



Fissure oscillante d'un film mince fragile : une loi de propagation géométrique

Benoit Roman, Basile Audoly, Pedro Reis, Denis Vallet

► To cite this version:

Benoit Roman, Basile Audoly, Pedro Reis, Denis Vallet. Fissure oscillante d'un film mince fragile : une loi de propagation géométrique. 17e Congrès Français de Mécanique, Aug 2005, Troyes, France. pp.1-6. ⟨hal-04251682⟩

HAL Id: hal-04251682

<https://hal.science/hal-04251682v1>

Submitted on 20 Oct 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Fissure oscillante d'un film mince fragile : une loi de propagation géométrique

B. Roman¹, B. Audoly², P. M. Reis³, et D. Vallet¹

¹PMMH, UMR 76236 CNRS/ESPCI, 10 rue Vauquelin 75231 cedex 5 Paris, France

²LMM, UMR 7607 CNRS/UPMC, 4 place Jussieu, case 162, 75252 Paris cedex 05, France

³Manchester Center for Nonlinear Dynamics, Univ. of Manchester, M139PL UK.
benoit@pmmh.espci.fr

Résumé :

Nous étudions la propagation d'une fissure fragile dans une feuille mince couplée à de large déplacements hors du plan, comme lorsque l'on déchire une feuille mince avec un objet rigide. En prenant en compte la séparation d'échelle entre les énergies de courbure et d'extension du film, et en se basant sur la théorie classique de la rupture, nous montrons que ces fissures se propagent selon un ensemble de lois géométriques simples dans la limite de feuilles minces. En particulier, cela permet d'expliquer les formes de fissure oscillantes observées récemment : les oscillations ont une origine géométrique. L'intégration numérique de nos règles géométriques reproduit le chemin de découpe ainsi que l'évolution temporelle lors de la propagation, pour différentes géométries de l'objet de découpe.

Abstract :

We study the propagation of brittle fracture coupled to large out-of-plane bending, as when a brittle elastic thin sheet is torn by a rigid moving object. Taking into account the separation of the film's bending and stretching energies and using classical fracture theory we show that such cracks propagate according to a simple set of geometrical rules in the limit of vanishing thickness. In particular, this provides some insight into the geometrical origin of the oscillatory fracture patterns reported in two recent experiments. Numerical integration of our geometrical rules accurately reproduce both the shape of the fracture pattern and the detailed time evolution of the propagation of the crack tip, for various geometries of the cutting object.

Mots-clefs :

fissure, structures minces

1 Introduction

Les instabilités de propagation de fissures sont l'objet de nombreuses études récentes. Certaines ont été stimulées par des observations expérimentales de fissures oscillantes qui permettent de tester les théories existantes. Une transition, mal comprise, vers un chemin oscillant est observée lorsque des feuilles d'élastomère étirés biaxialement sont percées et que la fissure se propage dynamiquement (1). Un autre exemple est celui de la propagation quasistatique de fissures dans des lamelles de verre ou de silicium soumises à un gradient thermique (2). Malgré leur apparente simplicité, ces expériences ont généré plusieurs études théoriques et numériques (3).

Nous étudions ici un nouveau type de fissure oscillante décrite dans deux expériences indépendantes (5; 6). Ici, la propagation de la fissure est fortement influencée par de grands déplacements hors du plan de la feuille à cause de la présence d'un indenteur forcé au travers de la feuille. Comme sur le diagramme Fig. 1, l'indenteur se déplace en ligne droite, et est perpendiculaire au film encastrée à ses bords. La feuille mince est formée d'un matériau fragile qui présente très peu de

déformations plastiques lors de la fissure, les deux bords déchirés restant plans, au contraire du régime ductile pour lequel une cascade de flambage est observée (9).

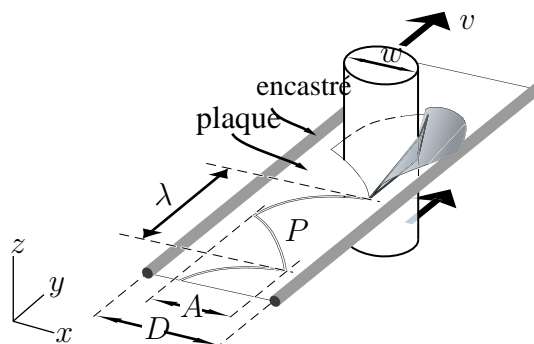


FIG. 1 – Chemin de fissure oscillant lorsqu'un indenteur est forcé à travers un film mince encasté sur ses bords (5).

