



**HAL**  
open science

## **Cours de comportement des structures**

Nicolas Favrie

► **To cite this version:**

| Nicolas Favrie. Cours de comportement des structures. École d'ingénieur. France. 2015. <hal-04250318>

**HAL Id: hal-04250318**

**<https://hal.science/hal-04250318v1>**

Submitted on 19 Oct 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Copyright - All rights reserved

# Cours de comportement des structures

N.Favrie

16 décembre 2022

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Analyse limite</b>	<b>3</b>
1.1	Définition et modélisation . . . . .	3
1.2	Plastification en flexion : Notion de moment plastique et rotule plastique . . . . .	3
1.2.1	Hypothèse admises . . . . .	3
1.2.2	Cas d'une section symétrique sans effort normal . . . . .	4
1.2.3	Exemple d'une section rectangulaire . . . . .	4
1.3	Analyse limite . . . . .	5
1.3.1	Enjeux . . . . .	5
1.3.2	Résolution . . . . .	6
1.3.3	Théorème statique . . . . .	6
1.3.4	Théorème cinématique . . . . .	6
1.3.5	Procédure générale . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Méthode des déplacements</b>	<b>8</b>
2.1	Principe . . . . .	8
2.2	Maillage et interpolation . . . . .	8
2.2.1	Interpolation . . . . .	9
2.2.2	Maillage . . . . .	9
2.2.3	Formulation élémentaire . . . . .	10
2.3	Construction des matrices de raideur et des vecteurs efforts . . . . .	10
2.3.1	Matrice de raideur en Traction compression . . . . .	10
2.3.2	Matrice de rigidité d'un élément en flexion . . . . .	11
2.3.3	Calcul du vecteur effort généralisé . . . . .	12
2.4	Résolution du problème à partir des matrices élémentaire . . . . .	13
2.5	Calcul des efforts internes et des contraintes . . . . .	14
2.6	Matrice de raideur d'un élément en traction compression dans le repère global . . . . .	15
2.7	Element d'ordre 2 : exemple de la traction compression . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Dynamique</b>	<b>16</b>
3.1	Introduction à la dynamique . . . . .	16
3.1.1	Différence statique dynamique . . . . .	16
3.2	Oscillateur simple généralisés . . . . .	16
3.2.1	Mode propre . . . . .	17
3.3	Réponse de l'oscillateur simple . . . . .	17
3.3.1	Vibration propre . . . . .	18
3.3.2	Sollicitation harmonique . . . . .	18
3.3.3	Sollicitation quelconque . . . . .	19
3.3.4	Construction des matrices de massubes et de rigidité : . . . . .	19
3.3.5	Assemblage des matrices de masse et de rigidité . . . . .	20
3.3.6	Résolution d'un problème de dynamique . . . . .	20
3.3.7	Masse modale et masse modale cumulée . . . . .	22
3.3.8	Prise en compte des termes dissipatifs : . . . . .	22
3.4	Solution exacte de la vibration en flexion d'une poutre . . . . .	22
3.4.1	Equation du mouvement de la poutre . . . . .	22
3.4.2	Fréquences et modes propres . . . . .	23
3.5	Méthode du quotient de Rayleigh . . . . .	23
3.5.1	Quotient de Rayleigh . . . . .	23
3.5.2	Application . . . . .	24
3.6	Méthode de Rayleigh Ritz . . . . .	25
3.6.1	Méthode . . . . .	25
3.6.2	Généralisation . . . . .	26

<b>A</b>	<b>Corrigé d'exercice</b>	<b>28</b>
A.1	Correction 1 . . . . .	28
A.1.1	Sujet . . . . .	28
A.2	Correction 2 . . . . .	28
A.2.1	Sujet . . . . .	28
A.2.2	Corrigé . . . . .	29
A.3	Correction 3 . . . . .	30
A.3.1	Sujet . . . . .	30
A.3.2	Corrigé . . . . .	31
A.3.3	Question 3 exercice 1 . . . . .	31
A.3.4	Exercice 2 . . . . .	34
A.3.5	Exercice 3 . . . . .	34
A.4	Comment calculer numériquement les solutions pour les solutions exacte . . . . .	37
A.5	Utilisation de python pour résoudre les exercices . . . . .	37
A.5.1	Résolution de problème avec solution exacte (exercice A.1) . . . . .	37
A.5.2	Résolution de problème de type élément finis . . . . .	37
A.5.3	Resolution d'un problème de type calcul du coefficient de Rayleigh . . . . .	37

# Chapitre 1

## Analyse limite

Le but de ce chapitre est d'apprendre à évaluer la charge à la rupture d'une structure. Le calcul en plasticité permet notamment pour les structures hyperstatique d'augmenter fortement les charges limites admissible et de réduire les sections. Il n'est cependant pas autorisé dans toute les structures et plus particulièrement pour les états limites de services.

### 1.1 Définition et modélisation

En RDM on fait l'hypothèse que les matériaux ont un comportement élastique linéaire. Dans le cadre de ce chapitre on va prendre en compte la plasticité plus particulièrement pour les aciers de constructions. Sur la figure 1.1, on observe l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation pour différents type d'acier. On note que l'acier ne rompt pas a sa limite élastique.

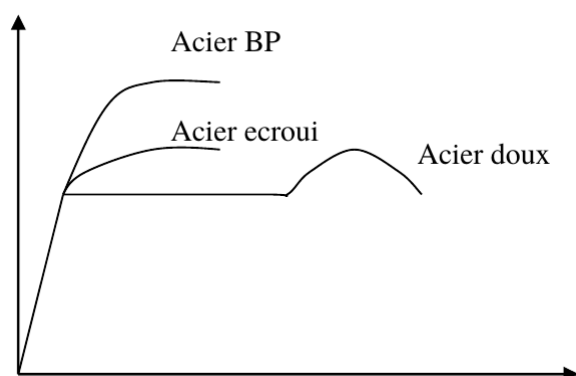


FIGURE 1.1 – Cours de traction de différent acier de construction

A partir de ces courbes de traction on peut construire différents modèles simplifiés présenté sur la Figure 1.2

Le modèle rigide plastique est particulièrement valable au voisinage de la rupture.

### 1.2 Plastification en flexion : Notion de moment plastique et rotule plastique

#### 1.2.1 Hypothèse admises

- Matériaux isotrope
- Comportement rigide plastique
- Hypothèse de Bernoulli (les sections planes restent planes)

Considérons une fibre moyenne situé à l'abscisse  $y_m$ . Elle est telle que  $\int \int_s \sigma(y-y_m) dx dy = 0$ . On peut calculer la position de l'axe neutre en élasticité : Soit  $\chi$  la courbure. On a  $\chi = \frac{M}{EI}$ . On peut ensuite calculer les déformations par superposition. On a  $\varepsilon(y) = \chi(y-y_0) + \frac{N}{ES} = \frac{M}{EI}(y-y_0) + \frac{N}{ES}$ . La fibre neutre est la ligne où la contrainte est nulle. Son abscisse peut être simplement calculée en annulant la déformation. On a donc  $y_n - y_m = \frac{NI}{MS}$ .

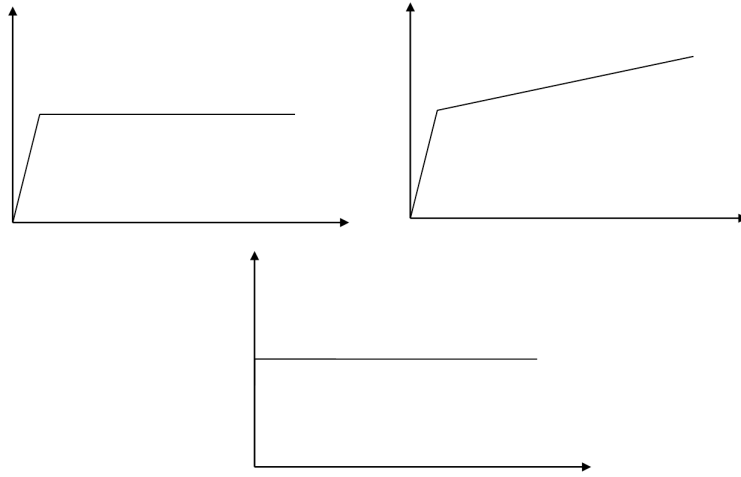


FIGURE 1.2 – Différentes simplification des modèles élastoplastique. Elastoplastique parfait à gauche, élastoplastique écrouissable à droite. On constate une augmentation de la limite de plasticité avec la déformation. Rigide plastique en bas

### 1.2.2 Cas d'une section symétrique sans effort normal

Lors de la plastification le processus va suivre plusieurs étape. Dans un premier temps la section est élastique. La contrainte est linéaire par rapport à la déformation  $\sigma = E\varepsilon$ . Dans un second temps on va avoir plastification d'une partie de la section. Puis la section sera entièrement plastifiée. Ces 3 étapes sont représentés sur la figure 1.3

1. Limite élastique. On a

$$\sigma_{max} = \sigma_e = \frac{M}{I}v \quad (1.1)$$

Donc  $M_e = w\sigma_e$  avec  $w = \frac{I}{v}$  le module de flexion élastique

2. Plastification progressive : Dans ce cas la on a la zone extérieure qui est plastifiée et la zone à l'intérieur qui reste élastique. On réalise l'équilibre de la section en choisissant un repère tel que  $y_m = 0$  :

$$M = \int \int_{surface} \sigma y dx dy = \int_{-y_e}^{y_e} \int E \chi y^2 dx dy - \int_{-v_{min}}^{-y_e} \sigma_e y dx dy + \int_{y_e}^{v_{max}} \sigma_e y dx dy \quad (1.2)$$

La section considérée étant ici symétrique, on peut écrire :

$$M = \int \int_{surface} \sigma y dx dy = \int_{-y_e}^{y_e} \int E \chi y^2 dx dy + 2 \int_{y_e}^{v_{max}} \sigma_e y dx dy \quad (1.3)$$

Puisque  $\varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E}$  et  $\varepsilon_e = \chi y_e$  on a  $y_e = \frac{\sigma_e}{E\chi}$

3. Plastification totale : On a ici la formation d'une rotule. Il s'agit du cas limite  $\chi \rightarrow \infty$  On a alors  $M_{pl} = 2\sigma_e \int_0^{v_{max}} y dx dy$  Ce moment d'apparition est appelé moment plastique. Dans les catalogue de profilé on trouve le module plastique qui est noté  $W_{pl}$  qui se calcule simplement par l'intégrale :  $W_{pl} = 2 \int_0^{v_{max}} y dx dy = \frac{M_{pl}}{\sigma_e}$ . C'est une caractéristique purement géométrique.

