



HAL
open science

Détection et localisation de dérives temporelles à base d'observateurs $(\max,+)$ dans les Graphes d'Événements Temporisés

Claire Paya, Euriell Le Corronc, Yannick Pencolé, Philippe Vialletelle

► **To cite this version:**

Claire Paya, Euriell Le Corronc, Yannick Pencolé, Philippe Vialletelle. Détection et localisation de dérives temporelles à base d'observateurs $(\max,+)$ dans les Graphes d'Événements Temporisés. 13ème Colloque sur la Modélisation des Systèmes Réactifs (MSR'21), Nov 2021, Paris, France. hal-04249495

HAL Id: hal-04249495

<https://hal.science/hal-04249495v1>

Submitted on 19 Oct 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Détection et localisation de dérives temporelles à base d'observateurs (max,+) dans les Graphes d'Événements Temporisés

Claire Paya^{1,2}, Euriell Le Corronc¹, Yannick Pencolé¹, and Philippe Vialetelle²

¹ LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS, UT3, Toulouse, France
{euriell.le.corronc,yannick.pencole}@laas.fr

² STMicroelectronics, Crolles, France {claire.paya,philippe.vialetelle}@st.com

Abstract

Cet article porte sur un problème de détection et localisation de dérives temporelles dans les lignes de production. Celles-ci sont modélisées par des Graphes d'Événements Temporisés (GET) en tant que systèmes (max,+)-linéaires avec perturbations, sur lesquels des observateurs peuvent être développés. L'état du système observé est estimé et un indicateur renvoie vrai si une faute est détectée. L'étape de localisation est proposée pour trois structures élémentaires de GET et utilise les résultats de la détection.

1 Introduction

Le diagnostic de pannes est un processus incontournable dans l'industrie. En particulier, dans les chaînes d'assemblage et de montage, des pannes peuvent entraîner des retards temporels entre la production réelle et le plan de production. Au sein de l'usine STMicroelectronics Crolles 300, ce problème est étudié dans le but de détecter des dérives temporelles de production. STMicroelectronics figure parmi les plus grandes entreprises de semi-conducteurs, fournissant tous les acteurs de l'électronique. La production de semi-conducteurs est une industrie complexe et l'un des défis les plus importants est de détecter et localiser les fautes survenues dans le système le plus tôt possible et le plus précisément possible avant que les retards engendrés n'aient un impact trop important et non rattrapable.

Les Systèmes à Événements Discrets (SED) sont souvent utilisés pour modéliser et diagnostiquer les fautes dans ces processus industriels. Parmi eux, le formalisme des systèmes (max,+)-linéaires, tel que présenté dans [BCOQ92], [Max91], [KLBvdB18], est particulièrement adapté pour représenter des synchronisations entre ressources, des durées d'opération ou encore des temps de transport. La représentation graphique qui leur est associée est celle des Graphes d'Événements Temporisés (GET), sous-classes des réseaux de Petri temporisés pour lesquels des durées peuvent être associées aux places.

Le diagnostic de fautes impliquant du temps dans les SED a été introduit dans [Tri02]. L'auteur utilise les automates temporisés pour raffiner les décisions de diagnostic basées sur les observations temporelles. Dans [GTY09], les réseaux de Petri temporels permettent de modéliser facilement la concurrence tandis que [KL15] utilise les techniques de l'algèbre (max,+) pour contrôler les délais de fabrication des plaques pour la production de semi-conducteurs.

Dans [LCPSP21], les auteurs présentent une méthode de détection de dérives temporelles dans un système (max,+)-linéaire représenté par un GET, en comparant simplement les sorties simulées à partir du système sans faute, avec les sorties observées. La localisation propose ensuite un ensemble - potentiellement grand - de sources possibles de la faute par des matrices de signatures et des signatures caractéristiques.

Cet article propose une méthode différente de diagnostic de fautes en utilisant des observateurs $(\max,+)$ tels que présentés dans [HMCL10]. Ces observateurs s'appliquent sur des systèmes avec des entrées de perturbation non observables, perturbations utilisées pour caractériser la faute temporelle survenant dans le système. Cette méthode est une amélioration de celle décrite dans [PLCPV20] pour la phase de détection, une approche différente de celle présentée dans [LCPSP21] pour la phase de localisation.

Dans un premier temps, l'observateur permet d'obtenir une estimation de l'état interne du système *épuré* des éléments ne prenant potentiellement pas en compte l'effet de la faute. Il s'agit d'une opération de raffinement des états estimés rendant la détection plus précise que celle décrite dans [PLCPV20]. La détection de la faute peut ensuite comparer les flux temporisés issus des *états estimés raffinés* avec les flux des états simulés à partir du modèle du système sans faute. Les intervalles de valeurs obtenus caractérisent alors l'étendue de la dérive temporelle.

Dans un second temps, contrairement à [LCPSP21] où des matrices de signature sont utilisées, une localisation de la faute détectée est proposée par l'étude des informations contenues dans les intervalles calculés afin d'en déterminer la source dans le GET. Cette étude est réalisée sur trois structures élémentaires de GET : tandem (simple séquence de places en série), parallélisme (plusieurs tandems partant d'une transition commune) et synchronisation (plusieurs tandems réunis en une transition commune). La localisation globale d'une faute dans un GET pourra alors être obtenue en combinant les résultats des analyses sur les structures élémentaires.

Cet article est organisé comme suit. La section 2 rappelle les préliminaires algébriques nécessaires. La section 3 raffine la méthode de détection détaillée dans [PLCPV20]. Les résultats de cette méthode sont utilisés pour établir les règles de localisation de la source de la faute dans un GET dans la section 4.

2 Préliminaires algébriques

Cette section rappelle les préliminaires algébriques nécessaires pour l'utilisation de systèmes $(\max,+)$ -linéaires [BCOQ92], [Max91].

2.1 Théorie des dioïdes

La théorie des dioïdes est le contexte mathématique utilisé pour modéliser des Graphes d'Événements Temporisés (GET) avec l'algèbre $(\max,+)$. Un dioïde \mathcal{D} est un ensemble composé de deux opérations internes \oplus et \otimes . L'addition \oplus est associative, commutative, idempotente (i.e. $\forall a \in \mathcal{D}, a \oplus a = a$) et a pour élément neutre ε . La multiplication \otimes est associative, distribue à droite et à gauche sur l'addition \oplus et a pour élément neutre e . L'élément ε est absorbant pour \otimes . Lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté, le symbole \otimes est omis. Un dioïde est complet s'il est clos pour les sommes infinies et si le produit \otimes distribue sur ces sommes infinies.

