S}}_\Omega, \hat{\Omega}\right) \longrightarrow \left(\mathcal{F}_\Omega, \overline{D}\right)$$

où $\mathcal{F}_\Omega$ est une feuilletage de Kronecker qui paramétrise les ensembles modèles "basés" sur Ω et où $\overline{D}$ apparaît comme transversale canonique. L'application β restreinte à $\Omega \subset \hat{\Omega}$, coïncide avec la conjugaison (**??**). On se reportera à l'Appendice pour un argument plus détaillé. □

Théorème 10. *Soit Ω un ensemble modèle. Alors la somme $+_{\vec{m},n}$, définie en* (**??**)*, est continue.*

Démonstration. On considère d'abord la preuve dans le cas particulier où

- Ω est un quasicristal modèle de dimension 1, défini par la fenêtre $D \subset \mathbb{R}$;
- $\vec{m} = (1,1)$, $n = 2$.

Il suffit de montrer que la somme est transversalement continue, autrement dit que l'application canonique $\Omega \times \Omega \xrightarrow{+} \Sigma\Omega$ s'étend en une application continue

$$\hat{\Omega} \times \hat{\Omega} \xrightarrow{+} \Sigma\hat{\Omega}.$$

Soient $\{\alpha_i + \Omega\}$, $\{\beta_i + \Omega\}$ des suites dans Ω qui convergent vers deux points de $\hat{\Omega}$. Il faut démontrer que

$$\{\omega_i + \Sigma\Omega\} := \{\alpha_i + \beta_i + \Sigma\Omega\} \tag{20}$$

D'après le Théorème **??**, la suite des conjugués $\{\omega'_i\}$ est convergente vers $w \in \overline{\Sigma D}$, où ΣD est la fenêtre de $\Sigma\Omega$. Les fenêtres $\omega'_i + \Sigma D$ associés aux quasicristaux modèles $\omega_i + \Sigma\Omega$ convergent donc. On peut supposer sans perte de généralité que $\Sigma D = [-a, a]$.

Supposons alors que la suite (**??**) ne converge pas dans la topologie quasicristalline. Si pour $R > 0$ on note

$$(\omega_i + \Sigma\Omega)_R := (\omega_i + \Sigma\Omega) \cap [-R, R],$$

cela signifie qu'il existe $R > 0$ tel que pour chaque $N \in \mathbb{N}$, ils existent $i_N, j_N > N$ et $\omega_{j_N} + \beta_{j_N} \in (\omega_{j_N} + \Sigma\Omega)_R$ avec $\omega_{j_N} + \beta_{j_N} \notin (\omega_{i_N} + \Sigma\Omega)_R$.

Puisque $\Sigma\Omega$ est aussi un quasicristal, il existe $F \subset \mathbb{R}$ fini tel que $\Sigma\Omega + \Sigma\Omega \subset \Sigma\Omega + F$. Donc, en passant à une sous-suite, il existe $f \in F$ avec

$$\omega_{j_N} + \beta_{j_N} = \gamma_{j_N} + f \in \Sigma\Omega + \Sigma\Omega \subset \Sigma\Omega + F.$$

$\Sigma\Omega$ étant uniformémente discret, il n'y a qu'un nombre fini de $\gamma_{j_N} \in \Sigma\Omega$ possibles avec $\gamma_{j_N} + f \in [-R, R]$. En extrayant de nouveau une sous-suite on peut supposer la suite des γ_{j_N} constante. Autrement dit il existe $\gamma \in \Sigma\Omega$ telle que la suite de contre-exemples à la continuité est égale le constante $\gamma + f$:

$$\omega_{j_N} + \beta_{j_N} = \gamma + f.$$

Enfin, après passage à une sous-suite, on peut supposer que la suite des conjugués $\{\omega_{i_N}\}$ converge de manière monotone, disons croissante : $\omega'_{i_N} \nearrow w$.

Il en résulte la situation suivante : pour chaque N, d'une part

$$\omega'_{j_N} - a \leq \gamma' + f' \leq \omega'_{j_N} + a$$

et de l'autre

$$\omega'_{i_N} - a \not\leq \gamma' + f' \quad \text{ou bien} \quad \gamma' + f' \not\leq \omega'_{i_N} + a. \tag{21}$$

En passant de nouveau à une sous-suite, on peut supposer dans (**??**) que l'une ou l'autre condition est satisfaite pour tout N : supposons d'abord que

$$\omega'_{i_N} + a < \gamma' + f' \leq \omega'_{j_N} + a. \tag{22}$$

Pour $M > j_N$, nous avons $i_M > j_N$, donc $\omega'_{i_M} \geq \omega'_{j_N}$ (par la monotonie de la suite de conjugués), qui implique que $\gamma' + f' \leq \omega'_{j_N} + a \leq \omega'_{i_M} + a$, contredisant (**??**). Supposons à présent satisfaite la première inégalité dans (**??**), qui fournit

$$\omega'_{j_N} - a \leq \gamma' + f' < \omega'_{i_N} - a. \tag{23}$$

Mais alors si M est tel que $\omega'_{j_M} > \omega'_{i_N}$, (**??**) est contredite.

De tout ceci on conclut que la suite (**??**) converge et que la somme s'étend en une application continue de $\hat{\Omega} \times \hat{\Omega}$. La preuve pour $+_{\vec{m},n}$ général se fait par récurrence. Dans le cas d'un quasicristal de dimension > 1 et fenêtre $\subset \mathbb{R}^k$, l'argument est

identique, supposant sans perte de géneralité que D est un cube et en imposant une condition de monotonie selon chaque coordonnée. $\square$

Étant donnée une suite d'applications de paires

$$f_n : (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\Omega}, \Sigma^n\hat{\Omega}) \longrightarrow (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\Omega}, \Sigma^n\hat{\Omega})$$

on dira qu'elle définit un *endomorphism quasicristallin* si on a des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_1}\Omega} \times \cdots \times \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_k}\Omega} \arrow[r, "f_{m_1}\times\cdots\times f_{m_k}"] \arrow[d, "+_{\vec{m},n}"'] & \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_1}\Omega} \times \cdots \times \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_k}\Omega} \arrow[d, "+_{\vec{m},n}"] \\ \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\Omega} \arrow[r, "f_n"'] & \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\Omega}, \end{tikzcd} \tag{24}$$

pour $m_1 + \cdots + m_k = n$. Un endomorphisme quasicristallin inversible est un *isomorphisme quasicristallin.* On notera

$$\mathrm{End}(\hat{\mathbb{S}}_\Omega, \hat{\Omega})$$

le monoïde multiplicatif des endomorphismes, le produit étant défini par la composition. Les opérations de somme induisent des opérations correspondantes sur les endomorphismes ; ainsi on a une opération

$$\mathrm{End}(\hat{\mathbb{S}}_\Omega, \hat{\Omega}) \times \mathrm{End}(\hat{\mathbb{S}}_\Omega, \hat{\Omega}) \xrightarrow{+} \mathrm{End}(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma\Omega}, \Sigma\hat{\Omega})$$

definie par

$$f_n, g_n \longmapsto f_n + g_n : \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n(\Sigma\Omega)} \longrightarrow \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n(\Sigma\Omega)}.$$

Autrement dit la collection

$$\{\mathrm{End}(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\Omega}, \Sigma^n\hat{\Omega})\}$$

possède la structure d'un *presque anneau* c'est-à-dire une collection de monoïdes (pour un certain produit) avec des applications commutatives

$$\mathrm{End}(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_1}\Omega}, \Sigma^{m_1}\hat{\Omega}) \times \cdots \times \mathrm{End}(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_k}\Omega}, \Sigma^{m_k}\hat{\Omega}) \xrightarrow{+} \mathrm{End}(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\Omega}, \Sigma^n\hat{\Omega}),$$

où $m_1 + \cdots + m_k = n$; ces opérations sont distributives par rapport au produit.

Note 10. Par opposition au cas des réseaux, il n'est pas nécessairement vrai que $N \in \mathbb{Z}$ définit un élément de $\mathrm{End}(\hat{\mathbb{S}}_\Omega)$. On a seulement le "quasiendomorphisme" :

$$N : \hat{\mathbb{S}}_\Omega \longrightarrow \hat{\mathbb{S}}_{N\Omega}, \quad x + \Omega \longmapsto Nx + N\Omega$$

où $N\Omega := \{Nx |\ x \in \Omega\} \subset \Sigma^N\Omega$.

Considérons le cas de $\mathfrak{a} \subset K \subset \mathbb{R}$ un idéal quasicristallin modèle par rapport à l'anneau quasicristallin $A = A_\sigma$ de rang 1. La proposition suivante identifie les sommes quasicristallines d'un tel idéal quasicristallin modèle.

Proposition 11. *Soit* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{r+s-1}$, $u \in \mathcal{O}_K^\times$, $\mathfrak{a}_\mathbf{x} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{A},\mathbf{x}}(u)$. *Alors*

$$\Sigma^n\mathfrak{a}_\mathbf{x} = \mathfrak{a}_\mathbf{y}, \quad \textit{où} \quad \mathbf{y} = -\log_{|\pi'(u)|} n + \mathbf{x}.$$

En général, $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}_1} + \mathfrak{a}_{\mathbf{x}_2} = \mathfrak{a}_\mathbf{y}$, *où* $\mathbf{y} = -\log_{\pi'(u)}(\pi'(u)^{\mathbf{x}_1} + \pi'(u)^{\mathbf{x}_2})$.

Démonstration. On donne la preuve dans le cas de $K/\mathbb{Q}$ quadratique réelle ; le cas général est tout à fait analogue. Par définition, $\mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_x \subset \mathfrak{a}_{-\log_{\pi'(u)} 2+x}$. Soit alors $\gamma \in \mathfrak{a}_{x-\log_\theta 2}$; on peut supposer que $\gamma' > 0$ sans perte de généralité. On a donc $\gamma' < 2\theta^{-x}$. Soit $\alpha \in \mathfrak{a}_x$ tel que $\alpha' > 0$ et soit $\beta = \gamma - \alpha$ avec $0 < \beta'$. On peut choisir α tel que $\beta' < \theta^{-x}$, parce que l'ensemble de α', $\alpha \in \mathfrak{a}_x$, est dense dans la fenêtre D_x. Alors $\gamma = \alpha + \beta \in \mathfrak{a} + \mathfrak{a}$. □

La pertinence de la Proposition **??** tient à ce que si l'on suppose l'injectivité (encore conjecturale) de l'invariant modulaire j dans $\mathsf{Cl}^{\mathrm{mod}}(A)$, alors $j(\mathfrak{a}) \neq j(\Sigma^n\mathfrak{a})$ pour tout $n \neq 1$. Ceci implique que la structure que l'on développe ici en partant des collections de sommes de solenoïdes $\{(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\mathfrak{a}}\, \Sigma^n\hat{\mathfrak{a}})\}$ (ou de manière équivalente les sommes $\{\Sigma^n\mathfrak{a}\}$), cette structure ne produit pas un, mais un ensemble d'invariants modulaires, tout comme l'invariant modulaire quantique de la Section **??**.