Pour des indenteurs assez gros, avec une section circulaire ou rectangulaire, la découpe se fait selon une courbe périodique non-sinusoïdale très régulière et reproductible. Chaque période est formée de deux courbes lisses séparées par un changement brutal du signe de la courbure. La pointe de la fissure évolue généralement de façon quasistatique (à une vitesse comparable à celle de l'indenteur) mais aussi de façon très rapide (phases dynamiques) après chacun de ces changements de direction.

Une transition entre des découpe droite et oscillante est obtenue lorsque la largeur de l'indenteur est décroît jusqu'à des valeurs de l'ordre de l'épaisseur du film (5; 6). Mais ici on s'intéressera au régime oscillant, où l'indenteur est de très grande largeur devant l'épaisseur du film h : on observe alors que la morphologie de la découpe est indépendante de v (tant qu'elle reste petite devant la vitesse de propagation du son dans le matériau), de l'épaisseur h ou de la largeur D de la bande de film considérée. La seule longueur pertinente étant donc la largeur de l'indenteur w , l'amplitude A et la longueur d'onde λ suivent une loi linéaire en fonction de celle-ci (5).

L'indentation d'une plaque par un coin a été étudié dans le cas de fissure ductile à cause de son intérêt pratique concernant la collision d'une coque de bateau sur un rocher (4), mais nous n'avons pas trouvé d'études du cas d'une fissure fragile. Ghattak et Mahadevan (6) présentent une approche descriptive du phénomène mais ne donnent aucune explication basée sur les principes de la théorie de propagation de fissure, ce qui est l'objet du présent article.

2 Une propagation selon des règles géométrique

L'élasticité de plaques est décrite par des équations non-linéaires aux dérivées partielles (par exemple les équations de Föppl-von Kármán dans la limite des faibles deflections), équations qu'il est difficile à coupler à celles de la théorie de la fissure. Nous devons nous en tenir à une simplification qui consiste à négliger l'énergie élastique de courbure devant l'énergie élastique membranaire, qui seule pourra être comparable à l'énergie de fissure. Ceci est justifié par le fait que le film est très mince (typiquement $h/D \sim 10^{-3}$ dans nos expériences). Bien que l'énergie de courbure soit négligée, il n'en reste pas moins que la courbure de la plaque hors de son plan affecte de façon très importante la répartition des contraintes.

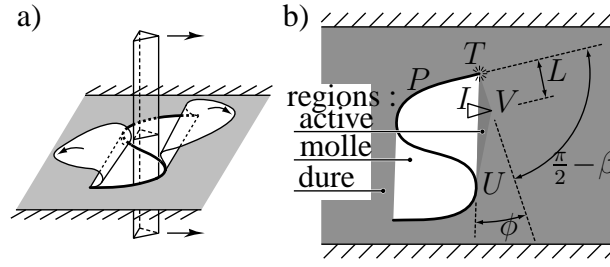


FIG. 2 – Construction géométrique. (a) grandes rotations dues à la présence de l’indenteur. La zone molle, en blanc, s’accommode de la présence de l’objet sans étirement. (b) Représentation en projection sur le plan de la feuille, montrant en grisé la zone active, l’angle de chargement α , et la direction de propagation β

Pour un chemin de fissure quelconque, nous appelons “zone molle” l’enveloppe convexe du chemin de fissure (en blanc sur la Fig. 2a). Si l’intersection de l’indenteur avec le plan du film reste contenu dans cette région, la plaque peut s’accommoder de sa présence en se courbant simplement, sans générer de tension. La contribution à l’énergie élastique de cette configuration est donc insuffisante pour propager la fissure.

Lorsque l’indenteur dépasse cette zone molle, au contraire, le film se retrouve étiré comme on le voit sur le schéma Fig. 1, ce qui peut provoquer la propagation de la fissure. Dans la configuration Fig. 2(b), par exemple, le segment $[TU]$ est étiré pour former la ligne brisée $[TVU]$. Tout point initialement dans la région (TUV) subira également un étirement, déformation d’ordre $\epsilon_m \approx \mathcal{L}(TVU)/\mathcal{L}(TU) - 1 \sim \phi^2/2$, si $\mathcal{L}(\cdot)$ est la longueur d’une ligne brisée. L’angle $\phi \ll \pi/2$ est défini par la limite de la zone molle $[TU]$, et la partie la plus enfoncée de l’indenteur, V (Fig. 2b). Les déformations importantes sont localisées dans une zone qui est triangulaire $[TUV]$ dans le cas de la Figure 2(b), mais qui peut être déterminée dans le cas général de la façon suivante : partant de l’union du chemin de fissure d’une part et de l’intersection de l’indenteur avec le plan de la feuille, d’autre part, on en calcule l’enveloppe convexe, à laquelle on soustrait (au sens des ensembles) la zone molle. Cette région, appelée “zone active”, sera notée $\mathcal{A}(P, I)$ pour rappeler sa dépendance en la position de l’indenteur I et le chemin de fissure P .