Par exemple, l'ensemble $\mathbb{Z}_{max} = (\mathbb{Z} \cup -\infty)$ doté de l'opération \max pour l'addition \oplus et de l'addition comme produit \otimes est un dioïde avec comme éléments neutres $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$. En y ajoutant $+\infty$, on obtient le dioïde complet $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ où $(-\infty) + (+\infty) = (-\infty)$.

Définition 1. Dans un dioïde \mathcal{D} , \preceq représente la relation d'ordre du dioïde telle que $\forall a, b \in \mathcal{D}, a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$.

Théorème 2 [BCOQ92]. Soit \mathcal{D} un dioïde complet, $x = a^*b$ est la plus petite solution de $x = ax \oplus b$ où $a^* = \bigoplus_{i \geq 0} a^i$ est l'opérateur étoile de Kleene avec $a^0 = e$ et $a^{i+1} = a \otimes a^i$.

Pour modéliser un GET en tant que système $(\max, +)$ -linéaire, un dioïde spécifique doit être défini : le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$. Ce dioïde particulier est un dioïde de séries formelles avec deux variables commutatives γ et δ . Ces deux variables représenteront les décalages temporels et événementiels d'un GET comme expliqué dans la section suivante. Ce dioïde est issu du dioïde $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ suivant.

Le dioïde complet $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ est l'ensemble des séries formelles à deux variables commutatives γ et δ à coefficients booléens dans $\{\varepsilon, e\}$ et à exposants dans \mathbb{Z} . Une série $s \in \mathbb{B}[\gamma, \delta]$ est écrite $s = \bigoplus_{(n,t) \in \mathbb{Z}^2} s(n,t) \gamma^n \delta^t$ avec $s(n,t) = e$ ou ε (respectivement présence ou absence du monôme). Les éléments neutres sont $\varepsilon(\gamma, \delta) = \bigoplus_{(n,t) \in \mathbb{Z}^2} \varepsilon \gamma^n \delta^t$ et $e(\gamma, \delta) = \gamma^0 \delta^0$.

Graphiquement, une série de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ est décrite par une collection de points de coordonnées (n, t) dans \mathbb{Z}^2 avec γ comme axe horizontal et δ comme axe vertical. Par exemple, la figure 1 montre les séries $u_1 = u_2 = \gamma^0 \delta^1 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^5 \oplus \gamma^5 \delta^6 \oplus \gamma^6 \delta^7 \oplus \gamma^7 \delta^{+\infty}$ (monômes ayant e comme coefficient booléen).

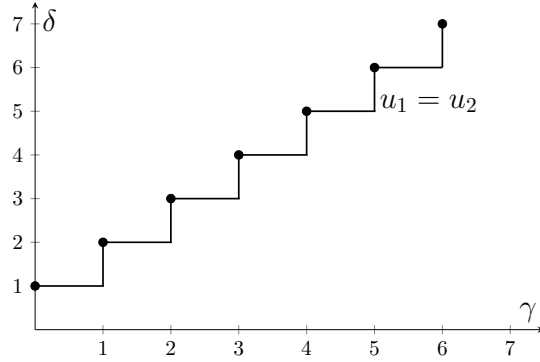


Figure 1: Représentation des séries $u_1 = u_2$

Le dioïde complet $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est le quotient de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ modulo $\gamma^*(\delta^{-1})^*$ avec $\forall a, b \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta], a = b \Leftrightarrow a\gamma^*(\delta^{-1})^* = b\gamma^*(\delta^{-1})^*$. Les opérations internes et les éléments neutres sont les mêmes que ceux de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$. Plus précisément, l'élément neutre de l'addition \oplus peut s'écrire directement $\varepsilon = \gamma^{+\infty} \delta^{-\infty}$. Toutes les séries de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ peuvent être exprimées selon la forme canonique suivante.

Définition 3. La forme canonique de $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est

$$s = \bigoplus_{k=0}^K \gamma^{n_k} \delta^{t_k} \text{ avec } K \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \text{ et } \begin{cases} n_0 < n_1 < \dots \\ t_0 < t_1 < \dots \end{cases} .$$

2.2 Modèles de systèmes $(\max, +)$ -linéaires

La figure 2 présente un GET avec deux entrées u_1, u_2 et une sortie y_1 . Dans cette figure, les durées associées aux places sont des nombres entiers exprimés par des lettres a, b, c, d, f et la transition x_3 est une synchronisation entre les chemins issus de u_1 et de u_2 . La structure entière d'un tel GET peut être modélisée par des équations dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ à travers un ensemble de matrices A, B et C . Ensuite, les relations entre les transitions d'entrée u , les états x et les

transitions de sortie y sont exprimées dans la représentation d'état. Soit $u \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{p \times 1}$, $x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{n \times 1}$ et $y \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{q \times 1}$, la représentation d'état d'un GET est :

$$\begin{cases} x = Ax \oplus Bu, \\ y = Cx, \end{cases}$$

avec $A \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{n \times n}$, $B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{n \times p}$ et $C \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{q \times n}$. L'égalité $x = Ax \oplus Bu$ peut être transformée en $x = A^*Bu$ grâce au théorème 2. Nous obtenons alors :

$$y = CA^*Bu.$$

La matrice $H = CA^*B$ représente la fonction de transfert du système, soit sa dynamique entre les entrées et les sorties.