### 1.2.3 Exemple d'une section rectangulaire

On considère une section de hauteur  $h$  et de largeur  $b$  Le moment élastique maximal de cette section se calcule facilement à partir de l'inertie. On a  $M_e = \sigma_e \frac{I}{v} = \frac{bh^2}{6}$ . On peut ensuite calculer l'évolution du moment dans la zone plastique.

$$M = \sigma_e \left( b \frac{2}{3} y_e^2 + 2b \left( \frac{h^2}{4} - y_e^2 \right) \right) \quad (1.4)$$

En remplaçant  $y_e$  on obtient :

$$M = \sigma_e b \left( \frac{h^2}{4} - \frac{1}{3} \left( \frac{\sigma_e}{E\chi} \right)^2 \right) \quad (1.5)$$

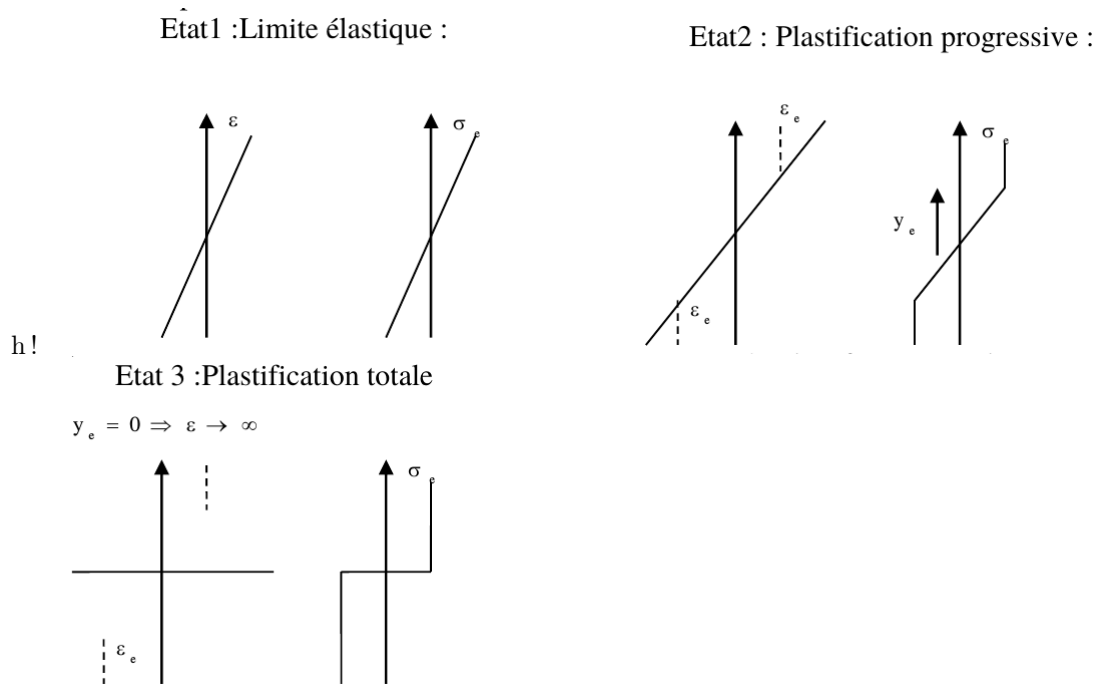


FIGURE 1.3 – Différentes étapes de plastification d’une section

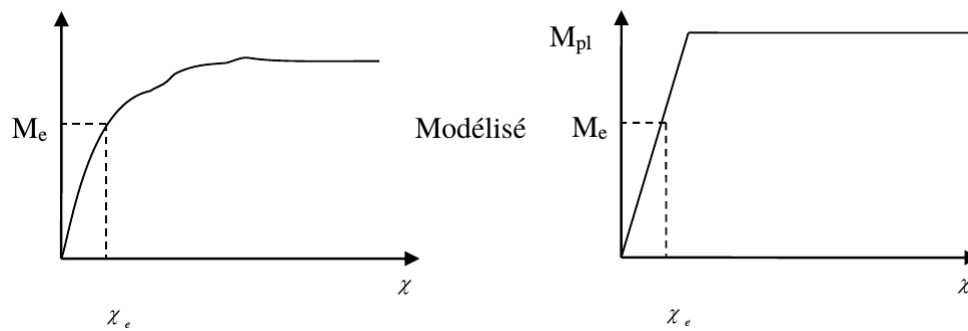


FIGURE 1.4 – Moment dans une section plastifiée en fonction de la courbure à gauche. A droite modèle simplifié qui est utilisé pour le calcul.

La limite plastique quand  $\chi \rightarrow \infty$  est  $M_{pl} = \sigma_e b \frac{h^2}{4}$ . On obtient ainsi la courbe de moment présenté sur la figure 1.4.

A partir de ce résultat on construit un modèle simplifié du type élastoplastique parfait à droite sur la figure 1.4 qui va permettre d’effectuer les calculs.

**Remarque :** L’hypothèse des sections planes restent plane est dans le cas de la rotule plastique complètement fautive puisqu’il implique une déformation infinie quand  $\chi$  devient infinie. Ce n’est pas très grave ces calculs ne servant à évaluer que le moment plastique qui sera utilisé par la suite.

## 1.3 Analyse limite

### 1.3.1 Enjeux

Dans l’analyse limite, on cherche à déterminer le facteur de charge (noté  $\lambda$  dans la suite) permettant d’atteindre la ruine. Si ce facteur de charge est supérieur à 1 la structure supportera la charge avec un coefficient de sécurité  $\lambda - 1$  si il est inférieur à 1 la structure ne supportera pas la charge.

On considère une structure soumise à un système de force noté  $\{F\}$  (les charges peuvent être des moments des forces réparties ou ponctuelles). On va mettre la structure à la ruine par un chargement  $\lambda \{F\}$  par apparition d’un nombre suffisant de rotule plastique transformant la structure (ou une partie) en mécanisme. Les forces correspondantes à la ruine sont  $\{F\}_{crit} = \lambda_{ult} \{F\}$

### 1.3.2 Résolution

Pour déterminer  $\lambda_{ult}$  on va utiliser deux approches qui vont fournir un encadrement de la valeur réelle.

1. l'approche statique qui va fournir une valeur minorante
2. l'approche cinématique qui va fournir une valeur majorante

### 1.3.3 Théorème statique

#### Théorème

A tout état de contrainte statiquement admissible ( $|M| \leq M_{pl}$ ) partout vérifiant les conditions de plasticité (cinématique : Condition aux limites vérifiée et  $M_{pl}$  de même sens que la rotation des rotules plastiques) correspond un facteur de charge :  $\lambda_{stat} \leq \lambda_{ult}$

#### Procédure d'application

1. Calculer les moments dans la structure (surtout les maximums)
2. Supposer  $M_{pl}$  en 1 point de la structure
3. Vérifier que  $|M| \leq M_{pl}$  partout
4. Placer une rotule plastique et des moments en ce point et recommencer à l'étape 1 jusqu'à la ruine de la structure.

#### Exemple :

A suivre au tableau en essayant de bien comprendre le principe

### 1.3.4 Théorème cinématique

#### Théorème

A un mécanisme de ruine arbitraire ou tous les éléments non plastifiés sont supposés rigides correspond un facteur de charge  $\lambda \geq \lambda_{ult}$ . On note  $\lambda_{cin}$  le minimum des  $\lambda$  calculés pour tous les mécanismes de ruines.

#### Procédure d'application

1. Imaginer un mécanisme de ruine
2. Appliquer le Principe des travaux virtuels dans un champ rigidifiant par morceaux.

#### Exemple :

A suivre au tableau en essayant de bien comprendre le principe

#### Notion de section potentiellement critique (SPC)

En pratique pour la méthode cinématique il y a des lieux plus probables d'apparition des rotules. Ces lieux d'apparition sont appelés sections potentiellement critiques (SPC). Leurs localisations sont principalement :

- point d'application des charges ponctuelles
- point de moment maximum sous charges réparties
- Assemblage
- Encastrement d'appuis

On distingue 3 mécanismes de ruine principaux :

- Mécanisme de poutre : 3 rotules dans 1 poutre
- Mécanisme de panneau : rotules en têtes et pied de poteaux d'un portique
- Mécanisme de Noeud : rotule à l'extrémité de chaque barre aboutissant à un noeud.

### 1.3.5 Procédure générale

On considère une structure hyperstatique de degré  $h$  On applique la méthode statique. On a apparition successive de  $n$  rotule jusqu'à la ruine. A l'apparition de chaque rotule  $h$  diminue d'une unité.

On étudie ensuite le scénario de ruine obtenu par la méthode statique avec la méthode cinématique et on vérifie  $\lambda_{stat} \leq \lambda \leq \lambda_{cin}$

Attention ce processus peut être mis en défaut :

- Ruine partielle de la structure : 3 rotule dans une barre
- Ruine plus que complète  $n > h + 1$

# Chapitre 2

## Méthode des déplacements

### 2.1 Principe

Cette méthode est analogue à la méthode des éléments finis utilisé dans la plupart des codes de calculs de structure. Elle consiste à transformer la résolution d'un problème continu en un problème discret avec un nombre fini d'inconnues. Cette discrétisation est obtenu à partir de fonctions d'interpolations définie à partir des caractéristiques aux noeuds.  $U(M, t) \rightarrow (u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ . On passe de l'un à l'autre par une discrétisation.

