



HAL
open science

Étude théorique et expérimentale de la dynamique des arbres de transmission surcritiques

Olivier Montagnier, Christian Hochard

► **To cite this version:**

Olivier Montagnier, Christian Hochard. Étude théorique et expérimentale de la dynamique des arbres de transmission surcritiques. 17e Congrès Français de Mécanique, 2005, Troyes, France. hal-04251706

HAL Id: hal-04251706

<https://hal.science/hal-04251706>

Submitted on 20 Oct 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Etude théorique et expérimentale de la dynamique des arbres de transmission surcritiques.

Olivier Montagnier [†], Christian Hochard^{*},

[†] Centre de Recherche de l'École de l'Air
Laboratoire de Modélisation de la Mécanique du Vol
BA 701, 13361 Salon Air
e-mail : oliviermontagnier@yahoo.fr

^{*}Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique
31 chemin Joseph Aiguier, 13402 Marseille Cedex 20

Résumé :

Ce travail traite de la dynamique des arbres de transmission surcritiques. Ces systèmes doivent être conçus de manière à minimiser les effets dynamiques dus à la rotation. Nous présentons l'étude dynamique d'un arbre monté sur suspensions viscoélastiques. Nous proposons des solutions analytiques pour le mouvement forcé, le mouvement libre et l'instabilité. Cette étude fait apparaître un critère de stabilité qui met en évidence l'effet déstabilisant de l'amortissement tournant et le gain de stabilité donné par les supports viscoélastiques sous certaines conditions. Enfin, nous validons le comportement par des essais surcritiques et des essais d'instabilités sur tubes pvc.

Abstract :

This work relates to the dynamic of supercritical drive shafts. These structures must be sizing to minimize the dynamic effects due to the rotation. We presented here a dynamic analysis of a drive shaft mounted on viscoelastic supports. We proposed analytical solutions for the mass unbalance motion, for the free motion and for the instability. This study shows an instability criterion that demonstrates the destabilizing effect of the internal (or rotational) damping and the positive effect of viscoelastic support under special conditions. Finally, we validate the motion with supercritical tests and instability tests on pvc tubes.

Mots clefs :

Arbre de transmission ; surcritique ; instabilité ; amortissement.

1 Introduction

Le besoin sans cesse croissant d'augmenter les performances des machines et des véhicules terrestres ou aériens implique un intérêt grandissant pour la conception des structures tubulaires à haute vitesse de rotation. Nous présentons ici une étude sur le comportement dynamique des arbres de transmission surcritiques. Surcritique signifie que la fréquence de rotation nominale de l'arbre est supérieure à sa première fréquence propre (donnée en première approximation par l'équation (1)).

$$f_1 = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (1)$$

où : L est la longueur de l'arbre, E le module selon l'axe du tube, I l'inertie de flexion, ρ la masse volumique du matériau et S la surface de la section du tube.

En général, cette première fréquence propre est la limite non franchie par les arbres de transmission.

D'après l'équation (1), cette limite a un impact direct sur la géométrie de la structure. En effet, pour un matériau donné, à fortiori le plus rigide et le plus léger possible (carbone haut module / époxy [1,2]), pour une section d'arbre donnée, généralement issu d'un calcul de résistance, la vitesse nominale va imposer la longueur de l'arbre. La transmission arrière d'hélicoptère correspond exactement à cette situation. Cette transmission est longue et sa fréquence de rotation est élevée. Dans ce cas, le non-franchissement de la première fréquence propre abouti classiquement à la conception d'un arbre en plusieurs tronçons. La conséquence directe est le nombre élevé de paliers et la maintenance associée. Pour cette structure, franchir la limite de la première fréquence propre et donc limiter le nombre de tronçons serait un gain de performances. Cependant, franchir cette limite n'est pas sans conséquences. Ce passage à une solution surcritique passive demande la maîtrise de nouveaux phénomènes.

Nous présentons ici l'étude dynamique d'un modèle poutre monté sur des suspensions viscoélastiques. Cette étude fait apparaître des solutions analytiques pour le mouvement forcé, le mouvement libre et les instabilités. Enfin, nous validons le comportement par des essais surcritiques et des essais d'instabilités sur tubes pvc. Ces essais sont aussi comparés à une modélisation numérique.