Notons maintenant qu'il existe une action de A sur $(\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a}, \hat{\mathfrak{a}})$ donnée par

$$\alpha : (\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a}, \hat{\mathfrak{a}}) \longrightarrow (\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a}, \hat{\mathfrak{a}}), \quad x + \mathfrak{a} \longmapsto \alpha x + \alpha\mathfrak{a} \longmapsto \alpha x + \mathfrak{a}$$

où l'on utilise l'inclusion $\alpha\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ pour définir la deuxième application [8]. Cette action s'étend à tous les $\Sigma^n\mathfrak{a}$ et on a le carré commutatif suivant :

(25)

$$\begin{tikzcd}
(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_1}\mathfrak{a}}, \Sigma^{m_1}\hat{\mathfrak{a}}) \times \cdots \times (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_k}\mathfrak{a}}, \Sigma^{m_k}\hat{\mathfrak{a}}) \arrow[r, "\alpha\times\cdots\times\alpha"] \arrow[d, "+"'] & (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_1}\mathfrak{a}}, \Sigma^{m_1}\hat{\mathfrak{a}}) \times \cdots \times (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_k}\mathfrak{a}}, \Sigma^{m_k}\hat{\mathfrak{a}}) \arrow[d, "+"] \\
(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\mathfrak{a}}, \Sigma^n\hat{\mathfrak{a}}) \arrow[r, "\alpha"'] & (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\mathfrak{a}}, \Sigma^n\hat{\mathfrak{a}}).
\end{tikzcd}$$

Autrement dit chaque $\alpha \in A$ définit un élément de $\mathrm{End}(\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a})$, d'où l'on tire une injection $A \hookrightarrow \mathrm{End}(\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a})$ de presque anneaux. De plus pour tout $f = \{f_n\} \in \mathrm{End}(\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a})$, les restrictions de f_n à la feuille canonique $L_{\Sigma^n\mathfrak{a}} \approx \mathbb{R} \subset \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\mathfrak{a}}$ définissent des endomorphismes de $\mathbb{R}$ et c'est ainsi que l'on peut identifier $A \subset \mathrm{End}(\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a}) \subset \mathbb{R}$. Cependant pour que $r \in \mathbb{R}$ représente une telle restriction on doit avoir $r\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$, qui implique que $r \in \mathcal{O}_K$. Mais ce sont précisement les éléments de $A \subset \mathcal{O}_K$ qui préservent $\mathfrak{a}$ (à cause de sa propriété caractéristique $|\gamma'| \leq 1$). Nous avons ainsi démontré le

Théorème 11. $\mathrm{End}(\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a}, \hat{\mathfrak{a}}) = A$.

Par analogie avec la théorie classique des courbes elliptiques on dira que $\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a}$ est à *multiplication quasicristalline* par rapport à A et que $\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a}$ est un *A-module quasicristallin.*

Si $\mathfrak{m} \subset A$ est un idéal quasicristallin entier, on dit que $x \in \hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a}$ est un point de $\mathfrak{m}$-*torsion* si pour tout $\alpha \in \mathfrak{m}$

$$\alpha x \in \hat{\mathfrak{a}}.$$

On note $(\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a}, \hat{\mathfrak{a}})[\mathfrak{m}]$ l'ensemble des points de $\mathfrak{m}$-torsion.

Remarquons que pour $\mathfrak{m} = A$, on a $(\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a}, \hat{\mathfrak{a}})[A] = \hat{\mathfrak{a}}$; c'est l'analogue du fait que, pour un tore $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Lambda$ à multiplication complexe par rapport à l'anneau de entiers $\mathcal{O}_K$, l'ensemble $\mathbb{T}[\mathcal{O}_K]$ des points de $\mathcal{O}_K$-torsion est réduit à $\{0\}$.

[8] Ici il faut remarquer que pour $\alpha \neq 0$, $\alpha\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}$ sont équivalents : dans le cas où $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x$, ceci est conséquence du fait que *tous* les ensembles modèles définis à l'aide d'un même réseau sont équivalents (voir [**?**], [**?**]).

La torsion est clairement compatible avec la somme, induisant une application

$$+ : (\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}, \hat{\mathfrak{a}})[\mathfrak{m}] \times (\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}, \hat{\mathfrak{a}})[\mathfrak{m}] \longrightarrow (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma\mathfrak{a}}, \Sigma\hat{\mathfrak{a}})[\mathfrak{m}]$$

qui est distributive par rapport à l'action de A. Autrement dit la collection des paires $\{(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\mathfrak{a}}, \Sigma^n\hat{\mathfrak{a}})[\mathfrak{m}]\}_{n\geq 1}$ constitue un *presque A-module* : pour chaque partition $m_1 + \cdots + m_k = n$ on a l'operation

$$(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_1}\mathfrak{a}}, \Sigma^{m_1}\hat{\mathfrak{a}})[\mathfrak{m}] \times \cdots \times (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_k}\mathfrak{a}}, \Sigma^{m_k}\hat{\mathfrak{a}})[\mathfrak{m}]) \xrightarrow{+} (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\mathfrak{a}}, \Sigma^n\hat{\mathfrak{a}})[\mathfrak{m}],$$

qui est distributive par rapport à l'action multiplicative de A.

Nous terminerons avec la discussion de constructions associées au solénoïde d'un quasicristal, lesquelles constituent une tentative de complétion dudit solénoïde par rapport à la somme. Ces constructions sont motivées par l'envie de pouvoir travailler avec de "vrais" anneaux ou idéaux, par exemple l'anneau $\langle A\rangle$ ou l'idéal $\langle\mathfrak{a}\rangle$ engendré par l'anneau quasicristallin A ou un A-idéal $\mathfrak{a}$: malheureusement, comme nous l'avons vu, ils sont tous deux égaux à l'anneau $\mathcal{O}_K$ lui-même, le problème étant que ce dernier anneau n'est pas suffisamment grand pour distinguer les anneaux engendrés par A et les $\mathfrak{a}$.

La première construction est la plus évidente : il s'agit de prendre la limite du système direct des *projections* entre les solénoïdes sommes :

$$\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} := \varinjlim \left(\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} \to \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^2\mathfrak{a}} \to \cdots\right).$$

D'après la Proposition **??**,

$$\bigcup \Sigma^n\mathfrak{a} = \mathcal{O}_K, \tag{26}$$

et donc la limite des transversales

$$\check{\mathfrak{a}} := \varinjlim \Sigma^n\hat{\mathfrak{a}}$$

contient l'image de $\mathcal{O}_K \subset \mathbb{R} \approx L_{\mathfrak{a}} \subset \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ dans $\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$, où $L_{\mathfrak{a}}$ est la feuille canonique. En particulier, $\check{\mathfrak{a}} \subset \check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ est dense ; cependant $\check{\mathfrak{a}} \neq \check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ parce que l'image $L_{\check{\mathfrak{a}}}$ de $L_{\mathfrak{a}}$ en $\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ satisfait $L_{\check{\mathfrak{a}}} \cap \check{\mathfrak{a}} = \mathcal{O}_K$. En particulier $\check{\mathfrak{a}}$ ne définit pas un solénoïde transverse. Néanmoins on considèrera la paire $(\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}, \check{\mathfrak{a}})$ comme un cas limite ou singulier.

Théorème 12. $(\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}, \check{\mathfrak{a}})$ *est une paire de $\mathcal{O}_K$-modules. Le quotient $\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}/\check{\mathfrak{a}}$ est isomorphe au tore quantique $\mathbb{T}(\theta) := \mathbb{R}/\mathcal{O}_K$, où $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$.*

Démonstration. Il est clair que $\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ est un groupe : si $x \in \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^m\mathfrak{a}}, y \in \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\mathfrak{a}}$, $m \leq n$, la somme $x+y$ est définie dans $\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\mathfrak{a}}$ en y, en envoyant x par l'application $\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^m\mathfrak{a}} \to \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\mathfrak{a}}$ ce qui donne un élément de $\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{2m}\mathfrak{a}}$. Cette définition est consistante dans la mesure où elle est compatible avec toutes les applications qui définissent la limite. La somme fournit donc une opération binaire qui est commutative et inversible dans $\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$. Il est clair que la limite $\check{\mathfrak{a}}$ est fermée par rapport à la somme. À cause de (**??**), l'action naturelle de $\mathcal{O}_K$ sur $\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ est continue et respecte le sous-groupe $\check{\mathfrak{a}}$. De plus il y a un système compatible d'épimorphismes vers le tore quantique

$$\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\mathfrak{a}} \longrightarrow \mathbb{T}(\theta) := \mathbb{R}/\mathcal{O}_K$$

induit par $x + \Sigma^n\mathfrak{a} \mapsto x + \mathcal{O}_K$, où l'on observe que cette application identifie la transversale $x + \Sigma^n\hat{\mathfrak{a}}$ passant par x au point $x + \mathcal{O}_K \in \mathbb{T}(\theta)$. Ce système induit à son tour un épimorphisme $\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} \to \mathbb{T}(\theta)$ de noyau $\check{\mathfrak{a}}$. □

Le deuxième construction est une variante de celle-ci dans le contexte de l'analyse non standard, le point étant qu'il est possible de résoudre le probème de distinguer $\langle A\rangle$ de $\mathcal{O}_K$ en travaillant dans un modèle non standard de ce dernier anneau. Pour un ensemble infini X on note ${}^*X$ l'ultrapuissance de X par rapport à un ultrafiltre non principal $\mathfrak{u} \subset 2^{\mathbb{N}}$ fixé. Par définition on a donc

$$ {}^*X := X^{\mathbb{N}}/\sim_{\mathfrak{u}} $$

où

$$ \{x_i\} \sim_{\mathfrak{u}} \{x'_i\} \Longleftrightarrow \{i|\ x_i = x'_i\} \in \mathfrak{u}. $$

Alors l'ultrapuissance ${}^*\mathcal{O}_K$ est un anneau et une *extension élémentaire* de $\mathcal{O}_K$ ([**?**]), ce qui implique que ${}^*\mathcal{O}_K$ et $\mathcal{O}_K$ sont indistinguables par les propositions de la logique du premier ordre.