Les contraintes concentrées dans la zone active sont responsables de la propagation de la fissure. L’énergie élastique du film peut être estimée comme

$$\mathcal{E}(P, I) = Eh \int_{\mathcal{A}(P, I)} dx dy \epsilon^2(x, y) \approx \frac{E h L^2 \phi^5}{40}, \quad (1)$$

où la zone d’intégration est $\mathcal{A}(P, I)$; x, y sont les coordonnées le long du plan du film, L est la distance de l’indenteur à la pointe de la fissure, et E est le module de Young du matériau. Un ordre de grandeur de cette relation vient simplement du fait que les déformations $\epsilon(x, y)$, sont d’ordre $\epsilon_m = \mathcal{O}(\phi^2)$ dans la région active, et le préfacteur $1/40$ peut être obtenu par une estimation plus précise de la distribution des contraintes.

Le critère de propagation de la fissure (critère de Griffith(8)) est un équilibre entre l’énergie élastique relaxée par la propagation de la pointe et celle dissipée près de la pointe de la fissure (destruction de liens atomique ou moléculaire, nucléation de défaut, etc...). Ces processus dissipatifs sont pris en compte collectivement en introduisant une énergie de fissure globale Γ , avec la dimension d’une tension de surface. L’avance de la fissure de $\delta\ell$ dissipe ainsi une énergie $\Gamma h \delta\ell$. Nous ferons l’approximation d’une énergie de fissure Γ constante dans toute

l'expérience. Nous obtenons le critère de propagation suivant

$$\phi \geq \alpha, \quad \text{où } \alpha = [8\Gamma/(EL)]^{1/4}. \quad (2)$$

en équilibrant le taux de libération d'énergie élastique $\delta\mathcal{E}/\delta\ell \approx (\partial\mathcal{E}/\partial\phi) \delta\phi/\delta\ell$, avec le taux de dissipation d'énergie par unité de longueur de fissure créée, Γh , et en notant que la géométrie impose $\delta\phi/\delta\ell = 1/L$. Lorsque cette inégalité 2 est satisfaite, la fissure se propage, et reste immobile sinon. La faible dépendance en L (puissance $1/4$) permet de remplacer dans Eqn. (1) par w la largeur de l'indenteur, puisque c'est bien l'ordre de grandeur de L . Nous prendrons donc α constant dans notre simulation numérique.

Il nous faut encore déterminer la direction de propagation de la fissure, ce qui est une question importante en théorie de la fissure. Selon un critère usuel, le *principe de symétrie locale*, la fissure sélectionne la direction dans qui annule le chargement de cisaillement (mode II) (11). Comme vu plus haut sur la figure 2(b), la propagation est générée par les tensions associées à l'étirement de la zone active le long du segment $[TU]$. Près de la pointe de la fissure, les contraintes d'ouverture (mode I) sont donc essentiellement dirigées parallèlement au bord de la zone active (TV). Selon le principe de symétrie locale, la propagation se fera donc approximativement perpendiculairement à cette direction : l'angle β défini sur la figure 2(b) comme $\pi/2$ moins l'angle entre le bord $[TV]$ de la zone active et la direction de propagation doit être petit, et sera pris comme constant dans ce modèle. Un calcul *ab initio* de β doit prendre en compte la solution asymptotique du problème de fissure près de la pointe, calcul que nous ne mènerons pas ici.

En résumé, pour un chemin de fissure et une position arbitraire de l'indenteur, notre modèle de fissure peut être implémenté de la façon suivante : i) calcul de l'enveloppe convexe du chemin de fissure et donc de la zone molle ; ii) détermination de l'ensemble formé de la réunion du chemin de fissure et de l'intersection de l'indenteur avec le plan de la plaque, puis calcul de l'enveloppe convexe de cet ensemble ; iii) calcul de la zone active par différence de ces deux enveloppes convexes ; iv) calcul de ϕ ; v) si $\phi \geq \alpha$, propagation de la fissure selon la direction donnée par β jusqu'à ce que ϕ diminue à une valeur inférieure à α . Cet algorithme donne ainsi des règles de propagation de la fissure en utilisant seulement une *construction géométrique bidimensionnelle*. L'élasticité intervient à travers deux paramètres du modèle : les angles α et β .