2 Un modèle d'arbre continu sur supports viscoélastiques

2.1 Orientation

Beaucoup de travaux traitent de l'analyse des fréquences propres d'arbres en général en composites (tube à paroi fine) avec ou sans prise en compte des paliers mais peu de travaux abordent le mouvement transitoire et la stabilité des tubes surcritiques [4]. Si nous cherchons à étudier ces deux phénomènes, il nous semble que le point important est la prise en compte des conditions limites. Aussi, nous faisons le choix de modéliser le tube simplement à partir d'une théorie poutre d'Euler-Bernoulli.

Le contrôle des vibrations pour des systèmes tournant à très haute vitesse a une grande importance. Une des idées pour contrôler et réduire les vibrations des systèmes arbre/rotors est l'utilisation de paliers actifs (paliers magnétiques par exemple). L'idée que nous développerons ici est l'utilisation d'un système passif c'est à dire l'utilisation d'éléments externes amortissants et élastiques. Les paliers les plus communément utilisés sont les paliers hydrodynamiques. Malgré ceci, le principal désavantage des paliers hydrodynamiques est la complexité de la mise en œuvre, le coût, les zones limitées d'utilisation et le faible tolérancement [5]. Les matériaux viscoélastiques peuvent être utilisés comme support de paliers pour arbres tournants. Ces supports déformables fournissent de l'amortissement externe qui peut augmenter la zone de stabilité du mouvement du système arbre/rotor [6]. Ainsi, les principaux avantages de ce type de palier sont la simplicité de conception, la simplicité de mise en œuvre et le faible coût.

2.2 Modèle et étude

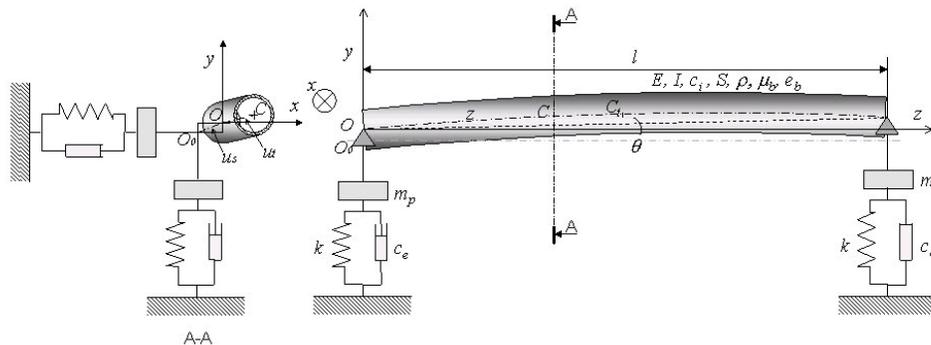


FIG. 1 – Arbre déformable en rotation sur suspensions viscoélastiques.

Nous considérons un arbre élastique continu appuyé/appuyé (figure 1) et amortissant (amortissement interne visqueux noté c_i). Les éléments viscoélastiques, parfaitement symétriques, sont représentés par une rigidité k et un amortissement externe visqueux (noté c_e). Le module de l'arbre en flexion est noté E et G en cisaillement. Une section d'arbre est définie par sa surface notée S et son moment d'inertie en flexion par rapport à x noté I . Les paliers sont supposés rigides et de masse m_p . L'effet gyroscopique des sections de l'arbre est pris en compte. La pesanteur est négligée dans le cas d'un arbre horizontal, dans le cas d'un arbre vertical son effet est nul (cas des centrifugeuses). Le défaut d'excentricité du tube est défini par la fonction ϵ

de z . Le déplacement de corps rigide (axe non déformé du tube) est composé d'un déplacement et d'une rotation autour de C_{t0} (centre du tube non déformé) notés respectivement u_s et θ_s . Nous supposons que les éléments viscoélastiques restent dans le plan $(O, \underline{x}, \underline{y})$. Le déplacement des centres de section du tube C par rapport à l'axe non déformé est noté u_t . Le déplacement total de C s'écrit $u(z,t)=u_s(t)+\frac{l-2z}{2}\theta_s(t)+u_t(z,t)$. L'équation locale du mouvement de l'arbre et les équations de couplage s'écrivent alors ($f'=\partial f/\partial z$; $\dot{f}=\partial f/\partial t$) :