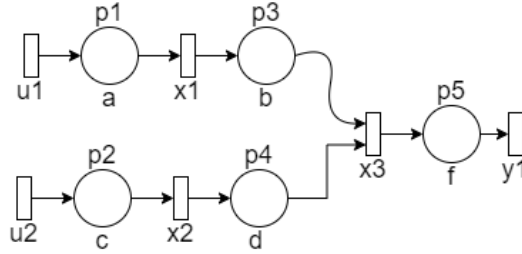


Figure 2: Un Graphe d'Événements Temporisés (GET)

Exemple 4. Dans le GET de la figure 2, supposons que les durées soient $a = b = d = 1$ pour les places p_1, p_3, p_4 , $c = 2$ pour p_2 et $f = 0$ pour p_5 . Les matrices de la représentation d'état sont alors :

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma^0\delta^1 & \gamma^0\delta^1 & \cdot \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \gamma^0\delta^1 & \cdot \\ \cdot & \gamma^0\delta^2 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad C = (\cdot \quad \cdot \quad \gamma^0\delta^0).$$

Les exposants des γ représentent les décalages événementiels entre les tirs des transitions et les exposants des δ représentent les décalages temporels. Par exemple, dans $B(1, 1) = \gamma^0\delta^1$, le n^{eme} tir de x_1 dépend du n^{eme} tir de u_1 (pas de décalage événementiel) ; les dates des tirs de x_1 sont décalées exactement d'une durée $a = 1$ par rapport aux dates de tir de u_1 . Le tir d'une transition d'entrée u_i représente l'occurrence d'un événement. Les flux d'événements entrants d'un GET sont représentés par des séries de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ telles que u_1 et u_2 illustrées figure 1 et rappelées ici :

$$u_1 = u_2 = \gamma^0\delta^1 \oplus \gamma^1\delta^2 \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^4 \oplus \gamma^4\delta^5 \oplus \gamma^5\delta^6 \oplus \gamma^6\delta^7 \oplus \gamma^7\delta^{+\infty}.$$

Dans le premier monôme $\gamma^0\delta^1$ de ces séries, l'exposant 0 de γ est la première occurrence d'événement de cette entrée u_1 (l'exposant 1 est la deuxième...) ; l'exposant 1 de δ est la date de sa première occurrence. L'absence d'un n^{eme} événement est indiqué par $+\infty$ dans le monôme $\gamma^n\delta^{+\infty}$.

2.3 Comparaison temporelle entre séries

Par la suite, des comparaisons temporelles entre séries vont être réalisées grâce à la théorie de la résiduation.

Définition 5. Soit $\Pi : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{C}$ une fonction isotone¹ pour laquelle \mathcal{D} et \mathcal{C} sont des dioïdes complets. La plus grande solution de $\Pi(x) = b$, si elle existe, est appelée la résiduée de Π et est notée Π^\sharp . Lorsque Π est résiduable, Π^\sharp est l'unique fonction isotone telle que $\Pi \circ \Pi^\sharp \preceq I_{d\mathcal{C}}$ et $\Pi^\sharp \circ \Pi \succeq I_{d\mathcal{D}}$ où $I_{d\mathcal{C}}$ et $I_{d\mathcal{D}}$ sont respectivement les fonctions identités de \mathcal{C} et \mathcal{D} .

Le produit à droite $R_a : x \mapsto x \otimes a$ défini sur un dioïde complet \mathcal{D} est résiduable. Sa résiduée est $R_a^\sharp(x) = x \not\phi a$ et correspond à la pseudo-inverse du produit.

Des comparaisons temporelles entre séries peuvent être définies via ces résiduées. Cela requiert l'utilisation de fonctions dites dateurs pour obtenir tous les temps utilisés dans les séries de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$.

Définition 6. Soit $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, la fonction dateur de s est la fonction non décroissante $\mathcal{D}_s(n) : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ telle que $s = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n \delta^{\mathcal{D}_s(n)}$.

Exemple 7. La série u_1 a pour fonction dateur $\mathcal{D}_{u_1}(0) = 1$, $\mathcal{D}_{u_1}(1) = 2$, $\mathcal{D}_{u_1}(2) = 3$, $\mathcal{D}_{u_1}(3) = 4$, $\mathcal{D}_{u_1}(4) = 5$, $\mathcal{D}_{u_1}(5) = 6$ et $\mathcal{D}_{u_1}(6) = 7$. Cette fonction liste toutes les dates des occurrences d'événements de u_1 . Comme $u_1 = u_2$, u_2 a évidemment la même fonction dateur.

Définition 8. Soient $a, b \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ et leurs fonctions dateurs respectives \mathcal{D}_a et \mathcal{D}_b . La fonction de décalage temporel représentant l'écart de temps entre a et b pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ est définie par $\mathcal{T}_{a,b}(n) = \mathcal{D}_a(n) - \mathcal{D}_b(n)$.

Théorème 9 [Max91]. Soient $a, b \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, la fonction de décalage temporel $\mathcal{T}_{a,b}(n)$ peut être bornée par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{D}_{b \not\phi a}(0) \leq \mathcal{T}_{a,b}(n) \leq -\mathcal{D}_{a \not\phi b}(0),$$

où $\mathcal{D}_{b \not\phi a}(0)$ est obtenu à partir du monôme $\gamma^0 \delta^{\mathcal{D}_{b \not\phi a}(0)}$ de la série $b \not\phi a$ et $\mathcal{D}_{a \not\phi b}(0)$ est obtenu à partir de $\gamma^0 \delta^{\mathcal{D}_{a \not\phi b}(0)}$ de $a \not\phi b$.

Définition 10. Soient $a, b \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, l'intervalle de décalage temporel entre les séries a et b est

$$\Delta(a, b) \triangleq [\mathcal{D}_{b \not\phi a}(0); -\mathcal{D}_{a \not\phi b}(0)], \quad (1)$$

où $\gamma^0 \delta^{\mathcal{D}_{b \not\phi a}(0)} \in b \not\phi a$ et $\gamma^0 \delta^{\mathcal{D}_{a \not\phi b}(0)} \in a \not\phi b$.

Exemple 11. Considérons deux séries différentes $a = \gamma^0 \delta^{12} \oplus \gamma^1 \delta^{15} \oplus \gamma^2 \delta^{18} \oplus \gamma^3 \delta^{21} \oplus \gamma^4 \delta^{+\infty}$ et $b = \gamma^0 \delta^{12} \oplus \gamma^1 \delta^{15} \oplus \gamma^2 \delta^{19} \oplus \gamma^3 \delta^{23} \oplus \gamma^4 \delta^{+\infty}$. Le décalage temporel minimal entre a et b est $\mathcal{D}_{b \not\phi a}(0) = 0$ obtenu à partir de $b \not\phi a = \gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^3 \oplus \gamma^2 \delta^7 \oplus \gamma^3 \delta^{11} \oplus \gamma^4 \delta^{+\infty}$. Le décalage temporel maximal est $-\mathcal{D}_{a \not\phi b}(0) = 2$ obtenu à partir de $a \not\phi b = \gamma^0 \delta^{-2} \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^6 \oplus \gamma^3 \delta^9 \oplus \gamma^4 \delta^{+\infty}$. L'intervalle de décalage temporel est $\Delta(a, b) = [0; 2]$, ce qui signifie que a est égal ou plus rapide d'au maximum 2 unités de temps que b .