Soit ${}^*A \subset {}^*\mathcal{O}_K$ l'ultrapuissance de A et considérons l'anneau engendré par ${}^*A$:

$$ \langle {}^*A\rangle := \bigcup_{n\geq 1} \Sigma^n {}^*A. $$

Proposition 12. $\mathrm{Frac}(\langle {}^*A\rangle) = {}^*K$.

Démonstration. On sait par le travail de Salem que $K = \mathbb{Q}(\theta)$ où θ est de PV, donc ${}^*K = {}^*\mathbb{Q}(\theta)$. Soit $\mathcal{K} := \mathrm{Frac}(\langle {}^*A\rangle)$. Puisque A consiste en tous les nombres PVS (complexes),

$$ \mathcal{K} \supset \mathbb{Q}\{\theta^{{}^*n}|\ {}^*n \in {}^*\mathbb{Z}\}. $$

Reste à montrer que ${}^*\mathbb{Q} \subset \mathcal{K}$. Mais si ${}^*a \in \mathbb{Z}$ est arbitraire, ${}^*a\theta^{{}^*n} \in {}^*A$ si ${}^*n$ est assez grand, parce que $({}^*a\theta^{{}^*n})' = {}^*a(\theta')^{{}^*n}$ est la classe d'une suite ayant des valeurs absolues ≤ 1. Donc ${}^*a \in \mathcal{K}$. D'où ${}^*\mathbb{Z} \subset \mathcal{K}$, puis ${}^*\mathbb{Q} \subset \mathcal{K}$. □

De même, pour tout A-idéal quasicristallin $\mathfrak{a}$, on définit le $\langle {}^*A\rangle$-idéal

$$ \langle {}^*\mathfrak{a}\rangle := \bigcup_{n\geq 1} \Sigma^n {}^*\mathfrak{a}. $$

Les intersections ou unions d'ensembles dénombrables qui sont triviales dans le modèle standard $\mathcal{O}_K$ peuvent devenir non triviales dans ${}^*\mathcal{O}_K$. En effet :

Proposition 13. $\langle {}^*A\rangle \subsetneq {}^*\mathcal{O}_K$. *Si* $\mathbf{x} < \mathbf{y}$, *alors* $\langle \mathfrak{a}_{\mathbf{y}}\rangle \supsetneq \langle \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}\rangle$.

Démonstration. Soit

$$ {}^*\alpha = {}^*\{\alpha_i\} \in {}^*\mathcal{O}_K \text{ tel que } \alpha_i \notin \Sigma^i A \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}. $$

Comme $\Sigma^n A \subsetneq \Sigma^{n+1} A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \notin \Sigma^i A$ pour tout $j \geq i$ et donc

$$ {}^*\alpha = {}^*\{\alpha_i\} \notin {}^*(\Sigma^n A) = \Sigma^n {}^*A $$

pour tout n. La preuve de la seconde affirmation est identique. □

Considérons maintenant ${}^*\mathbb{R}$ comme un corps topologique muni de la topologie ordonnée, ce qui en fait un ensemble totalement disconnecté.

Proposition 14. $(\langle {}^*\mathfrak{a}\rangle, +)$ *est un sous-groupe de Delaunay de* ${}^*\mathbb{R}$.

Démonstration. Il est clair que $\langle {}^*\mathfrak{a}\rangle$ est relativement dense dans ${}^*\mathbb{R}$. Soit r_n tel que $\Sigma^n \mathfrak{a}$ est uniformément discret par rapport à r_n. Alors $\Sigma^n {}^*\mathfrak{a}$ est aussi uniformément discret par rapport a r_n. Si ${}^*\varepsilon > 0$ est infinitésimal, ${}^*\varepsilon < r_n$ pour tout n, donc $\langle {}^*\mathfrak{a}\rangle$ est ${}^*\varepsilon$-uniformément discret. □

Pour tout $\mathfrak{a}$ idéal quasicristallin de A, le quotient de Hausdorff

$$^*\mathbb{T}_{\mathfrak{a}} := {}^*\mathbb{R}/\langle {}^*\mathfrak{a}\rangle$$

est un *tore quasicristallin non standard*. On note que $^*\mathbb{T}_{\mathfrak{a}}$ n'est pas compact au sens usuel parce que la topologie ordonnée sur $^*\mathbb{R}$ n'est pas 2-dénombrable.

Si l'on note $^*\mathbb{R}_\varepsilon \subset {}^*\mathbb{R}$ le sous espace vectoriel des infinitésimaux, le quotient

$$^\bullet\mathbb{R} := {}^*\mathbb{R}/{}^*\mathbb{R}_\varepsilon$$

joue le rôle de revêtement universel de certaines laminations de dimension 1 ; en particulier

$$\mathcal{F}(\theta) = \{\text{le feuilletage de Kronecker de pente } \theta\} = {}^\bullet\mathbb{R}/{}^*\mathbb{Z}(\theta),$$

où $^*\mathbb{Z}(\theta) \subset {}^*\mathbb{Z}$ est le *groupe des approximations diophantiennes* (voir [**?**]). Dans le cas présent, $\langle {}^*A\rangle$ étant $^*\varepsilon$-uniformément discret pour tout $^*\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_\varepsilon$, on a

$$^*\mathbb{R}_\varepsilon \cap \langle {}^*A\rangle = \{0\}$$

ce qui implique qu'il existe un plongement

$$\langle {}^*A\rangle \hookrightarrow {}^\bullet\mathbb{R}.$$

Mais l'image de $\langle {}^*A\rangle$ dans $^\bullet\mathbb{R}$ est dense : en fait $\langle {}^*A\rangle \cap \mathbb{R} = \mathcal{O}_K$ qui est dense en $\mathbb{R}$. Donc $^*\mathbb{T}_{\mathfrak{a}}$ est un objet véritablement non standard : on perd la proprieté de Hausdorff en annulant les infinitésimaux. Le résultat suivant est l'analogue du Théorème **??**.

Théorème 13. *$^\bullet\mathbb{R}/\langle {}^*A\rangle$ est isomorphe au tore quantique $\mathbb{R}/\mathcal{O}_K$.*

Démonstration. On note que $\langle {}^*A\rangle \supset \langle A\rangle = \mathcal{O}_K$ et que l'intersection des ensembles $\langle {}^*A\rangle, \mathbb{R} \subset {}^\bullet\mathbb{R}$ est $\langle A\rangle \cap \mathbb{R} = \mathcal{O}_K$. De plus chaque "feuille" $^\bullet r + {}^\bullet\mathbb{R}$ possède une intersection non nulle avec $\langle {}^*A\rangle$, d'où $^\bullet\mathbb{R}/\langle {}^*A\rangle = \mathbb{R}/\langle A\rangle = \mathbb{R}/\mathcal{O}_K$. □

7. Fonction exponentielle et modules de Drinfeld quasicristallins

Nous développons dans cette sectioune une *trigonométrie quasicristalline* qui est ensuite utilisée pour définir entre autres une exponentielle, laquelle fournit un analogue des modules de Drinfeld en caractéristique nulle.

Rappelons d'abord quelques formules de trigonométrie ordinaire dans la représentation en produits infinis. Dans ce qui suit on utilise les fonctions *sinus* et *cosinus* "absolues", c'est-à-dire *non normalisées* par rapport à π, définies par les formules suivantes :

$$\mathtt{s}(x) := x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right), \quad \mathtt{c}(x) = \mathtt{s}'(x) := \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{(n-1/2)^2}\right).$$

On rappelle également la formule de Wallis :

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n-1/2)(n+1/2)}.$$

Notons que le n-ième terme du produit est le quotient du carré de la racine, n, de $\mathtt{s}(x)$, divisée par le produit $(n-1/2)(n+1/2)$ des racines de $\mathtt{c}(x)$ voisines de n.

Donc, si l'on écrit $\alpha_n = n$, $\beta_n = n - 1/2$, les ensembles $\mathbb{Z}_+ = \{\alpha_n\}$, $\mathbb{Z}_{\frac{1}{2},+} = \{\beta_n\}$ sont les racines positives de $\mathsf{s}(x)$, $\mathsf{c}(x)$ et on a[9] :

$$\pi = \frac{1}{\beta_1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\beta_n \cdot \beta_{n+1}}. \tag{27}$$

Supposons que l'on remplace les fonctions absolues en multipliant le réseau $\mathbb{Z}$ par une constante $\xi : \mathbb{Z} \to \xi\mathbb{Z}$. Notons s_ξ la fonction sinus associée :

$$\mathsf{s}_\xi(x) = x \prod \left(1 - \frac{x^2}{\xi^2 n^2}\right).$$

Puis

$$\mathsf{s}_\xi = \xi \circ \mathsf{s} \circ \xi^{-1}, \quad \mathsf{c}_\xi(x) := \mathsf{s}'_\xi(x) = \mathsf{c}(\xi^{-1}x)$$

et les ensembles de zéros de $\mathsf{s}_\xi(x), \mathsf{c}_\xi(x)$ sont $\xi\mathbb{Z}, \xi\mathbb{Z}_{\frac{1}{2}}$. Si l'on définit π_ξ en utilisant (**??**), avec les ensembles de zéros $\xi\mathbb{Z}, \xi\mathbb{Z}_{\frac{1}{2}}$ au lieu de $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{\frac{1}{2}}$, nous voyons que

$$\pi_\xi = \pi/\xi,$$

et les réseaux normalisés coïncident :

$$\pi\mathbb{Z} = \pi_\xi \xi\mathbb{Z}.$$

On en conclut que les fonctions sinus et cosinus classiques, qui s'écrivent dans cette notation

$$\sin(x) = \mathsf{s}_\pi(x) = \pi\mathsf{s}(\pi^{-1}x), \quad \cos(x) = \mathsf{c}_\pi(x) = \mathsf{c}(\pi^{-1}x),$$

proviennent d'une construction canonique qui ne dépend que de la classe projective de $\mathbb{Z}$. En effet, si en guise de notion "absolue" du sinus nous avions utilisé $\xi\mathbb{Z}$ au lieu de $\mathbb{Z}$, nous aurions obtenu

$$\sin_\xi(x) = (\mathsf{s}_\xi)_{\pi_\xi}(x) = \pi_\xi \mathsf{s}_\xi(\pi_\xi^{-1}x) = \pi\xi^{-1}\mathsf{s}_\xi(\xi\pi^{-1}x) = \mathsf{s}_\pi(x) = \sin(x).$$