$$\ddot{u}-\frac{I}{S}\ddot{u}''+i\Omega\frac{J}{S}\dot{u}''+\frac{EI}{\rho S}u_i'''+\frac{c_i}{\rho S}(\dot{u}_t-i\Omega u_t)=\varepsilon(z)\Omega^2 e^{i\Omega t} \quad \forall z \in [0,l] \quad (2)$$

$$\ddot{u}_s+\frac{c_e}{m_p}\dot{u}_s+\frac{k}{m_p}u_s=-\frac{1}{2m_p}\int_0^l \rho S [\ddot{u}-\varepsilon\Omega^2 e^{i\Omega t}] dz \quad (3)$$

$$\ddot{\theta}_s+\frac{c_e}{m_p}\dot{\theta}_s+\frac{k}{m_p}\theta_s=-\frac{1}{m_p}\int_0^l \rho S \frac{l-2z}{l^2} [\ddot{u}-\varepsilon\Omega^2 e^{i\Omega t}] dz \quad (4)$$

avec dans le cas d'un tube $I=\frac{\pi}{4}(R_e^4-R_i^4)$, $J=2I$.

2.3 Analyse des vibrations forcées

Nous déterminons le comportement du système en présence du balourd du tube à vitesse constante. Par définition des modes stationnaires (solution en phase avec le mouvement), l'amortissement interne de l'arbre ne travaille pas. L'équation du mouvement se simplifie et peut s'écrire sous la forme

$$\ddot{u}-\frac{I}{S}\ddot{u}''+i\Omega\frac{J}{S}\dot{u}''+\frac{EI}{\rho S}u_i''=\varepsilon(z)\Omega^2 e^{i\Omega t} \quad \forall z \in [0,l] \quad (5)$$

Pour résoudre le système, nous utilisons la base de déplacements harmonique en sinus. Les déplacements s'écrivent sous la forme $u(z,t)=U_s+\frac{l-2z}{2}\Theta_s+\sum U_m \sin(\frac{\pi m}{l}z)e^{i\Omega t}$ où U_s , Θ_s et U_m sont des fonctions de l'espace définies en complexe, et n est un entier naturel caractérisant le mode de vibration.

Pour résoudre le problème avec la base d'approximation, nous écrivons le principe des travaux virtuels pour passer de l'équation locale à l'équation globale. En exploitant l'orthogonalité des modes, nous obtenons la solution forcée, qui s'écrit :

$$U_m = \frac{\frac{1}{n\pi} r_{mn} \int_0^l (1-(-1)^n \frac{z}{l}) \varepsilon dz + \left[-1 + \frac{A_{en}}{\Omega} i + \left(\frac{\omega_{0n}}{\Omega} \right)^2 \right] \int_0^l \varepsilon \sin\left(\frac{\pi m}{l} z\right) dz}{\frac{4}{(n\pi)^2} r_{mn} + \left[\left(\frac{\Omega_n}{\Omega} \right)^2 - \left(1 + \frac{I-J}{S} \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 \right) \right] \left[-1 + \frac{A_{en}}{\Omega} i + \left(\frac{\omega_{0n}}{\Omega} \right)^2 \right]} \quad \forall n \quad (6)$$

$$U_s = \frac{r_{m1} \Omega^2}{-\Omega^2 + A_{e1} i \Omega + \omega_{01}^2} \left[\sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n\pi} U_m + \frac{1}{2l} \int_0^l \varepsilon dz \right], \quad \Theta_s = \frac{2}{l} \frac{r_{m2} \Omega^2}{-\Omega^2 + A_{e2} i \Omega + \omega_{02}^2} \left[\sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n\pi} U_m + \frac{1}{2l} \int_0^l (1-2\frac{z}{l}) \varepsilon dz \right]$$

avec $\Omega_n^2 = \frac{EI}{\rho S} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^4$, $\omega_{0n}^2 = k/m_p + \frac{m_a}{2(2+(-1)^n)}$, $A_{en} = c_e/m_p + \frac{m_a}{2(2+(-1)^n)} = 2\xi_e \omega_{0n}$, $r_{mn} = m_a/m_p + \frac{m_a}{2(2+(-1)^n)}$.