¹ Π isotone $\equiv \forall s, s' \in \mathcal{D} \ s \preceq s' \Rightarrow \Pi(s) \preceq \Pi(s')$.

3 Détection de dérives temporelles

Cette section présente un indicateur à base d'observateurs $(\max, +)$ qui sera utilisé pour détecter et localiser des dérives temporelles. Tout comme l'indicateur proposé dans [PLCPV20], il utilise les observateurs de systèmes $(\max, +)$ -linéaires tels que définis dans [HMCL10] (cf. section 3.1), et repose sur le fait qu'une dérive temporelle peut être caractérisée par des entrées de perturbation (cf. section 3.2). Ce nouvel indicateur est également basé sur le raffinement de l'état estimé (cf. section 3.3) qui permet d'améliorer la précision de l'information de localisation.

3.1 Synthèse d'un observateur de systèmes $(\max, +)$ -linéaires avec perturbations

Un observateur d'un GET, comme défini dans [HMCL10] et illustré figure 3, cherche à estimer l'état interne du système en mesurant son entrée u et sa sortie y_o en présence de perturbations caractérisées par une entrée spécifique w . Ainsi, la représentation d'état du système devient :

$$\begin{cases} x = Ax \oplus Bu \oplus Rw, \\ y_o = Cx. \end{cases} \quad (2)$$

Dans cette représentation, $w \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{l \times 1}$ avec l le nombre de transitions internes perturbées. La matrice $R \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times l}$ est remplie par des monômes $\gamma^0 \delta^0$ lorsque les transitions internes sont perturbées ; avec ε sinon. Les équations de l'observateur sont :

$$\begin{cases} x_e = Ax_e \oplus Bu \oplus L(y_o \oplus y_e) \\ = (A \oplus LC)^* Bu \oplus (A \oplus LC)^* LCA^* Rw, \\ y_e = Cx_e, \end{cases} \quad (3)$$

dans lesquelles x_e et y_e sont respectivement l'état estimé et la sortie estimée du système. $L \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times q}$ est une nouvelle matrice appelée la matrice d'observation.

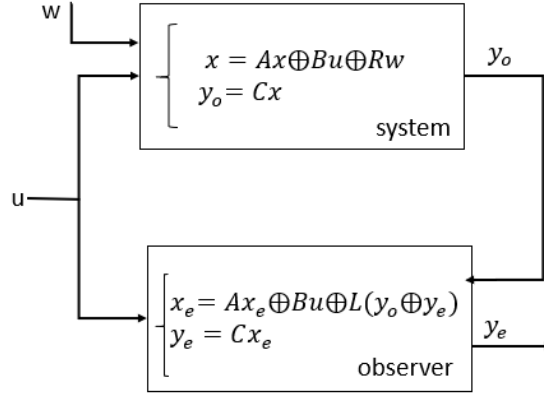


Figure 3: Structure d'un observateur avec des entrées de perturbation

Pour obtenir une estimation de l'état x_e aussi proche que possible de l'état réel x , l'observateur utilise la plus grande matrice $L \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times q}$ telle que $x_e \preceq x$, soit :

$$(A \oplus LC)^* Bu \oplus (A \oplus LC)^* LCA^* Rw \preceq A^* Bu \oplus A^* Rw$$

ce qui est donné par $L = (A^*B\cancel{C}A^*B) \wedge (A^*R\cancel{C}A^*R)$. La matrice L représente alors les connexions entre la sortie observée y_o du système et les transitions internes x_e de l'observateur.

Exemple 12. Dans le GET de la figure 2 avec les données de l'exemple 4, pour la matrice de perturbation $R \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{3 \times 3}$ suivante, la matrice d'observation $L \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{3 \times 1}$ est

$$R = \begin{pmatrix} \gamma^0 \delta^0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \gamma^0 \delta^0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \gamma^0 \delta^0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \gamma^0 \delta^0 \end{pmatrix}.$$

3.2 Caractérisation d'une dérive temporelle par une entrée de perturbation

Pour utiliser au mieux l'estimation d'état faite par l'observateur pour la détection et la localisation de dérives temporelles, la faute doit être caractérisée par une entrée de perturbation comme décrit dans [PLCPV20]. Ainsi, une dérive temporelle est considérée comme un phénomène permanent et est formellement définie par un délai inconnu θ sur une place p d'un GET. La place p , avec une transition en amont x_{i-1} et une transition en aval x_i , est caractérisée par un nombre o de jetons et une durée t (cf. figure 4).

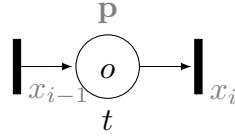


Figure 4: Représentation d'une place p dans un GET

La transition en amont de la place p est décrite par :

$$x_{i-1} = \bigoplus_{n=0}^K \gamma^{s_n} \delta^{h_n}$$

(cf. définition 3) avec s_n le numéro du tir de la transition, h_n la date du tir et K le nombre de tirs. La transition en aval est :

$$x_i = \bigoplus_{n=0}^K \gamma^{s_n+o} \delta^{h_n+t}.$$

Si une dérive temporelle $\theta > 0$ a lieu dans la place, la transition en aval devient :

$$x_i = \bigoplus_{n=0}^K \gamma^{s_n+o} \delta^{h_n+t+\theta}.$$

Les dates de tir de la transition x_i vont être ralenties par θ en comparaison avec les dates de tir de x_i du comportement nominal. La même dérive temporelle sur une place p peut alors être caractérisée par une entrée de perturbation w_i comme illustré dans la figure 5 et dont l'expression est :

$$w_i = \bigoplus_{n=0}^K \gamma^{s_n+o} \delta^{h_n+t+\theta}$$

avec $s_n + o$ et $h_n + t$ définis par la série x_i . En d'autres termes, avoir une dérive temporelle inconnue $\theta > 0$ sur une place p est équivalent à dire qu'une perturbation temporelle inconnue se fait sur les dates de tir des transitions de w_i et donc sur les exposants des δ de la série. Les autres éléments de w_i ne changent pas : le nombre de tir de transition de w_i est identique au nombre de tir de transition de x_i que cet état soit perturbé ou non, *i.e.* que la place en amont ait subi une dérive temporelle ou non. En l'absence de dérive temporelle, la structure du GET telle que représentée sur la figure 5 impose que l'entrée w_i soit strictement identique à la transition x_i .