Soit $\mathfrak{a} \subset K \subset \mathbb{R}$ un idéal quasicristallin fractionnaire de rang 1. On commence par définir le sinus et cosinus "absolus"

$$\mathsf{s}_\mathfrak{a}(x) := x \prod_{0<\alpha\in\mathfrak{a}} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right), \quad \mathsf{c}_\mathfrak{a}(x) := \mathsf{s}'_\mathfrak{a}(x).$$

On observe immédiatement que les deux fonctions sont lisses, que $\mathsf{s}_\mathfrak{a}(x)$ est impaire et $\mathsf{c}_\mathfrak{a}(x)$ est paire. Soit

$$\mathsf{e}_\mathfrak{a}(ix) := \mathsf{c}_\mathfrak{a}(x) + i\mathsf{s}_\mathfrak{a}(x)$$

l'exponentielle associée. De plus l'image de $\mathsf{e}_\mathfrak{a}(ix)$ est contenue dans $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$: c'est une conséquence immédiate de la formule de produit qui définit $\mathsf{s}_\mathfrak{a}$ et de ce que

$$\mathsf{c}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\mathsf{s}(x)}{x} = 1.$$

La Figure 1 montre l'image par $\mathsf{e}_\mathfrak{a}(ix)$ d'un segment (compact) de $\mathbb{R} \subset \hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$, où $\mathfrak{a} = A$, l'anneau quasicristallin associé à $K = \mathbb{Q}(\varphi)$, avec φ le nombre d'or. On observe la formation d'une suite de cardioïdes autosimilaires, manifestation experimentale du théorème suivant :

[9] N.B. Il n'est pas possible de réintégrer le facteur $1/\beta_1$ dans le produit, en écrivant plutôt $\prod(\alpha_n/\beta_n)^2$: le résultat ne converge pas.

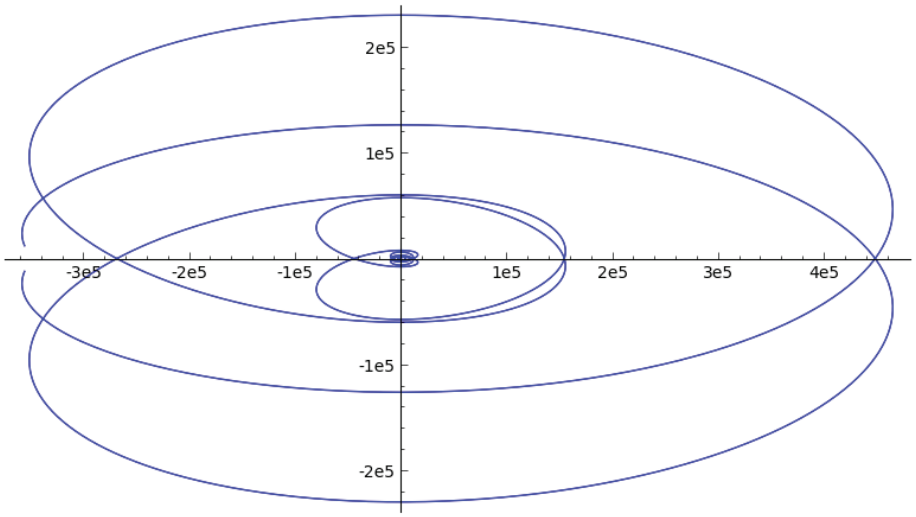

FIGURE 1. Une feuille d'un solénoïde quasicristallin associé au nombre d'or

Théorème 14 ($\mathfrak{a}$-periodicité)**.** *Soient $\mathfrak{a}$ un idéal quasicristallin modèle de rang 1 et $\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}^{\mathbb{C}} := \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} \times i\mathbb{R}$ le solénoïde complexifié, un solénoïde non compact dont toutes les feuilles sont isomorphes à $\mathbb{C}$. La fonction de variable complexe $z \mapsto \mathsf{e}_{\mathfrak{a}}(iz)$ est continue par rapport à la topologie transversale de $\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}^{\mathbb{C}}$ et s'étend donc en une fonction continue*

$$\mathsf{e}_{\mathfrak{a}}(i\,\cdot) : \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

holomorphe le long des feuilles. L'image de $\hat{\mathfrak{a}} \subset \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ est $\mathsf{e}_{\mathfrak{a}}(i\,\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}) \cap \mathbb{R}$. Si $\mathfrak{a}$ est générique la restriction de $\mathsf{e}_{\mathfrak{a}}$ à $\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ n'est pas injective.

Démonstration. On commence par montrer que $\mathsf{s}(z)$ a une extension à $\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}^{\mathbb{C}}$; il suffit de démontrer l'existence d'une extension à $\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$. On rappelle que $\gamma_i \to 0$ en $\hat{\mathfrak{a}}$ si et seulement si pour tout $R > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{a} - \gamma_i$ et $\mathfrak{a}$ coincide sur l'intervalle $[-R, R]$ pour tout $i \geq M$. Par conséquent, d'après sa définition comme produit infini, la fonction $\mathsf{s}_{\mathfrak{a}}(x)$, dans chaque intervalle $[-R, R]$, est uniformément proche de $\mathsf{s}_{\mathfrak{a}}(x - \gamma_i)$, $i \geq M$. Autrement dit, $\mathsf{s}_{\mathfrak{a}}(x)$ est transversalment continue en 0, uniformément sur les compacts. De la même manière $\mathsf{s}_{\mathfrak{a}}(x)$ possède la même propriété de convergence en chaque point du complété $\hat{\mathfrak{a}} \subset \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$, d'où l'on déduit l'existence d'une extension à ce dernier. La convergence, transversalement et uniformément sur les compacts, de la fonction holomorphe $\mathsf{s}_{\mathfrak{a}}(z)$ implique la même propriété pour ses dérivées. En particulier, $\mathsf{c}_{\mathfrak{a}}(z)$ possède également une extension à $\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}^{\mathbb{C}}$. Il est clair que si $\mathsf{e}_{\mathfrak{a}}(i\,\hat{z}) = 1$, $\mathsf{s}_{\mathfrak{a}}(\hat{z}) = 0$, puis $\hat{x} \in \hat{\mathfrak{a}}$. Si $\mathfrak{a}$ est répétitif,

$\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ est un solénoïde compact minimal. En particulier, l'image de la feuille canonique $L_{\mathfrak{a}} \approx \mathbb{R}$ est dense dans l'image de $\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$, ce qui implique qu'elle possède des auto-intersections. □

Proposition 15. *L'ensemble des zéros*

$$\mathfrak{b} := \{\beta \in \mathbb{R} |\ \mathsf{c}_{\mathfrak{a}}(\beta) = 0\}$$

est de Delaunay et on a la représentation en produit :

$$\mathsf{c}_{\mathfrak{a}}(x) = \prod_{0<\beta\in\mathfrak{b}} \left(1 - \frac{x^2}{\beta^2}\right). \tag{28}$$

Démonstration. En effet, écrivons $\mathsf{c}_{\mathfrak{a}}(x) = \mathsf{s}'_{\mathfrak{a}}(x)$

$$\mathsf{c}_{\mathfrak{a}}(x) = \prod_{0<\alpha\in\mathfrak{a}} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) - \sum_{0<\alpha\in\mathfrak{a}} \left(\frac{2x^2}{\alpha^2}\right) \prod_{0<\gamma\neq\alpha,\ \gamma\in\mathfrak{a}} \left(1 - \frac{x^2}{\gamma^2}\right).$$

On constate ainsi qu'entre chaque paire de zéros consécutifs de $\mathfrak{a}$, $\mathsf{c}_{\mathfrak{a}}$ change de signe précisément un fois. Autrement dit il y a un et un seul élément de $\mathfrak{b}$ entre chaque paire de zéros consécutifs de $\mathfrak{a}$ et on peut énumérer les éléments de $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ de la manière suivante :

$$\cdots \alpha_{-2} < \beta_{-2} < \alpha_{-1} < \beta_{-1} < 0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \cdots,$$

où $\alpha_{-n} := -\alpha_n,\ \beta_{-n} := -\beta_n$. Donc, $\mathfrak{b}$ est relativement dense. Par la démonstration du Théorème **??**, $\mathsf{c}_{\mathfrak{a}} = \mathsf{s}'_{\mathfrak{a}}$ s'étend de façon continue au solenoïde compact $\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$, et $\mathsf{c}_{\mathfrak{a}}$ est bornée. Si $\mathfrak{b}$ n'était pas uniformément discret, il existerait une suite $\beta_n < \alpha_n < \beta_{n+1}$ d'éléments consécutifs tels que $\beta_{n+1} - \beta_n \to 0$. Mais ceci implique que $\mathsf{c}_{\mathfrak{a}}$ prendrait des valeurs arbitrairement grandes entre de tels extrema consécutifs, c'est-à-dire qu'il existerait une suite $\beta_n < x_n < \beta_{n+1}$ telle que $|\mathsf{c}_{\mathfrak{a}}(x_n)| \to \infty$; autrement dit $\mathsf{c}_{\mathfrak{a}}$ ne serait pas bornée. De tout ceci on conclut que $\mathfrak{b}$ est bien en ensemble de Delaunay. Le produit dans (**??**) converge uniformément sur les compacts (comme fonction de $x \in \mathbb{C}$) et définit une fonction sur $\mathbb{C}$ avec la même diviseur que $\mathsf{c}_{\mathfrak{a}}$ et la même valeur, soit 1, en $x = 0$. Les deux fonctions coïncident donc. □

Par contre, l'exponentielle usuelle ne s'étend pas à $\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$.