### 2.2 Maillage et interpolation

Dans cette étape, on défini la discrétisation du problème. Plus cette discrétisation va être fine plus la résolution sera précise par contre le temps de calcul augmente fortement avec la finesse du maillage. Comme nous le verrons plus tard la résolution fait intervenir des résolutions matricielles et la taille de la matrice est proportionnelle au nombre de noeuds (ou degré de liberté)

**Exemple :** Coupe d'une digue ou barrage

On considère un barrage poids. On suppose la longueur du barrage grande devant ces dimensions. Une coupe est représentée sur la figure 2.1 Pour calculer ce type de structure on va

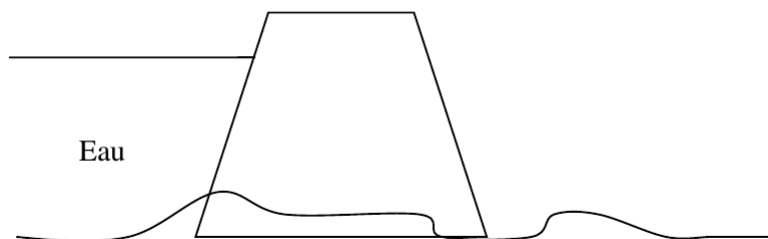


FIGURE 2.1 – Coupe d'un barrage poids.

se placer en déformation plane. En effet, si la longueur du barrage on peut supposer qu'il ne se déforme pas longitudinalement ( $u_z = 0, \varepsilon_{zz} = 0$ ) Le vecteur déplacement et le tenseur des déformations dans cette structure s'écrivent sous la forme :

$$(\mathbf{U}(M)) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

On peut alors déterminer le tenseur des contraintes qui sera sous la forme

$$(\mathbf{U}(M)) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

On va ensuite découper cette structure en différentes mailles. Sur la Figure 2.2, 2 maillages différents ont été représentés. Les maillages présentés sont triangulaire mais d'autres formes sont également possible (quadrangulaire, courbes...)

Lorsqu'on choisit un maillage, on va

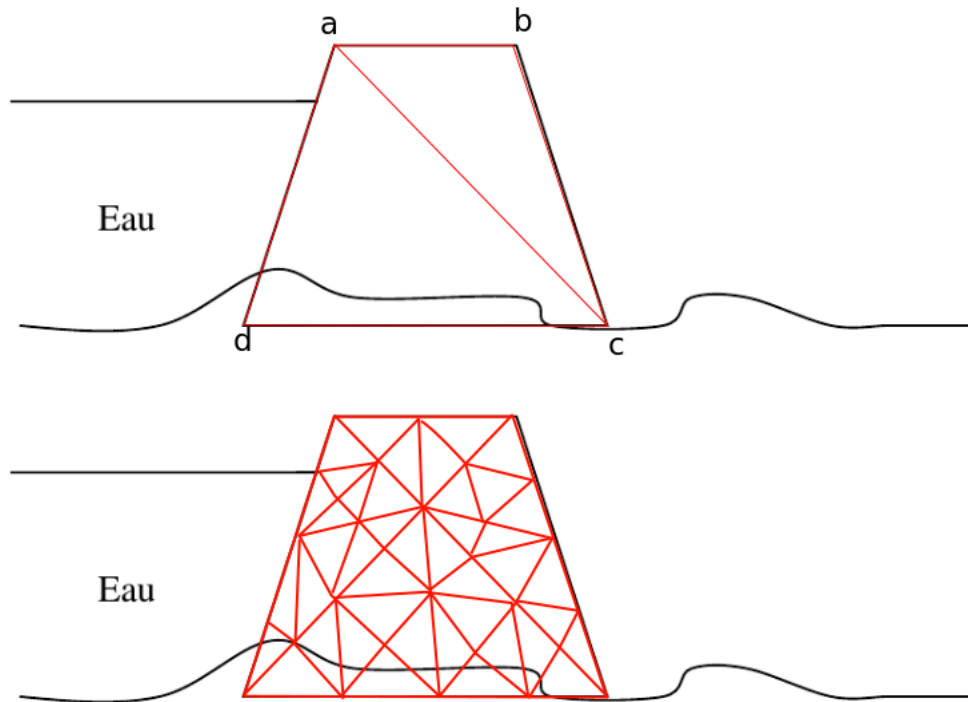


FIGURE 2.2 – Problème de barrage avec 2 maillages différents . En haut le maillage est très grossier on a 2 élément et 4 noeuds on aura ici, dans le cas d'élément linéaire 8 degrés de liberté (l'ensemble des déplacements verticaux et horizontaux). En bas le maillage est plus fin on a alors 30 noeuds et 38 éléments sous 60 degrés de liberté.

1. Tenir compte du type de problème et faire des hypothèses simplificatrices du problème avec du plus riche au plus simplifié.
  - (a) Elasticité 3D (aucune simplification)
  - (b) Elasticité plane (ou ses dérivés axisymétrique)
  - (c) Poutre en flexion et traction compression
  - (d) Poutre en traction compression (Treillis)
2. Choisir le type d'élément : Triangulaire Quadrangulaire et si l'on souhaite des éléments linéaires ou d'ordre plus élevé. Des détails sont donnés dans la section 2.7
3. La finesse du maillage, on choisit le nombre d'éléments permettant d'obtenir un résultat avec une précision raisonnable pour un temps de calcul raisonnable. La notion de raisonnable est fortement dépendante du problème considéré (Laboratoire P4 ou maison individuelle de plein pied)

Dans le cadre de ce cours on se limitera à des éléments filaires. Dans le cadre du projet sur Robot Structural Analysis nous utiliserons des éléments coques (2D) et des poutres.

### 2.2.1 Interpolation

Pour faire les calculs on va définir des fonctions **locale** sur l'élément. Ces fonctions, dans notre cas, seront des polynômes mais des fonctions trigonométriques peuvent également être utilisées. Le choix de ces fonctions dépend du problème étudié (en mécanique des solides on prend principalement des polynômes, en acoustique des fonctions trigonométriques seront plus adaptées par exemple) On peut alors définir le vecteur déplacement ( $\mathbf{U}^*$ ) en tout point de la maille à partir du déplacement aux noeuds ( $\mathbf{q}^*$ )

$$\mathbf{U}^*(M) = \mathbf{A}^*(M)\mathbf{q}^* \quad (2.3)$$

$\mathbf{A}^*(M)$  est la matrice des polynômes d'interpolation.

### 2.2.2 Maillage

Un maillage est une partition (découpage) de la structure. On va réunir dans le maillage l'ensemble des éléments (mailles) de la structure. Lors du maillage, on fera attention à ne pas

prendre 2 fois les mêmes volumes de la structure dans les calculs (attention avec Robot). La partition de la structure doit impliquer :

- La somme du travail des efforts intérieurs de la structure est égale à la sommes des travaux des efforts intérieurs de l'ensemble des éléments

$$\delta W_i = \sum_{element} \delta W_i^e \quad (2.4)$$

- La somme du travail des efforts d'inertie de la structure est égale à la sommes des travaux d'inertie de l'ensemble des éléments

$$\delta W_j = \sum_{element} \delta W_j^e \quad (2.5)$$

- La somme du travail des efforts exterieur de la structure est égale à la sommes des travaux des efforts extérieur de l'ensemble des éléments

$$\delta W_e = \sum_{element} \delta W_e^e \quad (2.6)$$

On ferra ici bien attention de ne pas compter les efforts exterieurs situé sur les nœuds de maillage 2 fois.

### 2.2.3 Formulation élémentaire

Chacun des termes va pouvoir se construire à partir de matrice élémentaire qui s'écrivent sous la forme :

- Travail des efforts intérieurs

$$\delta W_i = \sum_{element} \delta W_i^e \quad \delta W_i^e = -\delta \mathbf{q}^e \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e \quad (2.7)$$

- La somme du travail des efforts d'inertie de la structure est égale à la sommes des travaux d'inertie de l'ensemble des éléments

$$\delta W_j = \sum_{element} \delta W_j^e \quad \delta W_j^e = -\delta \mathbf{q}^e \mathbf{M}^e \dot{\mathbf{q}}^e \quad (2.8)$$

Les efforts d'inertie ne sont indiqué ici que pour rappel. Nous considérerons ces efforts dans la partie dynamique des structures que nous verrons au second semestre.

- La somme du travail des efforts extérieur de la structure est égale à la sommes des travaux des efforts extérieur de l'ensemble des éléments

$$\delta W_e = \sum_{element} \delta W_e^e \quad \delta W_e^e = \delta \mathbf{q}^e \mathbf{F}^e \quad (2.9)$$

## 2.3 Construction des matrices de raideur et des vecteurs efforts

Il est nécessaire de bien comprendre le cas "simple" de la traction compression avant d'attaquer le cas de la flexion.

### 2.3.1 Matrice de raideur en Traction compression

On suppose une barre élémentaire de longueur  $L$  de section  $S$  et de module  $E$ . On se place dans le repère de la barre. La barre est représentée sur la figure 2.3

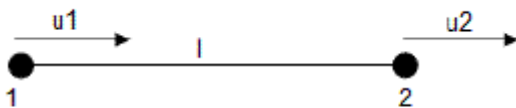


FIGURE 2.3 – Élément 1D de longueur L

On va ici considérer des éléments linéaires. Dans la section 2.7, le cas des éléments quadratique (ordre 2) sera évoqué. Le déplacement est paramétrisés par une fonction linéaire

$$u^*(x) = (1, x) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 + a_2 x \quad (2.10)$$

En  $x = 0$  on a  $u^*(0) = u_1$  d'où  $a_1 = u_1$  En  $x = L$  on a  $u^*(L) = u_2$  d'où  $a_2 = \frac{u_2 - u_1}{L}$  On peut réécrire cela sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

d'où

$$u^*(x) = (1, x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{N} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ avec } \mathbf{N} = (1 - \frac{x}{L}, \frac{x}{L}) \quad (2.12)$$

Calculons maintenant la matrice de raideur associée au travail des efforts intérieurs de l'élément :

$$\delta W_i^e = - \int_0^L \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} S dx = - \int_0^L ES \delta \varepsilon_{xx} \varepsilon_{xx} dx = \int_0^L ES \delta u_{,x} u_{,x} dx \quad (2.13)$$

On a utilisé ici les hypothèses des petites déformations  $\varepsilon_{xx} = u_{,x}$  et l'hypothèse d'un matériaux isotrope élastique linéaire avec un état de contrainte supposé uniaxial ( $\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$ ).