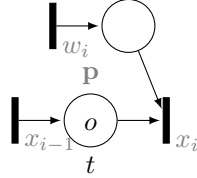


Figure 5: Représentation d'une place avec entrée de perturbation

Exemple 13. En reprenant l'exemple 12, pour caractériser une dérive temporelle $\theta = 1$ dans p_2 , une entrée de perturbation w_2 est ajoutée à la transition x_2 dans la même configuration qu'illustré dans la figure 5. La série qui va prendre en compte la dérive est :

$$x_2 = \gamma^0 \delta^{1+2+1} \oplus \gamma^1 \delta^{2+2+1} \oplus \gamma^2 \delta^{3+2+1} \oplus \gamma^3 \delta^{4+2+1} \oplus \gamma^4 \delta^{5+1+1} \oplus \gamma^5 \delta^{6+2+1} \oplus \gamma^6 \delta^{7+2+1} \oplus \gamma^7 \delta^{+\infty}.$$

Pour copier cet effet de décalage temporel, la perturbation doit être :

$$w_2 = \gamma^0 \delta^4 \oplus \gamma^1 \delta^5 \oplus \gamma^2 \delta^6 \oplus \gamma^3 \delta^7 \oplus \gamma^4 \delta^8 \oplus \gamma^5 \delta^9 \oplus \gamma^6 \delta^{10} \oplus \gamma^7 \delta^{+\infty}.$$

Dans la suite de cet article, tous les états du système, donc toutes les transitions internes x_i du GET, peuvent être perturbés. La taille de w est identique à la taille de x et la matrice R est composée dans sa diagonale de monômes $\gamma^0 \delta^0$ et de ε pour tous ses autres éléments comme dans l'exemple 12. Il serait néanmoins tout à fait possible de faire varier la taille de w et de construire R en fonction de la connaissance du système étudié pour lequel l'apparition de dérives temporelles est plus probable à certains endroits qu'à d'autres.

3.3 Raffinement de l'état estimé

L'indicateur proposé dans [PLCPV20] est basé sur le calcul de l'intervalle $\Delta(x_e, x_s)$ (cf. définition 10) où x_e est l'état estimé par l'observateur et x_s provient de la simulation du modèle sans faute du système avec l'entrée observable réelle u . Comme l'effet de la dérive temporelle peut ne pas être immédiat, les premiers monômes de x_e représentant les premières occurrences peuvent ne pas être affectés par la faute et alors, être considérés comme des occurrences normales par l'indicateur de [PLCPV20] alors que la faute est présente. En conséquence, l'indicateur de [PLCPV20] peut générer des informations trompeuses. Nous proposons ici de filtrer x_e de ces monômes non affectés et de ne garder que la partie *sensible-aux-perturbations* (*i.e.* *sensitive-to-disturbance*, soit STD) de l'état estimé x_e . Pour extraire cet état STD, une analyse plus profonde de la structure de l'observateur est nécessaire. Elle dépend des valeurs de la matrice L qui établissent une connexion entre les sorties observées y_o du système et les transitions internes x_e de l'observateur. Par la suite, pour une matrice donnée M , M_{ij} représente l'élément de M à la ligne i , et à la colonne j ; $M_{i\bullet}$ est la i^{eme} ligne de M et $M_{\bullet i}$ sa i^{eme} colonne.

Une ligne $L_{i\bullet}$ de la matrice L représente l'état estimé x_{ei} du système.

Proposition 14. Supposons que $L_{i\bullet} = (\varepsilon \ \dots \ \varepsilon)$, alors $x_{ei} = A_{i\bullet}^* B_{\bullet i} u_i$ ce qui signifie que l'état estimé x_{ei} ne dépend pas des perturbations.

Eléments de preuve. A partir de l'équation (3), l'état estimé est $x_{ei} = (A_{i\bullet} \oplus L_{i\bullet} C_{\bullet i})^* (B_{\bullet i} u_i \oplus L_{i\bullet} C_{\bullet i} A_{i\bullet}^* R_{\bullet i} w_i)$. En utilisant les opérations algébriques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ et en rappelant que ε est absorbant pour \otimes , il en suit que $x_{ei} = A_{i\bullet}^* B_{\bullet i} u_i$ ne dépend pas de w . \square

Cette proposition dépend directement de la constitution de la matrice L qui représente les connexions entre la sortie observée y_o et les transitions internes x_e . Si $L_{i\bullet} = (\varepsilon \ \dots \ \varepsilon)$, la sortie ne peut influencer la reconstruction de l'état interne x_{ei} et ainsi, les perturbations ne seront pas prises en compte.

Soit une entrée de L sous forme canonique $L_{ij} = \bigoplus_{k=0}^K \gamma^{n_k} \delta^{t_k}$, dans la suite de l'article $(n_0)_{ij}$ représente le plus petit exposant n_0 de γ dans la série L_{ij} . Il est possible que $(n_0)_{ij}$ soit différent de 0 si des jetons sont déjà présents dans la place représentée par $\gamma^{n_0} \delta^{t_0}$ dans L_{ij} . Soit $N_i = \min_{1 \leq j \leq q} \{(n_0)_{ij}\}$ avec q le nombre de sorties du système, la proposition suivante donne l'occurrence d'événement de l'état estimé à partir duquel l'effet de la perturbation peut être observée.

Proposition 15. Soit $x_{ei} = \bigoplus_{\kappa=0}^K \gamma^{\nu_\kappa} \delta^{\tau_\kappa}$ la trajectoire estimée de x_i dans sa forme canonique, la première occurrence de x_{ei} qui prend en compte les perturbations temporelles inconnues de w_i est l'occurrence d'indice ν_d telle que $\nu_d = N_i + \nu_0^b + \nu_0^{w_i}$ où ν_0^b et $\nu_0^{w_i}$ sont les plus petits exposants de γ des séries $b = C_{\bullet i} A_{i\bullet}^* R_{\bullet i}$ et w_i .