Comme dans la preuve de la Proposition **??**, notons les éléments positifs de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sous la forme $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$, $0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots$. En suivant à nouveau (**??**) on définit

$$\pi_{\mathfrak{a}} := \frac{1}{\beta_1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\beta_n \cdot \beta_{n+1}}.$$

Les fonctions trigonometriques *normalisées* de la variable complexe z sont alors définies par

$$\sin_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}} z) := (\mathsf{s}_{\mathfrak{a}})_{\pi_{\mathfrak{a}}}(\pi_{\mathfrak{a}} z) = \pi_{\mathfrak{a}} z \prod_{0<\alpha\in\mathfrak{a}} \left(1 - \frac{z^2}{\alpha^2}\right) \tag{29}$$

et

$$\cos_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}} z) := (\mathsf{c}_{\mathfrak{a}})_{\pi_{\mathfrak{a}}}(\pi_{\mathfrak{a}} z) = \prod_{0<\beta\in\mathfrak{b}} \left(1 - \frac{z^2}{\beta^2}\right).$$

Enfin l'*exponentielle quasicristalline normalisée* associée à $\mathfrak{a}$ est donnée par

$$\exp_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}} i z) := \mathsf{e}_{\pi_{\mathfrak{a}}}(i \pi_{\mathfrak{a}} z) := \cos_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}} z) + i \sin_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}} z).$$

Notons

$$\hat{\mathsf{C}}_{\mathfrak{a}} := \exp_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}} i \hat{\mathfrak{a}}) \subset \hat{\mathbb{E}}_{\mathfrak{a}} := \exp_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}} i \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}) \subset \mathbb{C}^*.$$

Ci-dessous nous utiliserons les notations suivantes :

$$s_{\mathfrak{a}}(x) := \sin_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}} x), \quad c_{\mathfrak{a}}(x) := \cos_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}} x), \quad e_{\mathfrak{a}}(x) := \exp_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}} i x).$$

Observons que, puisque $s_{\mathfrak{a}}(\hat{\mathfrak{a}}) \equiv 0$,

$$1 \in \hat{\mathsf{C}}_{\mathfrak{a}} = c_{\mathfrak{a}}(\hat{\mathfrak{a}}) = \hat{\mathbb{E}}_{\mathfrak{a}} \cap \mathbb{R}$$

est l'image continue d'un ensemble de Cantor, donc est elle-même ou un ensemble de Cantor, ou bien finie. On considèrera $\hat{\mathsf{C}}_{\mathfrak{a}}$ comme un "élargissement" de 1, de la même façon que l'on a regardé $\hat{\mathfrak{a}} \subset \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ comme un élargissement de 0. La paire

$$(\hat{\mathbb{E}}_{\mathfrak{a}}, \hat{\mathsf{C}}_{\mathfrak{a}})$$

est l'objet que l'on voudrait considérer comme un analogue d'un module de Drinfeld de rang 1 en caractéristique zéro.

Comme on le verra, ceci se complique du fait du défaut d'injectivité de $e_{\mathfrak{a}}$. Ce serait trop espérer que de vouloir faire de $e_{\mathfrak{a}}$ un homomorphisme au sens usuel entre la structure sommatoire dans la suite des solenoïdes $\{\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n \mathfrak{a}}\}$ et la structure de groupe de $\mathbb{C}^*$ (pour la définition des Σ^n, voir immédiatement après la démonstration du Théorème 8). Plus précisément, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} \times \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} \arrow[r, "+"] \arrow[d, "e_{\mathfrak{a}} \times e_{\mathfrak{a}}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{non } \circlearrowleft"] & \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma \mathfrak{a}} \arrow[d, "e_{\Sigma \mathfrak{a}}"] \\
\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \arrow[r, "\times"'] & \mathbb{C}^*
\end{tikzcd}$$

ne commute pas. Cependant, dans le contexte des groups approximatifs, il convient d'affaiblir la notion de morphisme de la façon suivante.

Soient $G = (G, +)$ et $H = (H, +)$ des structures dotées de produits commutatifs partiellement définis et $|\cdot| : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une valuation. On rappelle qu'une fonction

$$f : G \longrightarrow H$$

est un *quasimorphisme* si la somme $f(g) + f(g')$ est définie quand $g + g'$ l'est et il existe une constante D (indépendante de g et g') telle que

$$|f(g + g') - f(g) - f(g')| \leq D.$$

Dans le cas des solénoïdes quasicristallins il est commode d'introduire la variante suivante de cette notion, où l'on suppose de plus qu'il existe des structures auxiliaires ΣG, ΣH où les sommes prennent formellement leurs valeurs, Σ étant munie d'une valuation $|\cdot|$. Un *quasimorphisme adapté* consiste alors en un couple de fonctions

$$f : G \longrightarrow H, \quad \Sigma f : \Sigma G \longrightarrow \Sigma H$$

avec

$$|\Sigma f(g + g') - f(g) - f(g')| \leq D.$$

Théorème 15. *L'exponentielle quasicristalline définit un quasimorphisme adapté*

$$e_{\mathfrak{a}} : (\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^{\times}, \times)$$

au sens qu'il existe un constant $D > 0$ tel que

$$\left|\frac{e_{\Sigma\mathfrak{a}}(x+y)}{e_{\mathfrak{a}}(x)e_{\mathfrak{a}}(y)}\right| < D.$$

Démonstration. L'affirmation suit immediatement du fait que les exponentielles $e_{\Sigma\mathfrak{a}}, e_{\mathfrak{a}}$, fonctions continues sur des solénoïdes compacts $\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}, \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma\mathfrak{a}}$, ont des images (compactes) qui omettent 0. □

Note 11. Montrons que vues comme fonctions sur les solenoïdes complexes $\hat{\mathbb{S}}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{a}}, \hat{\mathbb{S}}^{\mathbb{C}}_{\Sigma\mathfrak{a}}$, les exponentielles $e_{\Sigma\mathfrak{a}}, e_{\mathfrak{a}}$ *ne définissent pas* un quasimorphisme adapté. En effet, sinon on aurait pour tous $z, w \in \mathbb{C}$

$$\left|\frac{e_{\Sigma\mathfrak{a}}(z+w)}{e_{\mathfrak{a}}(z)e_{\mathfrak{a}}(w)}\right| < D$$

pour un certain $D > 0$. Mais alors, d'après le théorème de Liouville, ce quotient (holomorphe) serait constant

$$\frac{e_{\Sigma\mathfrak{a}}(z+w)}{e_{\mathfrak{a}}(z)e_{\mathfrak{a}}(w)} = C$$

avec en fait $C = 1$ qui est la valeur à l'origine. Les exponentielles respecteraient donc le produit

$$e_{\Sigma\mathfrak{a}}(z+w) = e_{\mathfrak{a}}(z)e_{\mathfrak{a}}(w), \tag{30}$$

et partant aussi l'inverse. En conséquence, restreignant (**??**) à la droite réelle $\mathbb{R}$, on obtiendrait une application non constante et homomorphe $e : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ dont l'image serait nécessairement le cercle unité $\mathbb{S}^1$. En particulier, les images des solénoïdes $\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}, \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma\mathfrak{a}}$ par $e_{\mathfrak{a}}$, $e_{\Sigma\mathfrak{a}}$ seraient alors égales à $\mathbb{S}^1$.

Or en fait, pour un unité de Pisot $\rho \in \mathbb{R}$, $|e_{\mathfrak{a}}(\rho)| \neq 1$. Si par example on choisit $\rho = \varphi =$ le nombre d'or et $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0$, $\varphi \in \mathfrak{a}$ est l'élément positif minimal et nous avons

$$e_{\mathfrak{a}}(i\varphi) = c_{\mathfrak{a}}(\varphi) = s'_{\mathfrak{a}}(\varphi) = -2 \prod_{\varphi < \alpha \in \mathfrak{a}} \left(1 - \frac{\varphi^2}{\alpha^2}\right).$$

Ecrivons les éléments positifs de $\mathfrak{a}$ sous la forme

$$0 < \alpha_1 = \varphi < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots.$$

On sait que, en tant que quasicristal, $\mathfrak{a}$ est engendré par trois intervalles, de longueurs respectives φ, 1 et φ^{-1}. Autrement dit, pour tout n, on a soit $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \varphi$, soit $\alpha_{n+1} = \alpha_n + 1$, soit $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \varphi^{-1}$. Ainsi pour n petit on obtient :

$\alpha_2 = \varphi + 1 = \varphi^2$, puisque $\varphi + \varphi^{-1} \notin \mathfrak{a}$.
$\alpha_3 = \alpha_2 + \varphi = \varphi^3$ car $\varphi^2 + 1, \varphi^2 + \varphi^{-1} \notin \mathfrak{a}$.
$\alpha_4 = \alpha_3 + 1 = \varphi^3 + 1$.
$\alpha_5 = \alpha_4 + \varphi^{-1} = \varphi^3 + 1 + \varphi^{-1} = \varphi^3 + \varphi$.

Observons que $\alpha_2/\varphi = \varphi < 2$ et par induction $\alpha_n/\varphi < n$ pour tout n. En effet, si l'on suppose que cela est vrai pour n, on a

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\varphi} = \frac{\alpha_n}{\varphi} + \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_{n+1} = \alpha_n + \varphi \\ \varphi^{-1} & \text{si } \alpha_{n+1} = \alpha_n + 1 \\ \varphi^{-2} & \text{sinon} \end{cases} < n + 1.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 2$

$$1 - \frac{\varphi^2}{\alpha_n^2} < 1 - \frac{1}{n^2}$$

et donc

$$|e_{\mathfrak{a}}(\varphi)| < 2 \prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

Finalement, $e_{\mathfrak{a}}$ ne peut donc pas en particulier définir un quasimorphisme de $\mathbb{C}$.

La défaut d'injectivité de l'exponentielle quasicristalline à valeurs dans le groupe $\mathbb{C}^\times$ constitue un obstacle sérieux en vue de la définition d'un équivalent des modules de Drinfeld en caractéristique nulle.

On observe alors que :

1. Dans le cas classique, l'exponentielle est combinaison linéaire du sinus et de sa dérivée et définit une fonction injective sur $\mathbb{S}^1$. Il n'est pas nécessaire d'utiliser davantage de dérivées dans la définition de l'exponentielle. Au demeurant la suite des dérivées du sinus est périodique de période 2.
2. Dans le cas des courbes elliptiques on utilise la fonction $\wp$ de Weierstrass et sa dérivée. L'application de Weierstrass étant déjà injective, il n'est pas nécessaire de mettre en jeu davantage de dérivées.
3. Dans le cas des modules de Drinfeld, l'exponentielle est essentiellement donnée par le sinus ; sa dérivée est identiquement 1 et il ne sert donc à rien de l'inclure.