où Ω_n la pulsation propre d'une poutre en flexion appuyée/appuyée, ω_{0n} est la pulsation propre du mode rigide en déplacement pour n impair et la pulsation propre du mode rigide en rotation autour de C_t pour n pair. En supposant que l'amortissement est suffisamment faible, nous pouvons déduire de ces équations la fréquence des modes propres du système couplé en cherchant à annuler la partie réelle du dénominateur de U_m . Après calculs, nous obtenons les 4 fréquences propres de la $n^{ième}$ forme harmonique

$$\omega_{nk} = \pm \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{\Pi_n - \Psi_n}} \sqrt{\Omega_n^2 + \Pi_n \omega_{0n}^2 \pm \sqrt{\Omega_n^2 + 2\Omega_n^2 \omega_{0n}^2 (\Pi_n - 2\Psi_n) + \Pi_n^2 \omega_{0n}^4}} \quad k \in \{1, \dots, 4\} \quad (7)$$

avec $\Pi_n = 1 + \frac{I-J}{S} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $\Psi_n = \frac{4}{n^2 \pi^2} r_{mn}$ et $\omega_{n1} < \omega_{n2} < 0 < \omega_{n3} < \omega_{n4}$.

2.4 Analyse des vibrations libres et des instabilités

Dutt et Nakra ont étudié la stabilité d'un système arbre/rotor montés sur supports viscoélastiques [7]. Ils ont conclu que la stabilité augmente avec l'introduction de supports viscoélastiques comparativement aux supports élastiques ou visqueux. Une des rares études analytiques sur la stabilité des systèmes arbre/rotors est présenté par Tondl [8]. Il montre alors que l'amortissement externe a un effet stabilisant alors que l'amortissement interne (appelé aussi tournant) à l'effet contraire.

Dans notre cas, en prenant des solutions de la forme $u(z,t) = \left[U_{sn} + \frac{1-2z}{2} \Theta_{sn} + U_{mn} \sin\left(\frac{\pi n}{l} z\right) \right] e^{i\lambda_n t}$, le système s'écrit après calcul sous la forme d'une seule équation d'ordre 4 en λ_n :

$$(1 - \Psi_n) \lambda_n^4 - [\Gamma \Omega + i[\Pi_n^* A_{en} + A_{in}]] \lambda_n^3 + [-\Omega_n^2 - \Pi_n^* \omega_{0n}^2 - A_{in} A_{en} + i\Omega[\Gamma A_{en} + A_{in}]] \lambda_n^2 + [\Gamma \omega_{0n}^2 \Omega + A_{in} A_{en} \Omega + i[A_{in} \omega_{0n}^2 + A_{en} \Omega_n^2]] \lambda_n + \Omega_n^2 \omega_{0n}^2 - i A_{in} \omega_{0n}^2 \Omega = 0 \quad (8)$$

avec $A_{in} = \frac{c_i}{\rho S} = 2\xi_i \Omega_n$, $\Pi_n^* = 1 + \frac{I}{S} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $\Gamma = \frac{J}{\rho S}$.

Nous négligeons l'effet gyroscopique et écrivons les solutions sous une forme partie réelle et partie imaginaire $\lambda_n = \omega_n^* + iA_n$. La partie réelle est une pulsation propre et la partie imaginaire est un amortissement (homogène à une pulsation propre), nous avons alors $\omega_n^* \gg A_n$. Cette hypothèse simplifie largement la résolution de l'équation complexe (8). Si nous écrivons la partie réelle de cette équation au premier ordre, nous montrons que ω_n est régie par une équation bicarrée simple qui à l'avantage d'être indépendante de A_n . Nous en déduisons les ω_{nk}^* solution de l'équation générale

$$\omega_{nk}^* = \pm \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \Psi_n}} \sqrt{\Omega_n^2 + \Pi_n^* \omega_{0n}^2 \pm \sqrt{\Omega_n^4 + 2(\Pi_n^* - 2\Psi_n) \Omega_n^2 \omega_{0n}^2 + \Pi_{nk}^{*2} \omega_{0n}^4}} \quad k \in \{1, \dots, 4\} \quad (9)$$

avec $\omega_{n1}^* < \omega_{n2}^* < 0 < \omega_{n3}^* < \omega_{n4}^*$.