Eléments de preuve. A partir de l'équation (3), l'état estimé est $x_{ei} = (A_{i\bullet} \oplus L_{i\bullet} C_{\bullet i})^* (B_{\bullet i} u_i \oplus L_{i\bullet} b w_i)$ où $b = C_{\bullet i} A_{i\bullet}^* R_{\bullet i}$ est la seule partie dépendante des perturbations w et ν_d est défini comme le plus petit exposant de γ de la série $L_{i\bullet} b w_i$. Le composant $\nu_0^{w_i}$ de ν_d est obtenu à partir de la série x_i (il s'agit du plus petit exposant de γ de x_i) puisque les numéros de tirs de la transition interne sont identiques aux numéros de tirs de l'entrée de perturbation (seules les dates des tirs de w_i ne sont pas connues lorsqu'une dérive est présente). \square

L'état estimé STD x_{edi} est uniquement basé sur les exposants de γ de l'état x_{ei} à partir desquels la sortie observée agit réellement sur la reconstruction de l'état du système, *i.e.* à partir desquels les perturbations sont prises en compte.

Définition 16. L'état estimé sensible-aux-perturbations (STD) x_{edi} est défini à partir de x_{ei} par :

$$x_{edi} = \bigoplus_{k=d}^K \gamma^{\nu_k} \delta^{\tau_k}$$

où ν_d est défini par la proposition 15.

Exemple 17. Si l'état estimé complet de x_1 est $x_{e1} = \gamma^0 \delta^4 \oplus \gamma^1 \delta^5 \oplus \gamma^2 \delta^6 \oplus \gamma^3 \delta^7 \oplus \dots$ et si $\nu_d = 1$, l'occurrence d'événement d'indice ν_d à partir duquel la perturbation est prise en compte est l'événement numéroté par 1. L'état estimé STD est alors $x_{ed1} = \gamma^1 \delta^5 \oplus \gamma^2 \delta^6 \oplus \gamma^3 \delta^7 \oplus \dots$

Remarque 18. Lorsque $L_{i\bullet} = (\varepsilon \ \dots \ \varepsilon)$ (cf. proposition 14), $N_i = +\infty$ donc $\nu_d = +\infty$.

L'état estimé STD est alors directement $x_{edi} = \varepsilon$ quelque soit la valeur de x_{ei} .

3.4 Indicateur de dérive temporelle

A partir des fonctions dateurs et de l'intervalle de décalage temporel de la section 2, nous proposons un nouvel indicateur qui compare l'état estimé STD x_{ed} , obtenu via l'observateur et les observations de u et de y_o , avec l'état du modèle sans faute x_{si} , sous l'hypothèse qu'une ou plusieurs dérives temporelles permanentes peuvent avoir lieu dans le système. Pour réaliser une comparaison cohérente entre x_{ed} et x_{si} , les occurrences d'événement de x_{si} qui ont lieu avant ν_d doivent être retirées.

Définition 19. Soit $x_{si} = A^*Bu = \bigoplus_{k=0}^K \gamma^{\nu_k} \delta^{\tau_k}$ l'état complet du modèle sans faute, la série x'_{si} représente l'état du modèle sans faute comparable à x_{edi} :

$$x'_{si} = \bigoplus_{k=d}^K \gamma^{\nu_k} \delta^{\tau_k}.$$

Exemple 20. A partir de l'exemple 17, si $x_{s1} = \gamma^0 \delta^3 \oplus \gamma^1 \delta^4 \oplus \gamma^2 \delta^5 \oplus \gamma^3 \delta^6 \oplus \dots$, alors $x'_{s1} = \gamma^1 \delta^4 \oplus \gamma^2 \delta^5 \oplus \gamma^3 \delta^6 \oplus \dots$. En revanche, d'après la remarque 18, $x'_{s1} = \varepsilon$ lorsque $\nu_d = +\infty$.

Définition 21. Soit x_{edi} l'état estimé STD de x_i et x'_{si} son état dans le modèle sans faute. L'indicateur $I_{x_i}(u, y_o)$ de l'état x_i est défini comme la fonction booléenne :

$$I_{x_i}(u, y_o) = \begin{cases} faux & \text{si } \Delta(x_{edi}, x'_{si}) = [0; 0], \\ vrai & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $\Delta(x_{edi}, x'_{si}) = [\mathcal{D}_{x_{edi} \neq x'_{si}}(0); -\mathcal{D}_{x'_{si} \neq x_{edi}}(0)]$.

Proposition 22. L'indicateur renvoie vrai seulement si une dérive temporelle a eu lieu dans le système.

Éléments de preuve. Par construction, cet indicateur a les mêmes capacités de détection que l'indicateur de [PLCPV20]. \square

Remarque 23. La nature structurelle des GET implique qu'il existe des dérives temporelles ne pouvant jamais être détectées, notamment celles qui apparaissent sur des places situées juste en amont d'une synchronisation.

Exemple 24. Revenons aux exemples 4-12-13 où une dérive temporelle de 1 est présent sur la place p_2 . L'état estimé $x_e = [x_{e1}, \dots, x_{e3}]^T$ est

$$\begin{bmatrix} \gamma^0 \delta^2 \oplus \gamma^1 \delta^3 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^3 \delta^5 \oplus \gamma^4 \delta^6 \oplus \gamma^5 \delta^7 \oplus \gamma^6 \delta^8 \oplus \gamma^7 \delta^{+\infty} \\ \gamma^0 \delta^3 \oplus \gamma^1 \delta^4 \oplus \gamma^2 \delta^5 \oplus \gamma^3 \delta^6 \oplus \gamma^4 \delta^7 \oplus \gamma^5 \delta^8 \oplus \gamma^6 \delta^9 \oplus \gamma^7 \delta^{+\infty} \\ \gamma^0 \delta^5 \oplus \gamma^1 \delta^6 \oplus \gamma^2 \delta^7 \oplus \gamma^3 \delta^8 \oplus \gamma^4 \delta^9 \oplus \gamma^5 \delta^{10} \oplus \gamma^6 \delta^{11} \oplus \gamma^7 \delta^{+\infty} \end{bmatrix}$$

tandis que $x_{ed1} = x_{ed2} = \varepsilon$ (puisque $L_{1\bullet} = L_{2\bullet} = (\varepsilon \dots \varepsilon)$) et $x_{ed3} = \gamma^0 \delta^5 \oplus \gamma^1 \delta^6 \oplus \gamma^2 \delta^7 \oplus \gamma^3 \delta^8 \oplus \gamma^4 \delta^9 \oplus \gamma^5 \delta^{10} \oplus \gamma^6 \delta^{11} \oplus \gamma^7 \delta^{+\infty}$. L'état x'_s comparable avec l'état x_{ed} est $x'_{s1} = x'_{s2} = \varepsilon$ et