Au contraire, ici la serie des dérivées

$$s_{\mathfrak{a}}(x), \;\; c_{\mathfrak{a}}(x) = s'_{\mathfrak{a}}(x), \;\; s_{\mathfrak{a}}^{(1)}(x) := c'_{\mathfrak{a}}(x), \;\; c_{\mathfrak{a}}^{(1)}(x) := (s_{\mathfrak{a}}^{(1)})'(x), \;\; \ldots$$

n'est *pas* périodique. En fait le corps $\mathbb{C}$ des complexes n'est pas sufisamment grand pour recevoir une image injective d'un solénoïde. Par contre l'ultraproduit ${}^*\mathbb{C}$ admet de telles plongements injectifs de solénoides de dimension 1:

Exemple 6. Soit $\hat{\mathbb{S}}^1 = \lim_{\longleftarrow} \mathbb{S}^1$ le solénoïde classique. On definit l'application

$$\hat{e} : \hat{\mathbb{S}}^1 \longrightarrow {}^*\mathbb{C}, \quad \hat{x} = (x_n) \longmapsto {}^*\{e(x_n)\}, \quad e(x) := \exp(2\pi i x),$$

et on note que $\hat{e}$ est bien définie et homomorphe. Si $\hat{e}(\hat{x}) = \hat{e}(\hat{y})$, il existe un $X \in \mathfrak{u}$, où $\mathfrak{u}$ est un ultrafiltre non principal et X est infini, tel que $e(x_n) = e(y_n)$ pour tout n dans X ; en particulier les deux suites cohérentes coïncident pour n assez grand. On en conclut que $\hat{e}$ est bien un monomorphisme.

Définissons alors

$$\hat{e}_{\mathfrak{a}} : \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} \longrightarrow {}^*\mathbb{C}, \quad \hat{e}_{\mathfrak{a}}(\hat{x}) = {}^*\{e_{\mathfrak{a}}^{(n)}(\hat{x})\}, \quad e_{\mathfrak{a}}^{(n)} = i s_{\mathfrak{a}}^{(n)} + c_{\mathfrak{a}}^{(n)}.$$

Proposition 16. *L'application $\hat{e}_{\mathfrak{a}}$ est injective.*

Démonstration. La restriction de $\hat{e}_{\mathfrak{a}}$ à $\mathbb{R}$, étendue à $\mathbb{C}$, est injective. En effet, si $e_{\mathfrak{a}}^{(n)}(z) = e_{\mathfrak{a}}^{(n)}(z+h)$ pour tous les indices n, alors, par analyticité, $e_{\mathfrak{a}}$ est périodique de période h. Puis, $1 = e_{\mathfrak{a}}(0) = e_{\mathfrak{a}}(h)$, on a $s_{\mathfrak{a}}(h) = 0$ qui implique que $h \in \mathfrak{a}$. Mais $\mathfrak{a}$ est supposé apériodique et ne contient donc aucun sous-groupe ce qui est contradictoire. En particulier, l'application $z \mapsto (e_{\mathfrak{a}}^{(n)}(z))$ induit une inclusion $\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} \hookrightarrow \mathbb{C}^\infty$. Supposons qu'il existe $X \in \mathfrak{u}$ et $z, w \in \mathbb{C}$ tels que

$$e_{\mathfrak{a}}^{(n)}(z) = e_{\mathfrak{a}}^{(n)}(w), \quad \text{pour tout } n \in X.$$

A TERMINER !!!

$\square$

On se propose alors de redéfinir $e_{\mathfrak{a}}$ de manière à inclure les dérivées de $s_{\mathfrak{a}}(x)$. Adoptant le point de vue de la théorie des courbes elliptiques on définira un (quasi) produit sur la famille $\{\mathbb{E}_{\Sigma^n\mathfrak{a}}\}$ en transférant la somme $+$ à $\{\mathbb{E}_{\Sigma^n\mathfrak{a}}\}$ grâce aux exponentielles, produit qui est en théorie à valeurs multiples puisque les $e_{\Sigma^n\mathfrak{a}}$ ne sont pas injectives. Plus précisément, pour $x, y \in \mathbb{E}_{\mathfrak{a}}$, on note

$$x \otimes_{\mathfrak{a}} y := \{z = e_{\mathfrak{a}}(\hat{z}) |\ \exists \hat{x} \in e_{\mathfrak{a}}^{-1}(x),\ \hat{y} \in e_{\mathfrak{a}}^{-1}(y) \text{ tels que } \hat{x} + \hat{y} = \hat{z}\}.$$

Si l'on considère l'application (éventuellement multivoque)

$$i_{\Sigma} : \mathbb{E}_{\mathfrak{a}} \longrightarrow \mathbb{E}_{\Sigma\mathfrak{a}}, \quad i_{\Sigma}(x) = \{e_{\Sigma\mathfrak{a}}(\hat{x}) |\ \hat{x} \in e_{\mathfrak{a}}^{-1}(x)\},$$

on voit immédiatement que

$$x \otimes_{\mathfrak{a}} 1 = i_{\Sigma}(x).$$

L'action de A sur $\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ induit aussi une action (éventuellement multivoque)

$$x \mapsto x^{\alpha} := \{y = e_{\mathfrak{a}}(\alpha\hat{x}) |\ \hat{x} \in e_{\mathfrak{a}}^{-1}(x)\} \tag{31}$$

qui respecte le produit:

$$(x \otimes_{\mathfrak{a}} y)^{\alpha} = x^{\alpha} \otimes_{\mathfrak{a}} y^{\alpha},$$

où le côté gauche est l'ensemble des z^{α}, $z \in x \otimes_{\mathfrak{a}} y$. Nous obtenons donc le cube commutatif ci-dessous, où $\alpha : \mathbb{C}^* \multimap \mathbb{C}^*$ est l'application multivoque définie en (**??**) :

$$\begin{tikzcd}
\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} \times \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} \arrow[rr, "+"] \arrow[dr, "e_{\mathfrak{a}} \times e_{\mathfrak{a}}"] \arrow[dd, "\alpha\times\alpha"'] & & \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma\mathfrak{a}} \arrow[dr, "e_{\Sigma\mathfrak{a}}"] \arrow[dd, "\alpha"] & \\
& \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \arrow[rr, "\otimes_{\mathfrak{a}}"] \arrow[dd, "\alpha\times\alpha"'] & & \mathbb{C}^* \arrow[dd, "\alpha"] \\
\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} \times \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} \arrow[rr, "+"'] \arrow[dr, "e_{\mathfrak{a}} \times e_{\mathfrak{a}}"'] & & \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma\mathfrak{a}} \arrow[dr, "e_{\Sigma\mathfrak{a}}"] & \\
& \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \arrow[rr, "\otimes_{\mathfrak{a}}"'] & & \mathbb{C}^*
\end{tikzcd}$$

La structure

$$(\mathbb{D}_{\mathfrak{a}}, \otimes_{\mathfrak{a}})$$

munie de l'action de A sera appelée *module de Drinfeld quasicristallin* sur A. Insistons sur le fait que les opérations algébriques mentionnées sont peut-être multivoques. Nous ignorons à l'heure actuelle si les définitions de i_{Σ}, $\otimes_{\mathfrak{a}}$, ainsi que l'action de A sont, en fait, univoques.

Néanmoins le théorème qui suit montre que l'action de A est univoque modulo changement d'échelle : elle est bien définie en tant qu'action sur les *phases*. On note d'abord que l'exponentielle définit une surjection canonique

$$[e_{\mathfrak{a}}] : \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} \longrightarrow U(1) = \mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^{\times}$$

en composant avec la projection $\mathbb{C}^* \to U(1)$.

Théorème 16. *Soit $\gamma \in A$. Alors, il existe une fonction bien définie et* continue

$$\gamma : U(1) \longrightarrow U(1), \quad [x] := x \mod \mathbb{R}_+^\times \longmapsto [x^\gamma] := x^\gamma \mod \mathbb{R}_+^\times$$

telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "{[e_{\mathfrak{a}}]}"'] & \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} \arrow[d, "{[e_{\mathfrak{a}}]}"] \\ U(1) \arrow[r, "\gamma"'] & U(1) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. Définissons la fonction tangente de la façon habituelle :

$$t_{\mathfrak{a}}(z) := \tan_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}} z) = \frac{s_{\mathfrak{a}}(z)}{c_{\mathfrak{a}}(z)}.$$

Soient $x, y \in \mathbb{C}$. Alors $[e_{\mathfrak{a}}](x) = [e_{\mathfrak{a}}](y)$ si et seulement si $t_{\mathfrak{a}}(x) = t_{\mathfrak{a}}(y)$, si et seulement si

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n^2 - y^2}{\alpha_n^2 - x^2} \cdot \frac{\beta_n^2 - x^2}{\beta_n^2 - y^2} \right) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n^2 - (\gamma y)^2}{\alpha_n^2 - (\gamma x)^2} \cdot \frac{\beta_n^2 - (\gamma x)^2}{\beta_n^2 - (\gamma y)^2} \right) \\ &= \frac{\gamma x}{\gamma y}. \end{aligned}$$

De la formule ci-dessus on déduit que $t_{\mathfrak{a}}(\gamma x) = t_{\mathfrak{a}}(\gamma y)$. Mais ceci implique que la fonction

$$U(1) \longrightarrow U(1), \quad [e_{\mathfrak{a}}](x) \longmapsto [e_{\mathfrak{a}}](\gamma x)$$

est bien définie et continue.

□

En accord avec la notation on appelle l'application (multivoque) $\alpha : \mathbb{E}_{\mathfrak{a}} \to \mathbb{E}_{\mathfrak{a}}$, *racine α-ième quasicristalline* (par rapport à $\mathfrak{a}$). Notons que la racine α-ième habituelle n'est bien définie que sur $\mathbb{C}^*$ privé d'un rayon et ne fournit donc pas une fonction bien définie sur le cercle $U(1)$.