— Travail des efforts intérieurs

$$\delta W_i = \sum_{\text{element}} \delta W_i^e \quad \delta W_i^e = -\delta \mathbf{q}^e \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e \quad (2.14)$$

— La somme du travail des efforts d'inertie de la structure est égale à la sommes des travaux d'inertie de l'ensemble des éléments

$$\delta W_j = \sum_{\text{element}} \delta W_j^e \quad \delta W_j^e = -\delta \mathbf{q}^e \mathbf{M}^e \dot{\mathbf{q}}^e \quad (2.15)$$

Les efforts d'inertie ne sont indiqué ici que pour rappel. Nous considérerons ces efforts dans la partie dynamique des structures que nous verrons au second semestre.

— La somme du travail des efforts extérieur de la structure est égale à la sommes des travaux des efforts extérieur de l'ensemble des éléments

$$\delta W_e = \sum_{\text{element}} \delta W_e^e \quad \delta W_e^e = \delta \mathbf{q}^e \mathbf{F}^e \quad (2.16)$$

On utilise maintenant l'approximation du champ de déplacement pour calculer  $u_{,x}$

$$u_{,x} = \mathbf{N}_{,x} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Il vient alors

$$\delta W_i^e = - \int_0^L ES (\mathbf{B} \delta \mathbf{u}) (\mathbf{B} \mathbf{u}) dx = - \int_0^L ES (\mathbf{B} \delta \mathbf{u})^T (\mathbf{B} \mathbf{u}) dx = - \int_0^L ES (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{B})^T (\mathbf{B} \mathbf{u}) dx \quad (2.18)$$

On utilise le fait que la transposée d'un scalaire est ce même scalaire. Puisque  $\mathbf{u}$  et  $ES$  ne dépendent pas de l'intégrateur  $x$  on peut les sortir de l'intégrale. On obtiens alors :

$$\delta W_i^e = -\delta \mathbf{u}^T ES \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \mathbf{u} = -\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_e \mathbf{u} \quad (2.19)$$

avec

$$(\mathbf{K})_e = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

### 2.3.2 Matrice de rigidité d'un élément en flexion

On considère un élément en flexion.

$$v(x) = (1, x, x^2, x^3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} v_1 &= v(0) = a_1 \\ \theta_1 &= v'(0) = a_2 \\ v_2 &= v(L) = a_1 + a_2L + a_3L^2 + a_4L^3 \theta_2 = a_2 + 2a_3L + 3a_4L^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

qui s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

il vient :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

On obtient

$$v(x) = (1, x, x^2, x^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^e \mathbf{q} \quad (2.25)$$

Calculons maintenant la raideur de l'élément :

$$\delta W_i^e = \int_0^L \frac{\delta MM}{EI} + \frac{\delta TT}{GS_R} dx = \int EI(\delta v_{,xx} v_{,xx}) + \frac{E^2 I^2}{GS_R} (\delta v_{,xxx} v_{,xxx})^2 dx = \mathbf{q}^T (\mathbf{K}^M + \mathbf{K}^T) \mathbf{q} \quad (2.26)$$

$$v_{,xx} = (0, 0, 2, 6x) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$v_{,xx} = \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}, -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}, \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}, -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^1 \mathbf{q} \quad (2.28)$$

$$\int EI(v_{,xx})^2 dx = \int_0^L EI(\mathbf{B}^1 \delta \mathbf{q})(\mathbf{B}^1 \mathbf{q}) dx = \delta \mathbf{q}^T \int_0^L EI(\mathbf{B}^1)^T \mathbf{B}^1 dx \mathbf{q} \quad (2.29)$$

d'où

$$\mathbf{K}^M = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

**Exercice d'entraînement** : Démontrer que

$$\mathbf{K}^T = \frac{12(EI)^2}{GSL^5} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 3L^2 & -6L & 3L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 3L^2 & -6L & 3L^2 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

### 2.3.3 Calcul du vecteur effort généralisé

Lorsque les forces sont des forces (ou moment) ponctuelle quelle soit connue (chargement) ou inconnues (action de liaison) et son placée sur les noeuds du maillage il est plus simple de les ajouter directement dans le vecteur effort de la structure complète. Par contre si on considère une charge placée sur une barre, le calcul est plus complexe et il est préférable de calculer le travail de cette charge dans un élément et de les assembler dans le vecteur effort. Afin de comprendre cela nous allons considérer l'exemple d'un élément en flexion soumis à une charge répartie représenté sur la figure 2.4 On va calculer le travail de cette poutre dans le cadre du déplacement virtuel associé à  $\delta \mathbf{q}^T = (v_A, \theta_A, v_B, \theta_B)$  Le déplacement virtuel en chaque point associé à ce déplacement (cf éq. 2.25) s'écrit :

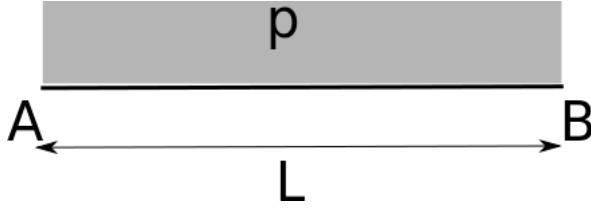


FIGURE 2.4 – Élément (AB) de longueur  $L$  soumis à un charge répartie  $p$

$$v(x) = (1, x, x^2, x^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^e \mathbf{q} \quad (2.32)$$

Le travail de la charge répartie dans ce déplacement virtuel peut s'écrire :

$$\delta W_i^e = \int_0^L \delta v(x) p dx = \int_0^L (\delta v(x))^T p dx = \int_0^L (\delta v_A, \delta \theta_A, \delta v_B, \delta \theta_B) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} p dx \quad (2.33)$$

Les déplacements et la matrice  $\mathbf{A}^e$  ne dépendant pas de l'espace, il vient

$$\delta W_i^e = (\delta v_A, \delta \theta_A, \delta v_B, \delta \theta_B) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \int_0^L p dx \\ \int_0^L x p dx \\ \int_0^L x^2 p dx \\ \int_0^L x^3 p dx \end{pmatrix} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{F}^e \quad (2.34)$$

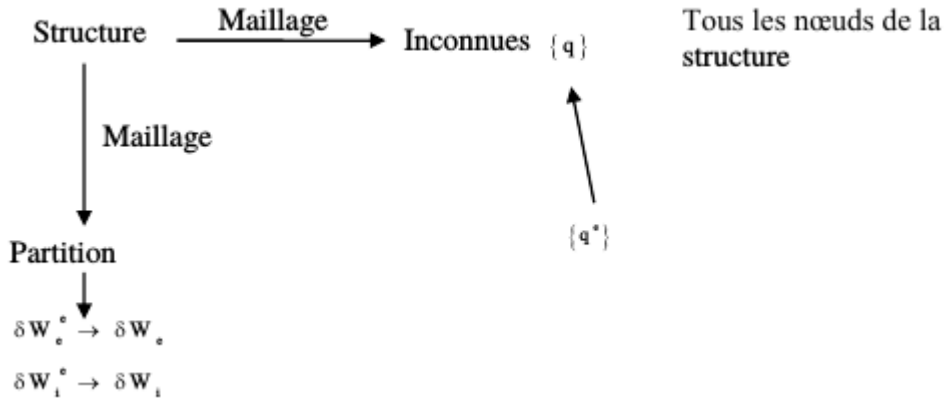
avec

$$\mathbf{F}^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \int_0^L p dx \\ \int_0^L x p dx \\ \int_0^L x^2 p dx \\ \int_0^L x^3 p dx \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Dans le cas d'une charge uniformément répartie on a  $\mathbf{F}^T = (p \frac{L}{2}, p \frac{L^2}{12}, p \frac{L}{2}, -p \frac{L^2}{12})$

## 2.4 Résolution du problème à partir des matrices élémentaire

Selon la procédure décrite ci dessous on a partitionné la structure.



A partir de chacun des travaux élémentaires de chacun des éléments nous allons construire le travail de la structure entière. Ces travaux vont pouvoir s'écrire de la même manière sous forme matricielle

— Travail des efforts intérieurs

$$\delta W_i = -\delta \mathbf{q} \mathbf{K}^{tot} \mathbf{q} = \sum_{element} \delta W_i^e \quad \delta W_i^e = -\delta \mathbf{q}^e \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e \quad (2.36)$$

— La somme du travail des efforts d'inertie de la structure est égale à la sommes des travaux d'inertie de l'ensemble des éléments

$$\delta W_j = -\delta \mathbf{q} \mathbf{M}^{tot} \ddot{\mathbf{q}} = \sum_{element} \delta W_j^e \quad \delta W_j^e = -\delta \mathbf{q}^e \mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{q}}^e \quad (2.37)$$

Les efforts d'inertie ne sont indiqué ici que pour rappel. Nous considérerons ces efforts dans la partie dynamique des structures que nous verrons au second semestre.

— La somme du travail des efforts extérieur de la structure est égale à la sommes des travaux des efforts extérieur de l'ensemble des éléments

$$\delta W_e = \delta \mathbf{q} \mathbf{F}^{tot} = \sum_{element} \delta W_e^e \quad \delta W_e^e = \delta \mathbf{q}^e \mathbf{F}^e \quad (2.38)$$

Si on applique le principe des travaux virtuels (en négligeant les effets d'inertie) on a :

$$\delta W_e + \delta W_i = 0 \quad (2.39)$$

Ceci peut s'écrire sous la forme :

$$0 = \delta \mathbf{q} \mathbf{F}^{tot} - \delta \mathbf{q} \mathbf{K}^{tot} \mathbf{q} = \delta \mathbf{q} (\mathbf{F}^{tot} - \mathbf{K}^{tot} \mathbf{q}) \quad (2.40)$$

Sachant que cette équation est vérifiée quelque soit le déplacement virtuel  $\delta \mathbf{q}$  alors on a

$$\mathbf{K}^{tot} \mathbf{q} = \mathbf{F}^{tot} \quad (2.41)$$

On peut alors déterminer l'ensemble des déplacements en résolvant ce système d'équations.