Ces pulsations sont égales aux pulsations ω_{nk} si nous négligeons l'effet gyroscopique dans l'équation (7). La partie imaginaire de l'équation (8) au premier ordre, donne une relation entre A_{nk} et les puissances de ω_{nk} . Cette relation d'amortissement donne la stabilité du système mécanique. En effet, la solution étant en $e^{(-A_{nk} + i\omega_{nk})t}$, le système sera instable si une des fonctions A_{nk} devient négative pour une valeur élevée de Ω . Après calculs, nous montrons que les modes λ_{n3} et λ_{n4} peuvent être instable et les vitesses de rotation limites pour ces deux modes sont données par :

$$\Omega_{\lim_n3} = \omega_{n3}^* \left(1 + \frac{A_{en} \Pi_n^* \omega_{n3}^{*2} - \Omega_n^2}{A_{in} \omega_{n3}^{*2} - \omega_{0n}^2} \right), \quad \Omega_{\lim_n4} = \omega_{n4}^* \left(1 + \frac{A_{en} \Pi_n^* \omega_{n4}^{*2} - \Omega_n^2}{A_{in} \omega_{n4}^{*2} - \omega_{0n}^2} \right) \quad (10)$$

L'amortissement interne a un effet déstabilisant et l'amortissement externe à un effet stabilisant. De plus Π_n^* étant proche de 1 pour n petit, nous remarquons que si les pulsations des deux modes couplés ω_{n3}^* et ω_{n4}^* sont proches de la fréquence propre du mode rigide ω_{0n} , la stabilité augmente. Ce cas correspond au cas où le mode de l'arbre en flexion est proche du mode rigide.

3 Essais stationnaires, transitoires et surcritiques

Le comportement stationnaire, le comportement transitoire et la stabilité sont étudiés expérimentalement sur une machine d'essai de tubes à haute vitesse de rotation (figure 2 (a)). Le banc de test est constitué d'un moteur électrique entraînant une poulie courroie monté sur deux paliers rigides permettant d'atteindre une vitesse nominale de 12000tr/min. Cette poulie entraîne par l'intermédiaire d'un accouplement très souple et non amortissant un tube simulant l'arbre de transmission. Cet arbre est monté sur des paliers à roulements rotules modifiés pour obtenir des inclinaisons allant jusqu'à ± 9 degrés (figure 2 (b)). Ces paliers sont eux-

mêmes liés au bâti par l'intermédiaire de supports viscoélastiques en élastomère travaillant en cisaillement. Les mouvements sont mesurés par des capteurs lasers sans contact (mesure par triangulation) positionnés radialement et orthogonaux (figure 2 (c)). Ils donnent les positions relatives des points du tube situés sur les axes x et y . Un calcul de géométrie plane permet de remonter à la position du centre du tube à chaque instant. D'autre part, ces capteurs peuvent se déplacer le long de l'axe du tube pendant la phase de fonctionnement du banc. Cette possibilité permet la mesure des déformés modales.

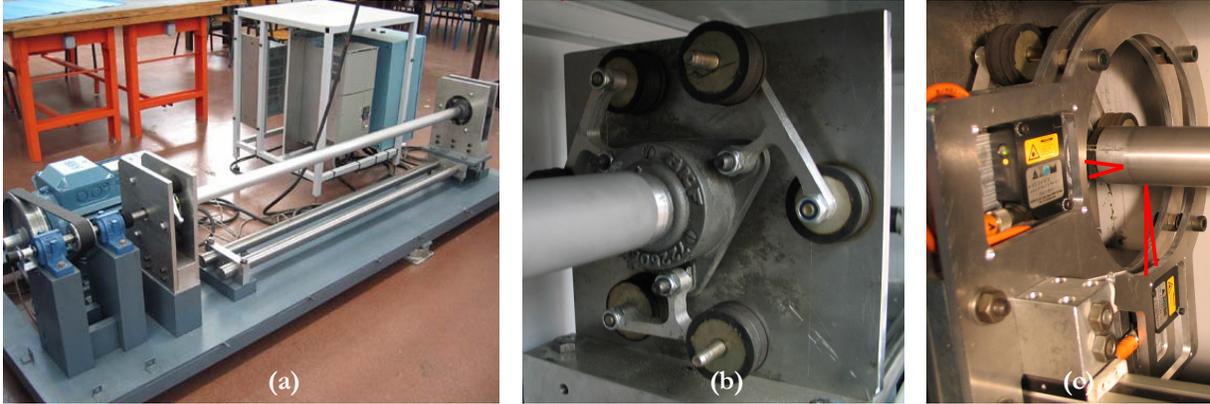


FIG. 2 – Banc d'essais (a), paliers et élastomères (b) et capteurs lasers (c).