$x'_{s3} = \gamma^0 \delta^4 \oplus \gamma^1 \delta^5 \oplus \gamma^2 \delta^6 \oplus \gamma^3 \delta^7 \oplus \gamma^4 \delta^8 \oplus \gamma^5 \delta^9 \oplus \gamma^6 \delta^{10} \oplus \gamma^7 \delta^{+\infty}$. Une faute est alors détectée par un indicateur sur la transition x_3 dont l'intervalle est :

$$\Delta(x_{ed3}, x'_{s3}) = [\mathcal{D}_{x_{ed3} \neq x'_{s3}}(0), -\mathcal{D}_{x'_{s3} \neq x_{ed3}}(0)] = [1, 1].$$

4 Localisation de dérives temporelles

Cette section détaille comment extraire l'information des intervalles des indicateurs pour déterminer la source de la faute dans le GET dont l'hypothèse est, pour cette étape, qu'une seule dérive temporelle permanente de valeur θ est présente sur une place p . Cette étape de localisation est proposée pour trois types de structures élémentaires qui se retrouvent dans tous les GET : tandem (voir figure 6), parallélisme (voir figure 7) et synchronisation (voir figure 2). Pour obtenir la localisation de la faute dans un GET spécifique, il faudra alors assembler ces trois analyses élémentaires afin d'obtenir une conclusion globale.

4.1 Structures tandem et parallèle

La table 1 résume les résultats de localisation pouvant être attendus dans une structure tandem (voir figure 6) selon toutes les configurations possibles d'ensemble d'indicateurs. Le premier ensemble de configurations (lignes 1-4) est obtenu lorsque x_1 et x_2 peuvent être associé à un indicateur (i.e. l'observateur est capable de fournir un état estimé STD pour x_1 et x_2). Le second ensemble de configurations (lignes 5-7) est obtenu lorsque seul l'état x_2 du tandem a un indicateur.

Chaque ligne correspond à une configuration possible de l'intervalle de valeur retourné par l'indicateur et la conclusion sur la localisation de la faute est dans la structure analysée. La notation p_i signifie que la localisation est sur la place p_i tandis que la notation (p_i) signifie que la localisation est sur p_i ou sur une place en amont de p_i dans le GET². Par exemple, dans la ligne 3, $\Delta(x_{ed1}, x'_{s1}) = [\theta, \theta]$ et $\Delta(x_{ed2}, x'_{s2}) = [\theta, \theta]$ ce qui signifie que la dérive temporelle θ est localisée soit sur la place p_1 , soit sur une place en amont du tandem. Plus précisément, lorsque $x_1 = \bigoplus_{k=0}^K \gamma^{n_k} \delta^{t_k+a}$ et sa transition suivante dans le tandem est $x_2 = \bigoplus_{k=0}^K \gamma^{n_k} \delta^{t_k+a+b}$, si la dérive temporelle θ est sur p_1 (ou sur une place en amont), $x_{ed1} = \bigoplus_{k=d_1}^K \gamma^{n_k} \delta^{t_k+a+\theta}$ et $x_{ed2} = \bigoplus_{k=d_2}^K \gamma^{n_k} \delta^{t_k+a+\theta+b}$ ce qui explique le résultat des indicateurs.

	$\Delta(x_{ed1}, x'_{s1})$	$\Delta(x_{ed2}, x'_{s2})$	Localisation
2	[0,0]	[0,0]	\emptyset
3	$[\theta, \theta]$	$[\theta, \theta]$	(p_1)
4	[0,0]	$[\theta, \theta]$	p_2
	$\Delta(x_{ed2}, x'_{s2})$		Localisation
6	[0,0]		\emptyset
7	$[\theta, \theta]$		(p_1) or p_2

Table 1: Résumé de l'interprétation des intervalles pour une structure tandem

De manière similaire, la table 2 résume les résultats pour une structure parallèle (voir figure 7). Le parallélisme est une association de plusieurs tandems partageant une transition commune. Les résultats pour le parallélisme sont une conséquence directe des résultats pour la structure tandem.

²Cette notation est valable dans toutes les tables.

	$\Delta(x_{ed1}, x'_{s1})$	$\Delta(x_{ed2}, x'_{s2})$	$\Delta(x_{ed3}, x'_{s3})$	Localisation
2	[0,0]	[0,0]	[0,0]	\emptyset
3	[0,0]	$[\theta, \theta]$	[0,0]	p_2
4	[0,0]	[0,0]	$[\theta, \theta]$	p_3
5	$[\theta, \theta]$	$[\theta, \theta]$	$[\theta, \theta]$	(p_1)
	$\Delta(x_{ed2}, x'_{s2})$		$\Delta(x_{ed3}, x'_{s3})$	Localisation
7	[0,0]		[0,0]	\emptyset
8	$[\theta, \theta]$		[0,0]	p_2
9	[0,0]		$[\theta, \theta]$	p_3
10	$[\theta, \theta]$		$[\theta, \theta]$	(p_1)