## 2.5 Calcul des efforts internes et des contraintes

A partir des résultats obtenu précédemment, on peut facilement calculer les efforts internes aux extrémités des barres à partir de :

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e \quad (2.42)$$

Cette formulation va donner les efforts dans les barres aux niveaux des nœuds.

Pour obtenir les efforts en tout point à l'intérieur des barres, il y a 2 approches. On peut d'une part obtenir les moments, efforts tranchant et efforts normaux dans les barres par la méthode des coupures (méthode classique en regardant à gauche ou à droite). Cette méthode permet d'avoir les valeurs exacte des sollicitations dans les poutres. Cependant cette approche a le défaut de ne pas pouvoir être utilisé pour les plaques ou les éléments volumiques.

Cette méthode consiste a considérer la fonction d'interpolation et de calculer les moments à partir de la fonction d'interpolation. On va prendre l'exemple de la flexion :

$$v(x) = (1, x, x^2, x^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^e \mathbf{q} \quad (2.43)$$

Or  $M = EIv''(x)$  On peut donc obtenir le moment par la relation

$$M = EIv(x)_{,xx} = (0, 0, 2, 6x) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

On peut faire la même chose pour l'ensemble des efforts intérieurs. Par contre attention ce calcul est approché il ne donne pas la solution exacte. On peut facilement remarquer que le résultats du moment est linéaire. Il suffit de considérer un chargement réparti (moment quadratique) pour s'apercevoir que le résultat n'est qu'une approximation.

## 2.6 Matrice de raideur d'un élément en traction compression dans le repère global

On a construit la matrice de raideur d'un élément en traction compression dans le repère local de la barre. Cette matrice s'écrit :

$$\mathbf{K}^{tc} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ associe a } \mathbf{q}^T = (u_1, u_2) \quad (2.45)$$

Cette matrice peut être réécrite sous la forme :

$$\mathbf{K}^{tc} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ associe a } \mathbf{q}^T = (u_1, v_1, u_2, v_2) \quad (2.46)$$

On définit le changement de repère. On a une matrice de changement de repère qui est de la forme :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ avec } s = \sin(\alpha) \text{ et } c = \cos(\alpha) \quad (2.47)$$

L'énergie ne doit pas varier avec un changement de repere. On a

$$\delta W_i^e = \delta \mathbf{q}_g^T \mathbf{K}_g \mathbf{q}_g = q_l^T K_l q_l = \mathbf{q}_g^T \mathbf{R} \mathbf{K}_l \mathbf{R}^T \mathbf{q}_g \quad (2.48)$$

d'ou :

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{R} \mathbf{K}_l \mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

## 2.7 Element d'ordre 2 : exemple de la traction compression

On considère un élément à 3 noeuds. On pose  $u(x) = a + bx + cx^2$  On remarque ici que l'on a ajouté un degré supplémentaire au polynôme d'interpolation. A l'aide des condition aux limites on a :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L/2 & L^2/4 \\ 1 & L & L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

On peut écrire

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/l & 4/l & -1/l \\ 2/l^2 & -4/l^2 & 2/l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Il vient :

$$u(x) = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/l & 4/l & -1/l \\ 2/l^2 & -4/l^2 & 2/l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

$$N = ESu_{,x} = ES \left( \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \quad \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \quad \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

$$\delta W_i^e = \int_0^L ES \delta u_{,x} u_{,x} dx = \dots \quad (2.54)$$

en faisant la même chose que dans le cas linéaire on obtient

$$\mathbf{K} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

**Calculer les efforts généralisé pour une poutre verticale soumise a son poid propre dans le cadre d'un élément linéaire et d'un élément quadratique. Calculer les déplacements aux noeuds pour ces éléments. Calculer les efforts normaux dans ces éléments. Comparer les résultats. Calculer l'erreur par rapport a la solution exacte**

# Chapitre 3

## Dynamique

### 3.1 Introduction à la dynamique

En dynamique, contrairement à la statique on ne néglige plus les effets d'inertie

#### 3.1.1 Différence statique dynamique

Il y a 2 conditions pour que l'on choisisse de traiter un problème en dynamique.

1. Il faut que l'on soit proche de la résonance : la structure possède plusieurs modes propres. Il s'agit d'une masse et d'une rigidité qui se combinent et donnent des formes privilégiées : façon dont la structure va vibrer des pulsations ou périodes propres
2. Il faut qu'il y est des sollicitations (séismes, houle, surcharges rapidement variables tel que les piétons sur une passerelle) dont on étudie la constance en fréquence (spectre) La résonance se produit quand il y a un accord entre ce que la structure aime faire ( pulsation) et ce que fournit la sollicitations fréquence. Il est également nécessaire de l'amplitude de la sollicitation soit suffisante.

**Exemple Passerelle piétonnière** On défini :

FIGURE 3.1 – Passerelle piétonnière sur 2 appuis

- Période propre  $T$
- Pulsation propre :  $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- Fréquence propre :  $f = \frac{1}{T}$

Expérimentalement on observe que  $T=0.01s$  à  $0.1s$  soit  $\omega = 60 - 600rad/s$  Un groupe de piéton se déplace et crée une charge  $p(x,t)$  (sollicitation variable) qui génère une période imposée par l'extérieur  $T_p$  i.e. une pulsation  $\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$  La question qui va se poser est de savoir si on est en résonance ou non (accord entre ce que fournit l'extérieur et ce que fait la structure

- 1er cas  $\omega_p < \omega$  Force lentement variable :periode >periode propre Réponse dynamique = réponse statique (90% des cas en GC) Le calcul dynamique n'est pas nécessaire. En général la force variable extérieure varie beaucoup plus lentement que ce que la structure à envie de vibrer.
- 2nd cas  $\omega_p > \omega$  (très rare en GC) La pulsation (ou fréquence) imposée par l'extérieur est bcp plus grande que celle désirée de la structure. C'est comme s'il n'y avait pas de chargement
- 3ème cas  $\omega_p \approx \omega$  Cas qui nous intéresse On est alors à la résonance. L'amplitude de la réponse dynamique peut atteindre 5,10,20 fois l'amplitude de la réponse statique.

### 3.2 Oscillateur simple généralisés

Supposons une poutre en flexion, la déformé s'écrit  $v(x)$ , en élasticité linéaire on a  $M(x,t) = EIv''(x,t)$  Le PPV donne :

$$-\int_0^L M(x,t)\delta v'' dx + \int_0^L p(x,t)\delta v dx - \int_0^L \rho S \ddot{v} \delta v dx \quad (3.1)$$

On cherche  $v$  On voudrait mettre  $\delta v$  en facteur malheureusement  $\delta v''$  est présent. On peut faire une discrétisation en posant :  $v(x,t) = A(x)v(t)$ .

$A(x)$  est une forme donnée (intuition du modélisateur) devant respecter les conditions aux limites et devant faire travailler les efforts extérieurs. Dans le ppv on a besoin des dérivées, on a alors :

$$v''(x, t) = v(t)A''(x), \quad \ddot{v}(x, t) = \ddot{v}(t)A(x). \quad (3.2)$$

$\delta$  exprime la variation entre un état 1 et 2 de la structure. Donc entre 2 instants. La séparation des variable permet donc d'écrire :

$$\delta v''(x, t) = \delta(v(t)A''(x)) = \delta(v(t))A''(x) = A''(x)\delta v \quad (3.3)$$

De plus l'équation est valable quelque soit  $\delta v$  on peut donc faire l'hypothèse simplificatrice :  $\delta v(x, t) = A(x)v(t)\delta v$ ,  $\delta v$  est alors une constante. On remplace dans l'équation et on obtient :

$$\int_0^L (-M(x, t)A''(x) + p(x, t)A(x) - \rho S\ddot{v}A(x)) \delta v dx \quad (3.4)$$

En remplaçant la loi de comportement : On obtient :

$$\left[ -v(t) \overbrace{\int_0^L EI A''(x)^2 dx}^k + \overbrace{\int_0^L p(x, t) A(x) dx}^{F_e} - \ddot{v}(t) \overbrace{\int_0^L \rho S A^2(x) dx}^m \right] \delta v = 0 \quad (3.5)$$

$F_e$  effort extérieur généralisé,  $k$  rigidité généralisé,  $m$  masse généralisée On a une équation de la forme :

$$m\ddot{v} + kv = f(t) \quad (3.6)$$

**Exercice** On considère une poutre sur 2 appuis de longueur  $L$ , module  $E$ , inertie  $I$  calculer les pulsations propre  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  pour les déformées suivantes :

$$v(x, t) = v(t) \frac{x(L-x)}{L^2} \quad (3.7)$$

On notera que le moment ne s'annule pas aux appuis avec ce type de fonction, elle ne vérifie donc pas les conditions aux limites. On considère maintenant la fonction suivante :

$$v(x, t) = v(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (3.8)$$

Solution :  $\omega = \sqrt{120} \sqrt{\frac{EI}{\rho SL^4}}$  et  $\omega = k^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho SL^4}}$

### 3.2.1 Mode propre

Un mode propre : c'est par définition :

1) Un mouvement de vibration 'spontané' en l'absence de sollicitations extérieures

2) Si ils existent :

$u(M, t) = U_0(M) \sin(\omega_0 t)$  avec  $U_0(M)$  forme modale,  $\omega_0$  pulsation propre associée

Résultats : Pour une structure élastique linéaire en petits mouvement il existe une infinité dénombrable de modes propres classés par ordres croissant de pulsation :  $\omega_1 > \omega_2 \dots T_1 < T_2 \dots$  Le premier et le 2eme mode sont les modes basses fréquences. Ces modes sont les modes privilégié de réponse de la structure Résumé :

1) Calcul de la réponse (cas simple) en dynamique

2) Comportement de la structure : Analyse modale  $\rightarrow$  Modes propres : indice

$(U_i(M), i)$  (forme, pulsation) Calcul en dynamique quand l'accélération provoque des effets non négligeable Faut il faire des calculs en dynamique ?

a) Résonance ? si contenu en fréquence de l'existant est proche des 1 ère fréquence de résonance

b) Amplitude suffisante

Mode propre : Mouvement de vibration en l'absence de sollicitations extérieures En vibration propre : tous les points vibrent en phase  $U(M, t) = U_0(M) \sin(\omega_0 t)$   $U_0(M)$  forme,  $\sin(\omega_0 t)$  pulsation Il existe une infinité dénombrable de modes propres : les basses fréquences sont les plus importantes

### 3.3 Réponse de l'oscillateur simple

On doit résoudre :

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = f(t) \quad (3.9)$$

### 3.3.1 Vibration propre

On doit résoudre :

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = 0 \quad (3.10)$$

**Sans amortissement**

$$m\ddot{v} + kv = 0 \quad (3.11)$$

solution :

$$v(t) = V \sin(\omega_0 t - \phi) = \frac{\dot{v}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + v_0 \cos(\omega_0 t) \quad (3.12)$$

avec  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Unité : Raideur  $k$  en  $N/m$  et  $M$  masse en  $kg$ ,  $\omega$  en  $s^{-1}$

**Avec Amortissement**

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = 0 \quad (3.13)$$

Ce modèle rend compte de l'amortissement naturel des vibrations mes reproduit très mal le comportement des matériaux.