Comme indiqué dessus la question reste ouverte de savoir si la racine α-ième quasicristalline est à valeurs multiples ou non. Quoi qu'il en soit, dans le cadre de cette théorie d'$\mathfrak{a}$-periodicité, il est tout à fait naturel que la racine α-ième quasicristalline soit multivoque, avec un ensemble de valeurs qui est typiquement un ensemble de Cantor, c'est-à-dire que $x \mapsto x^\alpha$ est une fonction bien définie à un ensemble de Cantor près. Dans cet esprit on peut définir la notion de racine α-ième de 1, à savoir un $z \in \mathbb{D}_{\mathfrak{a}}$ tel que $z^\gamma \subset \mathsf{C}_{\mathfrak{a}}$. Plus généralement, pour chaque idéal quasicristallin entier $\mathfrak{m} \subset A$, on parlera d'une racine $\mathfrak{m}$-*ième de* 1, autrement dit un $z \in \mathbb{D}_{\mathfrak{a}}$ tel que $z^\gamma \subset \mathsf{C}_{\mathfrak{a}}$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{m}$. L'ensemble de toutes les racines $\mathfrak{m}$-ièmes de 1 coïncide évidemment avec l'image

$$e_{\mathfrak{a}}\left((\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}, \hat{\mathfrak{a}})[\mathfrak{m}] \right).$$

8. Appendice : continuité de la conjugaison

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ un quasicristal de dimension 1. Notons

$$\Omega_R := \Omega \cap B_R(0),$$

où $B_R(0) = [-R, R]$ est la boule de rayon R centrée en 0. Une suite de translations $\{\alpha_i + \Omega\}$, $\alpha_i \in \Omega$, converge donc dans la topologie quasicristalline si pour chaque $R > 0$, il existe $N_R > 0$ tel que pour tous $i, j > N_R$,

$$(\Omega - \alpha_i)_R = (\Omega - \alpha_j)_R.$$

L'union

$$\Omega_{\hat{\alpha}} := \bigcup_{\substack{R>0 \\ i>N_R}} (\Omega - \alpha_i)_R$$

est un quasicristal. Le complété quasicristallin $\hat{\Omega}$ est l'ensemble de ces $\Omega_{\hat{\alpha}}$ muni de la topologie quasicristalline définie par la base d'ouverts

$$\mathcal{O}_R(\Omega_{\hat{\alpha}}) = \{\Omega' \in \hat{\Omega} \ : \ \Omega'_R = (\Omega_{\hat{\alpha}})_R\}, \quad R > 0.$$

Comme on l' vu au §**??**, $\hat{\Omega}$ est une transversale fermée du solénoïde $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$, donc un espace de Stone c'est-à-dire un espace compact et totalement discontinu.

Désormais on supposera que Ω est un ensemble modèle de dimension 1, basé sur le réseau $\mathcal{O}_K \subset \mathbb{R}^d$ avec la fenêtre de paramètres $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}_+)^{d-1}$

$$W = W_{\mathbf{x}} = (-\theta^{-x_1}, \theta^{-x_1}) \times \cdots \times (-\theta^{-x_{d-1}}, \theta^{-x_{d-1}})$$

où

$$\overline{W} = \overline{W}_{\mathbf{x}} = [-\theta^{-x_1}, \theta^{-x_1}] \times \cdots \times [-\theta^{-x_{d-1}}, \theta^{-x_{d-1}}].$$

Notons que si $\theta^{-x_i} \notin \mathcal{O}_K$ pour tout $i = 1, \ldots, d-1$, W et $\overline{W}$ définissent le même ensemble modèle. Sinon, on obtient un nombre fini de nouveaux ensembles modèles en utilisant $\overline{W}$ au lieu de W.

On rappelle que Ω est dit *répétitif* si pour tout $R > 0$, l'ensemble des R-périodes

$$\mathrm{Per}_R(\Omega) := \{x \in \mathbb{R} : \ (\Omega - x)_R = \Omega_R\}$$

est relativement dense.

Lemme 4. *Ω est répétitif si et seulement si il est défini en utilisant la fenêtre ouverte W.*

Démonstration. Supposons que Ω se définit avec W. Écrivons

$$\Omega_R = \pm\{0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k\} \tag{32}$$

et pour $i = 1, \ldots, k$,

$$\boldsymbol{\alpha}'_i := (\sigma_1(\alpha_i), \ldots, \sigma_{d-1}(\alpha_i))$$

où $\sigma_1, \ldots, \sigma_{d-1}$ sont les automorphismes de Galois non triviaux de $K/\mathbb{Q}$. En particulier :

1. D'après les définitions de Ω et Ω_R, pour $i = 0, \ldots, k$, $\boldsymbol{\alpha}'_i \in W$ et $\alpha_i \in (0, R)$.
2. Puisque dans la liste ordonnée (**??**) figurent tous les éléments de Ω_R, il n'existe pas $\gamma \in \mathcal{O}_K$ avec $\gamma > 0$ et tel qu'il existe un i vérifiant

$$i < k \text{ et } \gamma < \alpha_{i+1} - \alpha_i \quad \text{ou birn} \quad i = k \text{ et } \gamma < R - \alpha_k$$

et

$$\pm(\alpha_i + \gamma) \in \Omega.$$

En particulier, d'après 2, si $i < k$ et $\gamma < \alpha_{i+1} - \alpha_i$,

$$\pm\boldsymbol{\gamma}' \notin W \pm \boldsymbol{\alpha}'_i$$

et pour $i = k$ et $\gamma < R - \alpha_k$, on a également

$$\pm\boldsymbol{\gamma}' \notin W \pm \boldsymbol{\alpha}'_k.$$

Considérons alors l'ensemble

$$\Upsilon = \big\{0 \neq \gamma \in \mathcal{O}_K \ : \ \gamma < \alpha_{i+1} - \alpha_i \text{ pour quelque } i < k \text{ or } \gamma < R - \alpha_k\big\} \subset (0, \alpha),$$

où

$$\alpha := \max\big\{\max_{i<k}(\alpha_{i+1} - \alpha_i), R - \alpha_k\big\}.$$

L'ensembles de ses conjugués, soit Υ', est un sous-ensemble d'un ensemble modèle dans $\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ défini en utilisant la fenêtre $(0, \alpha)$ en $\mathbb{R} \times \{0\}$, et Υ' est donc uniformément discret. On peut alors choisir $\delta > 0$ suffisamment petit tel que, pour tout β avec $\|\boldsymbol{\beta}'\| < \delta$, on a :

a. $\boldsymbol{\beta}' \pm \boldsymbol{\alpha}'_i \in W$, c'est-à-dire $\beta \pm \alpha_i \in \Omega$ et
b. Pour $\gamma \in \Upsilon$ et tout i tel que soit $\gamma < \alpha_{i+1} - \alpha_i$, soit $i = k$, $\gamma < R - \alpha_k$

$$\boldsymbol{\gamma}' \notin W \pm \boldsymbol{\alpha}'_i - \boldsymbol{\beta}'.$$

En particulier,

$$\beta \pm \alpha_i + \gamma \notin \Omega \tag{33}$$

pour $\gamma < \alpha_{i+1} - \alpha_i$ si $i < k$ et $\gamma < R - \alpha_k$ si $i = k$.

La condition a. implique que $\pm\alpha_i = (\pm\alpha_i + \beta) - \beta \in (\Omega - \beta)_R$, qui fournit l'inclusion $\Omega_R \subset (\Omega - \beta)_R$. La condition b. fournit l'inclusion inverse. En effet, supposons qu'il existe

$$x = \alpha - \beta \in (\Omega - \beta)_R \setminus \Omega_R, \quad \alpha \in \Omega.$$

On peut supposer sans perte de généralité que $x > 0$; le cas $x < 0$ se traite en utilisant un argument identique. De plus x doit se trouver dans les intervalles de $(0, R)$ délimités par les α_i. Alors, il existe $\gamma > 0$ tel que $\gamma < \alpha_{i+1} - \alpha_i$ ou $< R - \alpha_k$ avec

$$x = \alpha - \beta = \alpha_i + \gamma.$$

Mais

$$\alpha = \beta + \alpha_i + \gamma \in \Omega,$$

ce qui contredit (**??**). On en conclut que $(\Omega - \beta)_R = \Omega_R$, d'où $\beta \in \mathrm{Per}_R(\Omega)$. L'ensemble des β avec $\|\boldsymbol{\beta}'\| < \delta$ est un quasicristal, donc relativement dense, ainsi que $\mathrm{Per}_R(\Omega)$. Ceci démontre que Ω est répétitif.

Si par contre Ω est défini avec $\overline{W}$ et n'est pas définissable avec W, il existe un ensemble fini de $\alpha \in \Omega$ avec $\boldsymbol{\alpha}' \in \partial\overline{W}$. De plus le sous ensemble $\Omega_R \subset \Omega$ pour $R > |\alpha|$ ne peut exister ailleurs que dans Ω : autrement dit, il n'existe pas de β avec $(\Omega - \beta)_R = \Omega_R$. En particulier, pour un tel R, $\mathrm{Per}_R(\Omega) = \{0\}$, et donc Ω n'est pas répétitif. □

Corollaire 2. *Si Ω est défini par $W = W_{\mathbf{x}}$, $\hat{\Omega}$ est minimal : pour tout $\Omega' \in \hat{\Omega}$, $\hat{\Omega}' = \hat{\Omega}$.*

Démonstration. Le quasicristal de dimension 1 Ω peut être vu comme un mot bi-infini sur un alphabet fini, où chaque lettre de l'alphabet indexe une différence d'éléments consécutifs de Ω. Pour Ω un ensemble modèle défini avec W, d'après le Lemme **??**, le mot qui indexe Ω est répétitif. La minimalité de $\hat{\Omega}$ suit de la Proposition 4.3 de page 78 de [**?**]. □

Corollaire 3. *Si Ω est défini par W, alors $\hat{\Omega}$ est un ensemble de Cantor. S'il est défini par $\overline{W}$ et n'est pas définissable par W, alors $\hat{\Omega}$ est un espace de Stone mais non un ensemble de Cantor. L'ensemble $\Omega \subset \hat{\Omega}$ est dense, tous ses points sont isolés, et $\hat{\Omega}_0 := \hat{\Omega} \setminus \Omega$ est un ensemble de Cantor homéomorphe à $\hat{\Omega}'$ pour tout $\Omega' \in \hat{\Omega} \setminus \Omega$.*

Démonstration. Dans le premier cas c'est conséquence du Corollaire **??**, puisque celui-ci montre que chaque point est point de accumulation et donc $\hat{\Omega}$ est parfait. Dans le deuxième cas, puisque Ω n'est pas répétitif, pour n'importe quelle $\alpha \in \Omega$, il ne peut exister de suite $\alpha_i + \Omega$ qui converge vers $\alpha + \Omega$. Donc, les points de Ω sont isolés. D'autre part, excepté $\Omega \subset \hat{\Omega}$, les quasicristaux ne contiennent pas de translatés de parties de Ω_R, $R > |\alpha|$ pour un α avec $\alpha' \in \partial\overline{W}$. Les quasicristaux $\Omega' \in \hat{\Omega}_0$ sont donc minimaux et leurs complétions coïncident avec $\hat{\Omega}_0$. On en conclut que $\hat{\Omega}_0$ est parfait et par conséquent est un ensemble de Cantor. □

Théorème 17. *Si $\{\alpha_i + \Omega\}$ converge dans la topologie quasicristalline, la suite des conjugués $\{\alpha_i'\}$ converge dans $\mathbb{R}$. Autrement dit l'application*

$$\Omega \longrightarrow W, \quad \alpha + \Omega \longrightarrow \alpha'$$

s'étend en une application continue $\hat{\Omega}_{\mathrm{qc}} \to \overline{W}$.