Des essais sont réalisés sur un tube en aluminium de 1640mm de long, de 50mm de diamètre et de 2mm d'épaisseur (figure 2 (a)). La figure 3 montre une comparaison entre l'expérience et la théorie pour le passage du premier mode du tube. Les figures représentent la position du centre du tube ($x=820\text{mm}$) à chaque instant dans le plan (x,y) , cette position étant décrit temporellement selon le troisième axe de la figure. Le tube suit une loi linéaire de montée en régime durant 2.5s jusqu'à la fréquence de rotation de 50Hz. Cette montée en régime est suivie d'un palier durant 5.5s. Le calcul théorique est réalisé à partir d'un schéma numérique de Newmark sur les équations globales (calcul sur la base d'approximation harmonique) [3]. Le balourd introduit dans ce calcul a été estimé pour obtenir une corrélation entre l'amplitude expérimentale et l'amplitude théorique à 50Hz après la phase transitoire. Les figures (3a) et (3b) montrent une bonne corrélation : mouvement très stable avant le mode et fortement perturbé après le passage du mode. Toutefois l'expérience montre un comportement non symétrique alors que le modèle fait l'hypothèse d'un système parfaitement symétrique. En conséquence, le calcul numérique montre un mouvement circulaire dans le plan (x,y) .

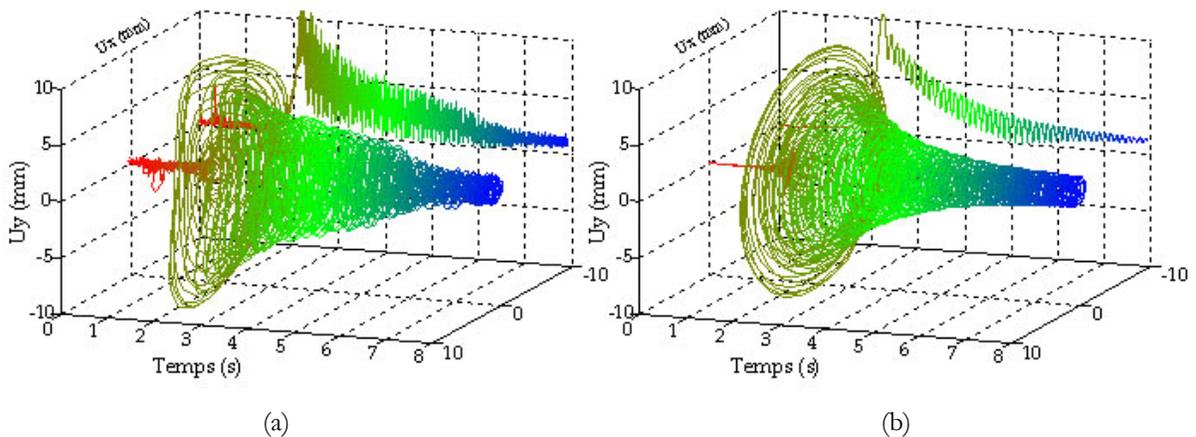


FIG. 3 – Passage du premier mode du tube en aluminium (montée linéaire en 2.5s jusqu'à 50Hz suivie d'un palier durant 5.5s) : expérimental (a) et théorique (b).

L'instabilité du tube en aluminium a été estimée à 167Hz. Cette vitesse correspond à des énergies trop importantes pour risquer une rupture par instabilité, aussi l'étude d'instabilité est réalisée à partir de tubes en pvc. Ce matériau a l'avantage d'être peu rigide et amortissement ce qui va dans le sens de l'instabilité décrite par le critère (10). La figure 4 montre les modes et les zones de stabilité théorique pour le cas de tube pvc de

diamètre 50mm et d'épaisseur 3mm monté sur le banc d'essais. La zone de stabilité est remarquable dans le sens où cette stabilité est très localisée. Dans le cas où la fréquence du mode rigide (autour de 51Hz) est proche de la première fréquence propre de flexion (f_1), c'est-à-dire pour une longueur de 600 à 900mm, le couplage de ces deux modes est alors très fort et l'effet de l'amortissement externe est amplifié. Les 4 premiers essais réalisés sur cette instabilité ($f_{1\text{ exp}}$ et $f_{\text{lim exp}}$) montre l'existence d'une zone de stabilité et corrèle en partie les prévisions théoriques.