- $c \geq 2m\omega$  amortissement sur critique (amortisseur de voiture) Pas d'oscillations
- $c < 2m\omega$  amortissement sous critique

Réponse de l'oscillateur :

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} \left[ \frac{\dot{v}_0 + \xi\omega v_0}{\omega_D} \sin(\omega_D t) + v_0 \cos(\omega_D t) \right] \quad (3.14)$$

avec  $\xi = \frac{c}{2m\omega}$  et  $\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$

FIGURE 3.2 – Solution d'un système sous critique

### Propriété de l'amortissement

Valeurs usuelles de  $\xi$  présentées dans les Eurocodes sismique (ELU)

	Acier soudé	Béton armé	Béton précontraint	Bois
ELU (réglement)	2%	5%	4%	3-8%
ELS (Approximation)	0.5%	1%	4%	3-8%

A l'ELS passerelle en béton  $\xi = 1\%$   $\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2} = 0.99995\omega$  l'amortissement à très peu d'influence sur la période propre.

Les valeurs même faible d'amortissement provoquent un arrêt rapide des vibration

Nombre d'oscillation	2	5	10	20
Amplitude/amplitude initiale	0.73	0.28	0.05	0.002

En vibration propre une structure s'arrête très vite d'osciller à cause de l'amortissement.

### 3.3.2 Sollicitation harmonique

On peut décomposer tout signal périodique en série de Fourier sous la forme :

$$f(t) = \sum A_k \sin(\bar{\omega}t) \quad (3.15)$$

On étudie la solution uniquement avec une seule période  $f(t) = f_0 \sin(\bar{\omega}t)$ . La structure étant élastique linéaire il suffira de superposer les solutions pour obtenir l'étude générale de la structure.

On pose  $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$

1. Sans amortissement de la structure

$$v(t) = \frac{f_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin(\bar{\omega}t) - \beta \sin(\omega t) \quad (\text{condition initiale nulle}) \quad (3.16)$$

Si  $\beta = 1$  ça diverge

2. avec amortissement :

$$v(t) = \frac{f_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \overbrace{[(1 - \beta^2)\cos(\bar{\omega}t) + 2\xi\beta\sin(\bar{\omega}t)]}^{\text{regime permanent}} \quad (3.17)$$

$$+ e^{-\xi\omega t} \overbrace{\left[ \frac{\dot{v}_0 + \xi v_0}{\omega_D} \sin(\omega_D t) + v_0 \cos(\omega_D t) \right]}^{\text{Transitoire}} \quad (3.18)$$

On néglige la partie transitoire car elle possède une exponentielle décroissante qui tend vers 0 très rapidement. On ne s'intéresse qu'à la partie permanente. La structure répond avec la pulsation imposée par l'extérieur et l'amplitude de la réponse s'écrit :

$$v_{max} = \frac{f_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (3.19)$$

A la résonance  $\beta = 1$ ,  $v_{max} = \frac{f_0}{k} \frac{1}{2\xi}$  pour  $\xi = 5\%$  la réponse dynamique est 5 fois plus importante que la réponse statique.

FIGURE 3.3 – Diagramme de Bode

### 3.3.3 Sollicitation quelconque

Par les fréquences :

1. Construire la transformée de Fourier du signal de f
2. Calcul de la réponse élémentaire
3. La transformée de Fourier inverse donne la réponse de la structure

Intégration directe en temps :

La réponse à un un instant  $t$  est égale à la superposition des réponses (à l'instant  $t$ ) des chocs à l'instant  $\tau$  de très courte durée obtenue par la multiplication de la sollicitation par  $d\tau$

$$v(t) = \int_0^t dV(\tau) \quad (3.20)$$

$dV(\tau)$  est la réponse à une impulsion  $dV(\tau) = f(\tau)d\tau$  (quantité de mouvement infinitésimal. Pour un oscillateur simple

$$v(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t f(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin(\omega_D(t-\tau)) d\tau \quad (3.21)$$

### 3.3.4 Construction des matrices de massubes et de rigidité :

#### Traction compression

**Rigidité** On considère une fonction d'interpolation à 2 paramètres de la forme :

$$u^*(x) = (1, x) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

$u^*(0) = u_1 \rightarrow a_1 = u_1, u^*(L) = u_2 \rightarrow a_2 = \frac{u_2 - u_1}{L}$  Il vient

$$u^*(x) = (1, x) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (1, x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Calculons maintenant la matrice de raideur associée à l'énergie de déformation de l'élément.

$$\delta W_i = \int_0^L \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} S dx = \int_0^L ES \delta \varepsilon_{xx} \varepsilon_{xx} dx = \int_0^L ES \delta u_{,x} u_{,x} dx \quad (3.24)$$

On utilise l'approximation du champs de déplacement pour calculer  $u_{,x}$  :

$$u_{,x} = N_{,x} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

L'énergie de déformation devient donc  $2E_e = uT[K_e]u_e$

$$[K_e] = \int_0^L [N,x]^T ES[N,x]dx = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

**Matrice de masse :**

On considère la même fonction d'interpolation. L'énergie cinétique s'écrit :

$$\delta W_j = \int_{structure} \rho \delta u \ddot{u} dV = \int_0^L \rho S \delta u \ddot{u} dV \quad (3.27)$$

Il vient :

$$\delta W_j = \int_{structure} \rho \delta u \ddot{u} dV = \delta u(t) \int_0^L \rho S [N]^T [N] dV \ddot{u}(t) \quad (3.28)$$

D'ou

$$\mathbf{M} = \rho S \begin{pmatrix} \frac{L}{3} & \frac{L}{6} \\ \frac{L}{6} & \frac{L}{3} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

**Matrice de flexion**

**Matrice de rigidité :**

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & -4L^2 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

**Exercice :**

*Retrouver la matrice de rigidité en flexion*

**Exercice utile pour projet R& D :**

*Retrouver la matrice de rigidité en flexion pour un élément à section variable*

**Matrice de masse :**

$$M = \rho S \begin{pmatrix} \frac{13L}{35} & \frac{11L^2}{210} & \frac{9L}{70} & -\frac{13L^2}{420} \\ \frac{11L^2}{210} & \frac{L^3}{105} & \frac{13L^2}{420} & -\frac{L^3}{140} \\ \frac{9L}{70} & \frac{13L^2}{420} & \frac{13L}{35} & -\frac{11L^2}{210} \\ -\frac{13L^2}{420} & -\frac{L^3}{140} & -\frac{11L^2}{210} & \frac{210}{105} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

**Exercice** *Retrouver la matrice de masse pour un élément régulier*

### 3.3.5 Assemblage des matrices de masse et de rigidité

**exercice :** *On considère un poteau avec 3 éléments de densité linéique  $\rho$  de longueur  $L$ , d'inertie  $I$  construire la matrice de masse et de rigidité. On considère maintenant une charge concentrée au noeud. Modifier la matrice de masse pour prendre en compte ces masses concentrées*

### 3.3.6 Résolution d'un problème de dynamique

Le PTV nous donne  $\forall \delta u \delta u M \ddot{u} + \delta u K u = \delta u F$ . On cherche des solutions de l'équation sans second membre :  $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = 0$

de la forme  $u = \sum \mathbf{X}_i (a_i \sin(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t))$ . Il vient :

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \mathbf{X} (a_i \sin(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t)) = 0 \quad (3.32)$$

D'ou  $\omega_i^2$  et  $X_i$  sont les valeurs propres et les vecteurs propres de  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ . On peut donc déterminer directement les valeurs propres et les vecteurs propres. Ces vecteurs propre formes une masse de  $n$  vecteurs indépendant  $n$  étant le rang de la matrice de masse (définie positive). La solution du systeme discret est de la forme :

$$u(t) = \sum_n X_i (a_i \sin(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t)) \quad (3.33)$$

**Orthogonalité des modes propres :**

Les modes propres d'une structure présentent la propriété fondamentale d'être orthogonaux. Considérons 2 modes propres distincts  $X_i$  et  $X_j$  de pulsation  $\omega_i$  et  $\omega_j$ . On a

$$K X_i = \omega_i^2 M X_i \quad (3.34)$$

$$KX_j = \omega_j^2 MX_j \quad (3.35)$$

On multiplie ces equations par respectivement  $X_j^T$  et  $X_i^T$  Il vient :

$$X_j^T KX_i = X_j^T \omega_i^2 MX_i \quad (3.36)$$

$$X_i^T KX_j = X_i^T \omega_j^2 MX_j \quad (3.37)$$

Les 2 équations sont des scalaires en transposant dans l'équation 3.36 ( $K$  et  $M$  étant symétrique) on obtient :

$$X_i^T KX_j = X_i^T \omega_i^2 MX_j \quad (3.38)$$

avec l'équation 3.37sub On obtient :

$$X_j^T \omega_i^2 MX_i = X_i^T \omega_j^2 MX_j \quad (3.39)$$

ou encore :

$$(\omega_j^2 - \omega_i^2) X_i^T MX_j = 0 \quad (3.40)$$

vu que les 2 pulsations sont différentes on a  $X_i^T MX_j = 0$  En procédant de la meme manière on a :  $X_i^T KX_j = 0$

Les vecteurs  $X_i$  forment une base orthogonale.