La simulation de ce modèle génère des oscillations spontanées du chemin de fissure pour des valeurs génériques des paramètres α et β . De plus, notre modèle est capable d'expliquer les différentes observations expérimentales (5). En premier lieu, toutes les caractéristiques des plaques apparaissent seulement à travers les angles α et β , et la position des conditions aux limites d'encastrement n'apparaît pas, laissant ainsi la taille w de l'indenteur comme unique longueur caractéristique. Ceci explique pourquoi, dans le régime considéré $w \gg h$, amplitude et longueur d'onde varient toutes deux linéairement avec w , et sont indépendantes de D , v et h . De plus, le modèle reproduit finement le chemin de fissure obtenus (Fig. 3b), mais aussi les détails de l'évolution temporelle de la position de la fissure.

Pour la comparaison théorie-expérience, nous avons procédé de la façon suivante. Le dispositif expérimental est décrit dans (5). Nous utilisons ici un seul type de film (polypropylène bi-étiré), mais l'influence du type de film a été précisée dans (5). Les paramètres α et β , qui caractérisent les propriétés mécaniques du film ont été fixés une fois pour toute en minimisant l'erreur entre la prédiction numérique et le résultat expérimental sur une série de forme d'indenteur (section circulaire, carrée et rectangulaire), et de leur orientation. La valeur trouvée, $\alpha = 0.20$, $\beta = 0.03$ a été utilisée ensuite sans plus d'ajustement. Notons que la valeur de α

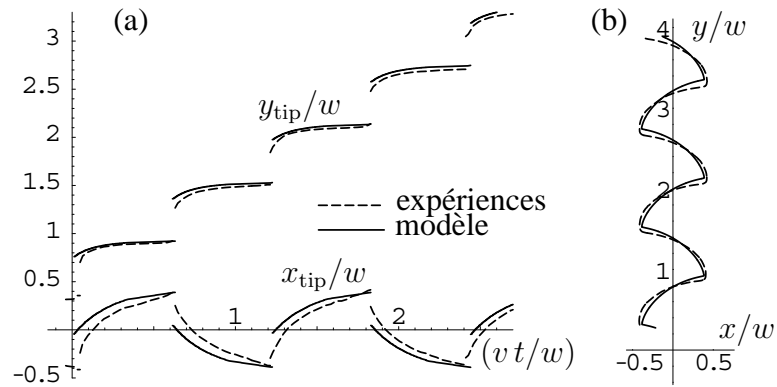


FIG. 3 – Comparaison entre le modèle géométrique ($\alpha = .20$ et $\beta = 0.03$) et l'expérience ($w = 20.4\text{mm}$, $h = 50\mu\text{m}$, $v = 1.2\text{mm}s^{-1}$) pour un indenteur cylindrique. (a) série temporelle des coordonnées longitudinale, $y_{\text{tip}}(t)/w$, et transverse, $x_{\text{tip}}(t)/w$, de la pointe de la fissure en fonction de l'avance de l'indenteur (noter les sauts indiquant des phases de propagation dynamique). (b) motif de découpe final

est cohérente avec l'estimation de l'Eq. (2) pour une longueur $L = \mathcal{O}(10^{-2}m)$, en utilisant $\Gamma \sim 1\text{kJ/m}^2$ and $E \sim 1\text{GPa}$, qui sont des valeurs typiques pour les films considérés.

Sur la figure 3 est représentée, pour un indenteur cylindrique (exemple typique), la position de la fissure en fonction du temps ; les résultats numériques (ligne continue) et expérimentaux (pointillés) sont en excellent accord. En particulier, notons que les changements brusques de directions accompagnés par des bouffées de propagation dynamique découlent simplement des règles i)-v). Nous en concluons que ces phases de propagations dynamiques sont d'origine géométrique, et sont intrinsèques au phénomène de déchirure.