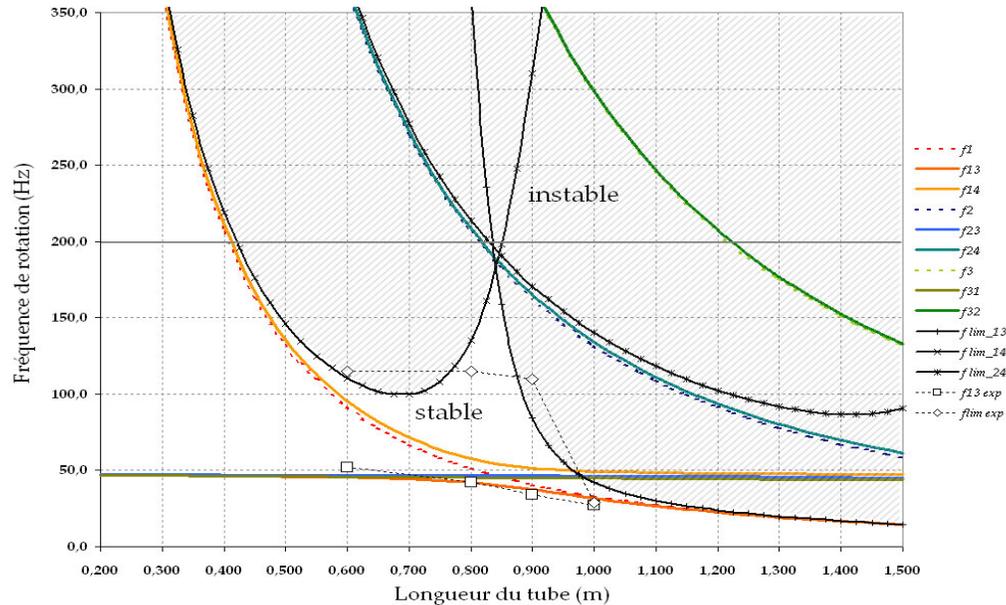


FIG. 4 – Zone d'instabilité et modes de tubes en pvc en fonction de la longueur du tube (m).

4 Conclusions

Ce travail présente une étude théorique et expérimentale de la dynamique des arbres de transmissions surcritiques. Le comportement transitoire et stationnaire de la structure surcritique montre une bonne corrélation entre l'expérience et le modèle numérique. Cette étude met en évidence des points originaux au niveau de la stabilité du système dynamique, notamment un critère de stabilité qui met en évidence l'effet déstabilisant de l'amortissement tournant. D'autre part, elle met en évidence le gain de stabilité quand la fréquence propre des supports correspond à la fréquence propre de l'arbre. Ces deux effets sont corrélés par des expériences réalisées sur des tubes en PVC.

References

- [1] Montagnier, O. & Hochard, Ch. (2004). « *Design of high rotation frequency composite tubes* », 11th European Conference on Composite Materials, Rhodes, Greece.
- [2] Hochard, Ch., Payan, J., & Montagnier, O., (2005). « *Design and computation of laminated composite structures* », Composite science and technology.
- [3] M. Lalanne et G. Ferraris, 1998. « *Rotor dynamics prediction in engineering* », Wiley, second edition.
- [4] Song, O., Jeong, N.-H., & Librescu, L., (2001). « *Implication of conservative and gyroscopic forces on vibration and stability of an elastically tailored rotating shaft modeled as a composite thin-walled beam* », Journal of Acoustical Society of America, 109 (3), 972–981.
- [5] Shabaneh, N.H. & Zu, J. W., (2000). « *Dynamic analysis of rotor-shaft systems with viscoelastically supported bearings* », Mechanism and machine theory, **35**, 1313-1330.
- [6] Kirk, R.G. & Gunter, E.J., (1972). « *The effect of support flexibility and damping on the synchronous response of a single mass flexible rotor* », ASME, Journal of Engineering for Industry, **94** (1).
- [7] Dutt, J.K. & Nakra, B.C., (1992). « *Stability of Rotor Systems with viscoelastic supports* », Journal of Sound & Vibration, **153**, 89-.
- [8] Tondl, A., (1965). « *Some problems of rotor dynamics* », Czechoslovak academy of sciences, Prague.