### Prise en compte des efforts extérieurs

L'équation au dérivée partielle s'écrit :

$$M\ddot{u} + Ku = F \quad (3.41)$$

Les vecteurs  $X_i$  forme une base. La solution sera donc de la forme :

$$\mathbf{u} = \sum_1^n X_i f_i(t) \quad (3.42)$$

On remplace dans l'équation 3.41 et on obtient :

$$\sum_{i=1}^n MX_i \ddot{f}_i(t) + KX_i f_i(t) = F(t) \quad (3.43)$$

on multiplie cette equation par  $X_j$  On a

$$X_j^T \left( \sum_{i=1}^n MX_i \ddot{f}_i(t) + KX_i f_i(t) \right) = X_j^T F(t) \quad (3.44)$$

Les modes étant orthogonaux on se rammene à

$$\left( X_j^T MX_j \ddot{f}_j(t) + X_j^T KX_j f_j(t) \right) = X_j^T F(t) \quad (3.45)$$

Cette équation est une équation scalaire qui peut être résolue avec les méthodes classique de résolution d'équation différentielle ordinaire du second ordre.

On reconstruit ensuite la solution générale :

$$u(t) = \sum_{i=1}^n X_i f_i(t) \quad (3.46)$$

**exercice :** On considère un poteau avec 2 éléments de densité linéique  $\rho$  de longueur  $L$  d'inertie en flexion  $I$  sollicité en tête par un effort  $F = F_0 \cos(\omega t)$  et encastré en pied. Déterminer la réponse de ce poteau

**exercice :** On considère de la traction compression représenté Figure 3.4. Calculer les modes propres et les valeurs propres *Pensez a faire des changement de variable de type  $X = \omega^2 \frac{\rho S}{EL}$  On obtient alors des polysomes de degré 2 (un peu horrible mais résoluble).*

Solution :

$$\omega_1 = \frac{6ES}{\rho L} \frac{5L + 9m - 3\sqrt{2L^2 + 6mL + 5m^2}}{7L^2 + 36mL + 36m^2}, \quad \omega_2 = \frac{6ES}{\rho L} \frac{5L + 9m + 3\sqrt{2L^2 + 6mL + 5m^2}}{7L^2 + 36mL + 36m^2}$$

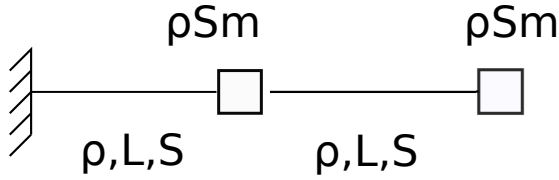


FIGURE 3.4 – Barre en traction compression. Calculer les fréquences propres et les modes propres de cette structure

Les vecteurs propres associés sont :

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2L^2 + 6Lm + 5m^2} - m}{L + 2m} \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2L^2 + 6Lm + 5m^2} - m}{L + 2m} \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Problème :** La détermination de l'ensemble des valeurs propres et vecteurs propre pour une structure complexe peut être très coûteuse. En pratique, seul les valeurs propres les plus petites sont utile ( $< 34Hz$  comme vu l'an dernier). Pour vérifier la qualité des calculs on calcule la masse modale des modes restants. Elle doit être  $< 10\%$  de la masse totale. Attention si les maillages ne sont pas suffisamment régulier des modes parasites peuvent apparaître.

### 3.3.7 Masse modale et masse modale cumulée

La masse modale associé au mode  $i$  se calcule de la manière suivantes :

$$m_i = \frac{X_i^T M X_i}{X_i^2} \quad (3.47)$$

La masse modale cumulée est la somme de ces masse modale.

### 3.3.8 Prise en compte des termes dissipatifs :

La matrice d'amortissement élémentaire en supposant que l'amortissement est de type visqueux ( $f = \eta \dot{u}$ ) se construit de la même manière que la matrice de masse.

$$\delta W_{diss} = \int_{structure} \eta \dot{u} du dV \quad (3.48)$$

On a donc pour les éléments 1D :

$$C = \int_e \eta_e [N_e]^T [N_e] dx \quad (3.49)$$

En pratique on ne calcule que très rarement cette matrice : la dissipation est très rarement visqueuse.

## 3.4 Solution exacte de la vibration en flexion d'une poutre

### 3.4.1 Equation du mouvement de la poutre

On considère une poutre de longueur  $L$  d'inertie  $I$  de module d'Young  $E$ .

- déplacement vertical  $v(x,t)$
- rotation de la section  $\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$
- courbure  $\chi = \frac{\partial \theta}{\partial x}$
- le moment fléchissant  $M = EI\chi$
- L'effort tranchant  $T = -\frac{\partial M}{\partial x}$

Les équations d'équilibre (faire sur un petit élément  $dx$  et prendre la limite) nous donne :

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (3.50)$$

On obtient donc :

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (3.51)$$

Conditions aux limites possibles :

- Déplacement imposé nul aux extrémités
- rotation imposée nul aux extrémités
- Moment imposé nul aux extrémités
- effort imposé nul aux extrémités

### 3.4.2 Fréquences et modes propres

On effectue une séparation des variables :

$$v(x, t) = V(x)T(t) \quad (3.52)$$

L'équilibre fait apparaître 2 fonctions de variables indépendantes. les deux fonctions sont égales à une constante. Cette constante est choisie positive pour assurer la stabilité en temps de la solution :

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{1}{V} \frac{d^4 V}{dx^4} = -\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \omega^2 \quad (3.53)$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{d^4 V}{dx^4} - \beta^4 V = 0 & \beta^4 = \frac{\rho S \omega^2}{EI} \\ \frac{d^2 T}{dt^2} + T \omega^2 = 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

Les solutions sont de la forme

$$\begin{cases} V(x) = A \cosh(\beta x) + B \sinh(\beta x) + C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \\ \frac{d^2 T}{dt^2} + T \omega^2 = 0 \end{cases} \quad (3.55)$$

Les constantes  $A, B, C, D$  sont calculées à partir des conditions aux limites. Les constantes  $E$  et  $F$  sont calculées à partir des conditions initiales. A partir des conditions aux limites on peut facilement faire apparaître l'équation caractéristique permettant de trouver les pulsations propres du système

$$[CL] \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \det(CL) = 0 \quad (3.56)$$

**Exercice :** Calculer les modes propres et les fréquences propres pour une poutre sur 2 appuis

**Exercice : A faire avant le partiel :** Déterminer les équations du mouvement pour une poutre en traction compression. Proposer les différentes conditions aux limites. Calculer les pulsations propres pour le cas où la poutre est bi encastrée.

## 3.5 Méthode du quotient de Rayleigh

### 3.5.1 Quotient de Rayleigh

Un mode de vibration s'exprime sous la forme :

$$\vec{u}(M, t) = A \sin(\omega t + \phi) \vec{U}(M) \quad (3.57)$$

où  $A$  est l'amplitude,  $\omega$  la pulsation propre et  $\vec{U}$  la déformée modale propre. La vibration d'un système conservatif étant un échange d'énergie permanent entre énergie cinétique et énergie de déformation (énergie potentielle) on a la propriété suivante :

$$\frac{E_{pmax}}{E_{cmax}} = 1 \quad (3.58)$$

Dans un système conservatif l'énergie potentielle ne fait intervenir que des dérivées spatiales et prend généralement la forme :

$$E_p(u) = A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \int_{structure} e_d(U) dV \quad (3.59)$$

où  $e_d$  est l'énergie de déformation locale. L'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c(u) = \int_{structure} \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dV = \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \int_{structure} \frac{1}{2} \rho U^2 dV \quad (3.60)$$

Les maxima sont :

$$E_{pmax} = A^2 \int_{structure} e_d(U) dV, \quad E_{cmax} = \omega^2 A^2 \int_{structure} \frac{1}{2} \rho U^2 dV \quad (3.61)$$

L'équation 3.58 de conservation de l'énergie nous donne alors :

$$\omega^2 = \frac{\int_{structure} e_d(U) dV}{\int_{structure} \frac{1}{2} \rho U^2 dV} \quad (3.62)$$

On a déjà vu ça l'an dernier. Cette quantité, qui ne dépend que de la forme propre  $U(M)$  est appelée coefficient de Rayleigh de  $U$  et noté :

$$R(u) = \frac{\int_{structure} e_d(U) dV}{\int_{structure} \frac{1}{2} \rho U^2 dV} \quad (3.63)$$

Par exemple dans le cas des vibrations longitudinales où une poutre droite est soumise qu'à de la traction et de la compression si  $u(x, t)$  est le déplacement axial d'une section mis sous la forme  $u(x, t) = A \sin(\omega t + \phi) U(x)$  on a :

$$R(u) = \frac{\frac{1}{2} \int_{structure} ES(U_{,x})^2 dV}{\int_{structure} \frac{1}{2} \rho U^2 dV} \quad (3.64)$$

Dans le cas des vibrations en flexion d'une poutre droite,  $v(x, t)$  est le déplacement de la ligne moyenne mis sous la forme :  $v(x, t) = A \sin(\omega t + \phi) V(x)$  on a

$$R(u) = \frac{\frac{1}{2} \int_{structure} EI(V_{,xx})^2 dV}{\int_{structure} \frac{1}{2} \rho V^2 dV} \quad (3.65)$$

le terme du haut correspond également au travail des efforts intérieur que nous avons vu l'an dernier  $ep = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS_R}$  que nous avons vu l'an dernier avec  $M = EI v_{,xx}$  et  $N = ES u_{,xx}$ ,  $u$  et  $v$  étant respectivement les déplacements horizontal et vertical. Le travail est la variation de l'énergie entre un état 0 et un état donné :  $T_{int} = E_p - E_{p0}$

Lorsque la forme  $U(M)$  est la forme modale propre de la structure alors le coefficient de Rayleigh de  $U$  est égal au carré de la pulsation propre

$$R(U) = \omega^2 \quad (3.66)$$

et ce quel que soit le rang du mode considéré. Lorsqu'on considère une déformée quelconque il est toujours possible de calculer son coefficient de Rayleigh  $R(V)$ . Lorsque  $V$  est cinématiquement admissible, on peut montrer que :

$$R(U_0) \leq R(V) \quad (3.67)$$

ou  $U_0$  est la forme fondamentale du système (premier mode de vibration). On obtient ainsi une méthode d'approximation par borne supérieure de pulsation fondamentale du système ou de la fréquence fondamentale.