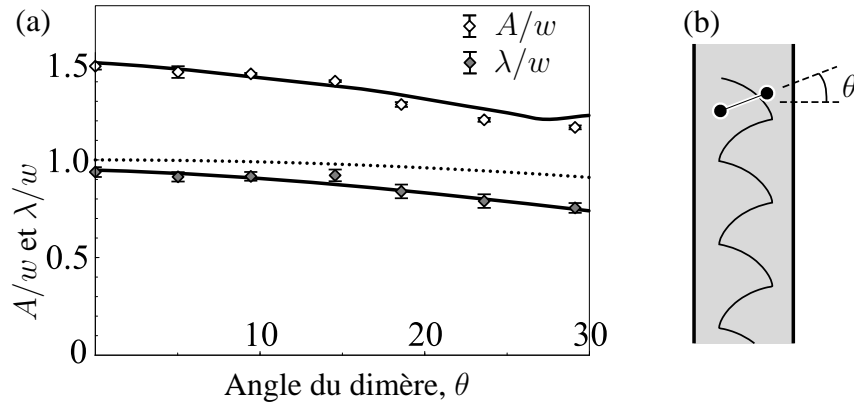


FIG. 4 – Indenteurs à section non circulaire Comparaison théorie-expérience pour les amplitudes A/w , et longueur d'onde λ/w adimensionnées, pour le motif obtenu avec un dimère (deux cylindres parallèles) tournés d'un angle θ , comme sur le diagramme (b).

Une autre caractéristique importante de notre modèle est qu'il ne fait aucune hypothèse sur la forme de l'indenteur, et peut être appliqué à des formes non cylindriques. Nous l'avons testé pour la géométrie considérablement différente d'un dimère formé de deux cylindres parallèles (diamètre $d = 3.95\text{mm}$) séparés rigidement par une distance $l = 12\text{mm}$. Ce dimère a été progressivement tourné avec un angle $\pi/2 - \theta$ par rapport à la direction du mouvement. Résultats expérimentaux et intégration du modèle apparaissent en bon accord sur la Figure 4(a) pour

différentes valeurs de l'orientation du dimère θ . Une autre prédiction de notre modèle, que nous avons vérifiée expérimentalement, est que le motif de découpe ne dépend que de l'enveloppe convexe de l'indenteur : l'utilisation d'un dimère (deux cylindres parallèles) ou d'une lame plate perpendiculaire au plan de la feuille donnent bien le même résultat de découpe

3 Conclusion

Nous avons présenté un modèle général bi-dimensionnel de propagation de fissure dans des plaques minces fragiles en présence d'un objet mobile rigide. Partant des principes de la mécanique des plaques minces et de la théorie classique de la fissure (critère de Griffith), nous montrons que les motifs de découpe peuvent se déduire de règles *géométriques*, dans lesquels les propriétés mécaniques n'apparaissent que sous la forme de deux paramètres, les angles α and β . Un très bon accord est obtenu entre l'intégration de notre modèle et les expériences : la forme de la découpe, mais aussi son évolution temporelle complexe (phases de propagation quasistatiques et dynamiques séparées par des points anguleux) sont prédits précisément. Ce formalisme doit être applicable à d'autres situations de découpe et d'indentation de film mince fragile accompagné de grands déplacement hors du plan, pour lesquels la géométrie doit donc également définir le chemin de propagation.

Références

- [1] Deegan R., Petersan P., Marder M. and Swinney H., Phys. Rev. Lett. **88**, 014304 (2002).
- [2] Yuse A. and Sano M., Nature **362**, 329 (1993). Ronsin O., Heslot F. and Perrin B., Phys. Rev. Lett. **75**, 2352 (1995). Deegan R. *et al.*, Phys. Rev. E. **67**, 66209 (2003).
- [3] Yang B. and Ravi-Chandar K., J. Mech. Phys. Solids **49**, 91 (2001). Adda-Bedia M. and Pomeau Y., Phys. Rev. E **52**, 4105 (1995). Henry H. and Levine, H., pre-print : cond-mat/0402563 (2004) accepted in Phys. Rev. Lett. Adda-Bedia M. and Ben Amar M., Phys. Rev. Lett. **76** 1497 (1996)
- [4] Voughan H., The Naval Architect. J. Roy. Inst. Naval Architects, **97** (1978) ; T. Wierzbicky and P. Thomas, Int. J. Mech. Sci. **35**, 209 (2003).
- [5] Roman B. et al. C.R. Mécanique **331**, 811 (2003). Videos de l'expérience sur [http ://www.lmm.jussieu.fr/platefracture/](http://www.lmm.jussieu.fr/platefracture/).
- [6] A. Ghatak and L. Mahadevan, Phys. Rev. Lett. **91**, 215507 (2003).
- [7] B. Audoly, B. Roman, P. M. Reis, comment submitted to Phys. Rev. Lett. (2004).
- [8] A. A. Griffith, Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A **221**, 163 (1921).
- [9] E. Sharon, B. Roman, Nature (2002). B. Audoly, A. Boudaoud, Phys. Rev. Lett. **91**, 086105 (2003).
- [10] Pogorelov A., Bending of surfaces and stability of shells, Translation of mathematical monographs. AMS (1988).
- [11] R. V. Goldstein and R. Salganik, Int. J. Fract. **10**, 507 (1974).