Démonstration. Supposons d'abord que Ω est défini par W, donc est répétitif. Soit

$$\Omega_{\hat{\alpha}} := \lim (\alpha_i + \Omega) \in \hat{\Omega}.$$

Puisque $\alpha_i + \Omega \subset \mathcal{O}_K$ pour tout i, $\Omega_{\hat{\alpha}} \subset \mathcal{O}_K$. Par le Lemme 4.1 de [**?**],

$$\bigcap_{\omega \in \Omega_{\hat{\alpha}}} (\omega' - \overline{W}) = \{c_{\hat{\alpha}}\}$$

pour un $c_{\hat{\alpha}} \in \mathbb{R}$. Observons que pour $\Omega_\alpha := \alpha + \Omega \in \hat{\Omega}$, puisque $\alpha' \in \omega' - W$ pour tout $\omega \in \alpha + \Omega$, $c_\alpha = \alpha' \in W$. L'application

$$\hat{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Omega_{\hat{\alpha}} \longmapsto c_{\hat{\alpha}}$$

s'étend à la conjugation et il faut montrer que cette extension est continue : une fois montrée cette continuité, il s'en suit que $c_{\hat{\alpha}} \in \overline{W}$. Soit alors $V' \ni c_{\hat{\alpha}}$ un voisinage ouvert ; on a

$$\bigcap_{\omega \in \Omega_{\hat{\alpha}}} [(\omega' - \overline{W}) \setminus V'] = \emptyset.$$

Puisque les $[(\omega' - \overline{W}) \setminus V']$ sont compacts, il existe un ensemble fini $F \subset \Omega_{\hat{\alpha}}$ tel que

$$\bigcap_{\omega \in F} [(\omega' - \overline{W}) \setminus V'] = \emptyset.$$

Ceci démontre qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\bigcap_{\omega \in (\Omega_{\hat{\alpha}})_R} [(\omega' - \overline{W}) \setminus V'] = \emptyset,$$

ce qui implique que

$$\bigcap_{\omega\in(\Omega_{\hat{\alpha}})_R} (\omega' - \overline{W}) \subset V'.$$

Donc, étant donné $\Omega_{\hat{\beta}} \in \hat{\Omega}$ avec

$$(\Omega_{\hat{\beta}})_R = (\Omega_{\hat{\alpha}})_R,$$

on aura que $c_{\hat{\beta}} \in V'$, ce qui démontre le Théorème dans le cas où Ω est défini à l'aide de W. Si maintenant Ω se définit par $\overline{W}$, il n'est pas répétitif mais l'argument ci-dessus montre que la conjugaison est continue sur l'ensemble de Cantor $\hat{\Omega}_0 = \hat{\Omega}\backslash\Omega$. Puisque les points de Ω sont isolés dans $\hat{\Omega}$, il suit que la conjugation est continue sur $\hat{\Omega}$ tout entier. □

References

[1] Baake, Michael & Grimm Uwe, *Aperiodic Order. Volume 1: A Mathematical Invitation.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **149**. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[2] Bellissard, Jean; Benedetti, Ricardo & Gambaudo, Jean-Marc. Spaces of tilings, finite telescopic approximations and gap-labeling. *Commun. Math. Phys.* **261** 1–41 (2006).

[3] Bertin, Marie José & Zaïmi, Toufik, Complex Pisot numbers in algebraic number fields. *C.R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I **353** (2015), 965–967.

[4] Cassels, J.W.S., *An Introduction to Diophantine Approximation.* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, **45**. Cambridge University Press, New York, 1957.

[5] Castaño Bernard, C. & Gendron, T.M., Modular invariant of quantum tori. *Proc. Lond. Math. Soc.* **109** (2014), Issue 4, 1014–1049.

[6] Connes, A., An essay on the Riemann hypothesis, arXiv 1509.05576.

[7] Diamond, Harold G. & Zhang, Wen-Bin (Cheung Man Ping), *Beurling Generalized Numbers*, Mathematical Surveys and Monographs **213**, AMS, Providence, 2016.

[8] Demangos, L. & Gendron, T.M., Quantum j-Invariant in Positive Characteristic I: Definitions and Convergence. Arch. Math. **107** (1), 23–35 (2016).

[9] Demangos, L. & Gendron, T.M., Quantum j-Invariant in Positive Characteristic II: Formulas and Values at the Quadratics. Arch. Math. **107** (2), 159–166 (2016).

[10] Demangos, L. & Gendron, T.M., Quantum Drinfeld Modules I: (2017) arXiv:1607.03027.

[11] Demangos, L. & Gendron, T.M., Quantum Drinfeld Modules II: Ray Class Fields. (2017) arXiv:1709.05337

[12] Deninger, C., Some analogies between number theory and dynamical systems on foliated spaces. *Documenta Mathematica*, Extra Volume ICM I (1998), 163–186.

[13] Drinfeld, V.G., Elliptic modules. Math Sbornik **94** (1974), 594–627.

[14] Drinfeld, V.G., Langlands conjecture for GL(2) over function field. *Proc. of Int. Congress of Math. (Helsinki, 1978)*, Acad. Sci. Fennica (1988), 28–43.

[15] Gekeler,E.-U., Zur Arithmetik von Drinfeld Moduln, Math. Ann. **262** (1983), 167–182.

[16] Goss, D., *Basic structures of Function Field Arithmetic*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[17] Hayes, D., A brief introduction to Drinfeld modules, in *The Arithmetic of Function Fields* (ed. D. Goss, D.R. Hayes & M.I. Rosen), Ohio State U. Mathematical Research Institute Publications **2**, pp. 313–402, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[18] Hof, Uniform distribution and the projection method. in *Quasicrystals and Discrete Geometry* (J. Patera, ed.), Fields Institute Monographs **10**, AMS, Providence, 1998.

[19] Lascar, Daniel, *La Théorie des Modèles en Peu de Maux*, Cassini, Paris, 2009.

[20] Manin, Yu., Real multiplication and noncommutative geometry, in *The Legacy of Niels Henrik Abel*, pp. 685–727, Springer-Verlag, New York, 2004.

[21] Meyer, Yves, *Nombres de Pisot, Nombres de Salem et Analyse Harmonique*, LNM **117**, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[22] Meyer, Yves, *Algebraic Numbers and Harmonic Analysis*, North-Holland, 1972.

[23] Meyer, Yves, Quasicrystals, Diophantine approximation and algebraic numbers. dans *Beyond Quasicrystals*, pages 3–16, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[24] Montgomery, Hugh L. & Vaughan, Robert C., *Multiplicative Number Theory I. Classical Theory.* Cambridge studies in advanced mathematics **97**. Cambridge U. Press, Cambridge, 2007.

[25] Moody, R., Meyer sets and their duals. in "The Mathematics of Long-Range Order (Waterloo, ON, 1995)". NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences, **489**, pp. 403–441, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[26] Narkiewicz, W., *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, 3rd Edition. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[27] Pink, R., discussion privée avec le premier auteur, le 21 octobre 2017.

[28] Pisot, Charles, La répartition modulo 1 et nombres algébriques. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa*, II, Ser. 7 (1938), 205–248.

[29] Rosen, M.I., The Hilbert class field in function fields. *Expo. Math* **5** (1987), 365–378.

[30] Salem, Raphaël, *Algebraic numbers and Fourier analysis.* Heath mathematical monographs, Boston, 1963.

[31] Schappacher, N., On the history of Hilbert's 12th problem. A comedy of errors. *Séminaires et Congrè* **3**, Société Mathématique de France, 1998, 243–273.

[32] Schlottmann, Martin, Generalized model sets and dynamical systems. *CRM Monogr. Ser.* **13**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, 143–159.

[33] Serre, J.-P., Complex multiplication, in *Algebraic Number Theory* (ed. J.W.S. Cassels and A. Frölich), 2nd edition, pp. 293–296, London Mathematical Society, 2010.

[34] Silverman, *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves.* Graduate Texts in Mathematics **151**. Springer-Verlag, New York, 1994.

[35] Thakur, D.S., *Function Field Arithmetic*, World Scientific, Singapore, 2004.

[36] Weil, A., *Basic Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin.

[37] Weil, A., On the Riemann hypothesis in function-fields. *Oeuvres Scientifiques*, Volumes I, II & III, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[38] Weil, Numbers of solutions of equations in finite fields. *Oeuvres Scientifiques*, Volumes I, II & III, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca, UNAM, Av. Universidad s/n, Lomas de Chamilpa, Cuernavaca, Morelos, CP62180, MÉXICO

E-mail address: `tim@matcuer.unam.mx`

Institut Mathématique de Jussieu et CNRS, Université Paris Diderot, Bâtiment Sophie Germain, 8 Place Aurélie Nemours, Paris 75013, FRANCE

E-mail address: `eric.leichtnam@imj-prg.fr`

Institut Mathématique de Jussieu et CNRS, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, Paris 75005, FRANCE

E-mail address: `pierre.lochak@imj-prg.fr`