Il est évident que le choix de la forme joue un rôle très important dans la qualité d'approximation. Le sens physique intervient beaucoup. Des choix possibles de forme approchée sont :

- solution exacte d'un problème voisin
- déformée statique de la structure sous son poids propre (en incluant la masse ajoutée qui peut être présente)
- toute bonne idée venant de votre expérience
- le choix du prof le jour de l'examen

### 3.5.2 Application

On considère une poutre béton de largeur  $b = 20cm$  et de hauteur  $50cm$  de longueur  $L = 15m$ . La dalle est encadrée d'un côté est sur appuis élastique de l'autre côté. L'appui élastique est de raideur  $k = 10^5 N/m$  Questions :

1. On néglige l'appui élastique
  - Calculer la solution exacte de ce problème *Piste de solution : regarder section 3.4*
  - Vérifier que le coefficient de Rayleigh redonne bien la pulsation obtenue précédemment
  - Calculer le coefficient de Rayleigh pour  $V(x) = x^2$ ,  $V(x) = \sinh(x)$  puis pour la solution avec charge ponctuelle en bout de poutre puis avec une charge répartie.
2. On tient compte de l'appuis élastique
  - Calculer la solution exacte de ce problème *Piste de solution : réutiliser la section 3.4 et utiliser une condition au limite de type  $T = -kv$*
  - Vérifier que le coefficient de Rayleigh calculé à partir de cette solution exacte redonne bien la pulsation obtenue précédemment
  - Calculer le coefficient de Rayleigh pour  $V(x) = x^2$ ,  $V(x) = \sinh(x)$

**En semaine 1 vous devez arriver la.**

## 3.6 Méthode de Rayleigh Ritz

### 3.6.1 Méthode

La méthode de Rayleigh Ritz consiste à chercher une approximation des modes de vibrations dans un espace de dimension  $N$  engendré par  $N$  fonctions choisies. C'est à dire qu'on cherche les solutions de la forme :

$$W(x, y, z) = \sum_{i=1}^n q_i \phi_i(x, y, z) = [q]^T [\phi] \quad (3.68)$$

avec  $[q]^T = [q_1, \dots, q_n]$  et  $[\phi]^T = [\phi_1, \dots, \phi_n]$ . Les fonctions  $\phi_i$  étant connue le quotient de Rayleigh d'une telle forme dépend uniquement des paramètres  $q_i$  et peut être mis sous la forme :

$$R(W) = R(q_1, \dots, q_n) = \frac{[q]^T \mathbf{K}[q]}{[q]^T \mathbf{M}[q]} \quad (3.69)$$

Où  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur et  $\mathbf{M}$  la matrice de masse. (comme dans le cas méthode des déplacements ou élément finis où on a juste pris des fonctions particulière de forme polynomiale) La minimisation du quotient de Rayleigh correspond à

$$\frac{\partial R}{\partial [q]} = 0 \quad (3.70)$$

qui correspond à annuler les dérivées pour obtenir les point de minimum

$$2 \frac{\mathbf{K}[q][q]^T \mathbf{M}[q] - [q]^T \mathbf{K}[q] \mathbf{M}[q]}{([q]^T \mathbf{M}[q])^2} = 0 \quad (3.71)$$

avec

$$w^2 = \frac{[q]^T \mathbf{K}[q]}{[q]^T \mathbf{M}[q]} \quad (3.72)$$

On obtient la minimisation suivante :

$$\mathbf{K}[q] - \omega^2 \mathbf{M}[q] = 0 \quad (3.73)$$

Les quantités  $\omega_i$  qui assurent le minimum du quotient de Rayleigh sont donc les termes qui annulent le déterminant :

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (3.74)$$

On peut montrer que  $\omega_i$  est une approximation par excès de la  $i$ ème fréquence propre du système. Les vecteurs  $[q^i]$  associé aux  $\omega_i$  sont les solutions du problème aux valeurs propres :

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})[q^i] = 0 \quad (3.75)$$

et donne les composantes dans la base des fonctions  $\phi_i$  d'approximation des  $n$  premiers modes propres du système. De manière générale, on peut faire les remarques suivantes sur la qualité d'approximation des  $N$  premiers modes propres :

- la qualité d'approximation décroît avec  $i$
- la qualité d'approximation des pulsations est meilleures que celle des modes
- la qualité de l'approximation augmente avec la dimension de la base  $N$

## Exercice 1

On s'intéresse aux vibrations transversale d'une barre sur 2 appuis.

1. on considère 1 fonction d'interpolation  $\phi(x) = x(x - L)$ . Calculer la fréquence propre de la barre. Comparer avec la solution analytique
2. on considère 2 fonction d'interpolation  $\phi(x) = x(x - L)$  et  $\phi_2 = x(x - L)(x - L/2)$  Comparer avec les pulsations exactes.
3. On considère maintenant la poutre avec un appui élastique à droite et un encastrement à gauche. Proposez 3 fonctions et déterminer les pulsations propres obtenue. Comparer ces pulsations avec les résultats obtenu à l'aide de Robot.

### 3.6.2 Généralisation

On cherche maintenant a généraliser Rayleigh Ritz en utilisant l'équation 3.5 rappelée ci dessous. La validité de cette équation est limité à la flexion. Elle peut être reconstruite en traction ou dans le cas général.

$$\left[ -v(t) \int_0^L \overbrace{EIA''(x)^2 dx}^k + \int_0^L \overbrace{p(x,t)A(x) dx}^{F_e} - \ddot{v}(t) \int_0^L \overbrace{\rho SA^2(x) dx}^m \right] \delta v(t) = 0 \quad (3.76)$$

On considère  $A(x)v(t) = \sum_n q_i(t)\phi_i(x)$  En remplaçant cette définition dans l'équation on obtient :

$$\delta q(t)^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) - \mathbf{F}) = 0 \quad (3.77)$$

avec

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \int_0^L EI\phi_1''(x)\phi_1''(x) & \int_0^L EI\phi_1''(x)\phi_2''(x) & \dots & \int_0^L EI\phi_1''(x)\phi_i''(x) \\ \int_0^L EI\phi_2''(x)\phi_1''(x) & \int_0^L EI\phi_2''(x)\phi_2''(x) & \dots & \int_0^L EI\phi_2''(x)\phi_i''(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^L EI\phi_j''(x)\phi_1''(x) & \int_0^L EI\phi_j''(x)\phi_2''(x) & \dots & \int_0^L EI\phi_j''(x)\phi_i''(x) \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \int_0^L \rho S\phi_1(x)\phi_1(x) & \int_0^L \rho S\phi_1(x)\phi_2(x) & \dots & \int_0^L \rho S\phi_1(x)\phi_i(x) \\ \int_0^L \rho S\phi_2(x)\phi_1(x) & \int_0^L \rho S\phi_2(x)\phi_2(x) & \dots & \int_0^L \rho S\phi_2(x)\phi_i(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^L \rho S\phi_j(x)\phi_1(x) & \int_0^L \rho S\phi_j(x)\phi_2(x) & \dots & \int_0^L \rho S\phi_j(x)\phi_i(x) \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

$$\mathbf{F}^T = \left( \int_0^L p(x,t)\phi_1(x) dx \quad \int_0^L p(x,t)\phi_2(x) dx \quad \dots \quad \int_0^L p(x,t)\phi_j(x) dx \right) \quad (3.80)$$

On a parfois des  $\frac{1}{2}$  dans les définitions des matrices de masses ou de rigidité par rapport au Rayleigh Ritz vu précédement. Vous pouvez choisir de les rajouter afin d'avoir une uniformité (mais la démonstration donne cela et cela ne change rien sur les résultats finaux. L'important et de rester cohérent.) Pour démontrer cela on fait la même chose que ce que l'on a fait au premier semestre pour la méthode des déplacements. Ici au lieu de prendre des polynomes sur un seul élément et assembler on va construire les différentes matrices (masse, rigidité) et le vecteur effort directement à partir de la déformée supposée de la structure globale.

Les résultats finaux (pas les matrices) obtenu avec la méthode des déplacement avec un seul élément correspond exactement à cette approche en considérant une série de  $\phi_i(x) = x^{i-1}$ ,  $i = 1, 4$

## Exercice 2

On considère une poutre en flexion sur 2 appuis (rotule) de longueur L, module d'Young E, inertie I, densité  $\rho$  et section S . On considère les déformée suivante :  $\phi_1 = \sin(\pi x/L)$  et  $\phi_2 = \sin(2\pi x/L)$ . On considère une charge répartie uniforme sur toute la structure de la forme  $p(t) = p_0 \sin(\omega_0 t)$

- En utilisant la méthode de Rayleigh calculer les 2 pulsations propres liée à  $\phi_1$  et  $\phi_2$ .
- Calculer les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  pour la méthode générale de Rayleigh ainsi que le vecteur effort généralisé ( $\mathbf{F}(t)$ )
- Résoudre le problème de dynamique (comme nous l'avons fait pour la méthode des déplacements)

### Exercice 3

On considère maintenant une poutre en compression. Encastrée d'un coté et libre de l'autre. On applique une force ponctuelle  $f(t) = f_0^1 \sin(\omega_0 t) + f_0^2 \sin(2\omega_0 t)$  à l'extrémité libre de la poutre (dans son axe). Une masse concentrée  $m$  est appliquée en bout de poutre. On considère les déformées suivantes  $\phi_1(x) = x$  et  $\phi_2(x) = x^2$ .

- Calculer la réponse dynamique de ce système avec la méthode de Rayleigh Ritz générale.
- Faire le même calcul avec la méthode des déplacements en considérant 2 éléments.
- Comparer