Table 2: Résumé de l'interprétation des intervalles pour une structure parallèle

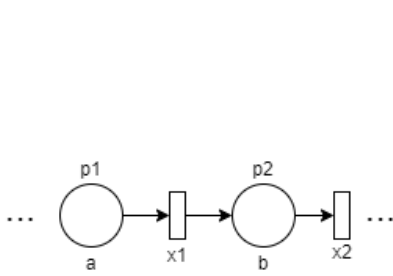


Figure 6: Structure tandem

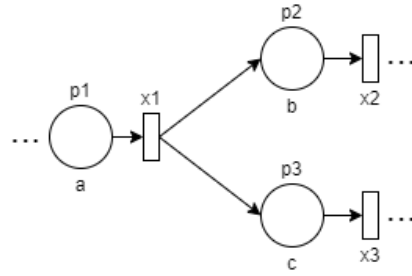


Figure 7: Structure parallèle

4.2 Structure synchronisation

La figure 2 décrit la structure de synchronisation. Cette structure a plusieurs places d'entrée (p_1 et p_2)³ et les résultats de localisation dépendent alors de la manière dont les jetons arrivent dans p_1 et p_2 . Pour réaliser une analyse exhaustive, supposons sans perte de généralité que la structure de synchronisation est gouvernée par deux entrées $u_1 = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n \delta^{\mathcal{D}_{u_1}(n)}$ et $u_2 = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n \delta^{\mathcal{D}_{u_2}(n)}$ avec $\mathcal{D}_{u_i}(n)$ une fonction dateur (cf. définition 6). La table 3 détaille tous les résultats en trois blocs définissant trois configurations d'estimation : dans le premier, tous les x_i sont estimés ; dans le deuxième, x_3 et seul un état parmi x_1, x_2 sont estimés ; dans la troisième, seul x_3 est estimé. Regardons par exemple la ligne 5 dans laquelle puisque $\Delta(x_{ed3}, x'_{s3}) = [\theta, \theta]$, l'effet de la dérive temporelle est toujours présent. Il y a deux situations possibles :

- La première est lorsque $\forall n \in \mathbb{Z}, t_1 = \mathcal{D}_{u_1}(n), t_2 = \mathcal{D}_{u_2}(n)$ tels que $a + \theta + b + t_1 > c + d + t_2$ (i.e. la dérive temporelle est sur le chemin p_1, p_3 et son effet rend ce chemin toujours plus lent que le chemin p_2, p_4). Comme $\Delta(x_{ed1}, x'_{s1}) = [0, 0]$, la dérive temporelle θ est nécessairement sur la place p_3 . En effet, $x_1 = \bigoplus_{k=0}^K \gamma^{n_k} \delta^{\mathcal{D}_{u_1}(n_k) + a}$, $x_2 = \bigoplus_{k=0}^K \gamma^{n_k} \delta^{\mathcal{D}_{u_2}(n_k) + c}$ et la transition suivante est $x_3 = \bigoplus_{k=0}^K \gamma^{n_k} \delta^{\mathcal{D}_{u_1}(n_k) + a + b} \oplus \bigoplus_{k=0}^K \gamma^{n_k} \delta^{\mathcal{D}_{u_2}(n_k) + c + d}$. Si une dérive temporelle θ est sur la place p_3 , la transition est $x_{ed1} = \bigoplus_{k=d_1}^K \gamma^{n_k} \delta^{\mathcal{D}_{u_1}(n_k) + a}$, $x_{ed2} = \bigoplus_{k=d_2}^K \gamma^{n_k} \delta^{\mathcal{D}_{u_2}(n_k) + c}$ et la transition suivante est $x_{ed3} = \bigoplus_{k=d_3}^K \gamma^{n_k} \delta^{\mathcal{D}_{u_1}(n_k) + a + b + \theta} \oplus \bigoplus_{k=d_3}^K \gamma^{n_k} \delta^{\mathcal{D}_{u_2}(n_k) + c + d}$. Donc $x_{ed3} = \bigoplus_{k=d_3}^K \gamma^{n_k} \delta^{\mathcal{D}_{u_1}(n_k) + a + b + \theta}$.

³Il est important de noter que les transitions u_1 et u_2 ne font pas partie de la structure de synchronisation que nous décrivons maintenant.

	$\Delta(x_{ed1}, x'_{s1})$	$\Delta(x_{ed2}, x'_{s2})$	$\Delta(x_{ed3}, x'_{s3})$	Localisation
2	[0,0]	[0,0]	[0,0]	\emptyset ou $t_1 = \mathcal{D}_{u_1}(n), t_2 = \mathcal{D}_{u_2}(n)$ p_1 ou p_3 si $a + \theta + b + t_1 < c + d + t_2$ p_2 ou p_4 si $a + b + t_1 > c + d + \theta + t_2$
3	$[\theta, \theta]$	[0,0]	$[\theta, \theta]$ ou [0,0] ou $[0, \theta]$	p_1
4	[0,0]	$[\theta, \theta]$	$[\theta, \theta]$ ou [0,0] ou $[0, \theta]$	p_2
5	[0,0]	[0,0]	$[\theta, \theta]$	$\forall n \in \mathbb{Z}, t_1 = \mathcal{D}_{u_1}(n), t_2 = \mathcal{D}_{u_2}(n)$ p_3 si $a + \theta + b + t_1 > c + d + t_2$ p_4 si $a + b + t_1 < c + d + \theta + t_2$
6	[0,0]	[0,0]	$[0, \theta]$	$\exists n \in \mathbb{Z}, t_1 = \mathcal{D}_{u_1}(n), t_2 = \mathcal{D}_{u_2}(n)$ p_3 si $a + \theta + b + t_1 > c + d + t_2$ p_4 si $a + b + t_1 < c + d + \theta + t_2$
	$\Delta(x_{ed1}, x'_{s1})/\Delta(x_{ed2}, x'_{s2})$		$\Delta(x_{ed3}, x'_{s3})$	Localisation
8	[0,0]		[0,0]	\emptyset ou $t_1 = \mathcal{D}_{u_1}(n), t_2 = \mathcal{D}_{u_2}(n)$ p_1 ou p_3 si $a + \theta + b + t_1 < c + d + t_2$ p_2 ou p_4 si $a + b + t_1 > c + d + \theta + t_2$
9	$[\theta, \theta]$		[0,0] ou $[\theta, \theta]$ ou $[0, \theta]$	p_1/p_2
10	[0,0]		$[\theta, \theta]$	$\forall n \in \mathbb{Z}, t_1 = \mathcal{D}_{u_1}(n), t_2 = \mathcal{D}_{u_2}(n)$ $p_3 / (p_1 \text{ ou } p_3)$ si $a + \theta + b + t_1 > c + d + t_2$ $(p_2 \text{ ou } p_4) / p_4$ si $a + b + t_1 < c + d + \theta + t_2$
11	[0,0]		$[0, \theta]$	$\exists n \in \mathbb{Z}, t_1 = \mathcal{D}_{u_1}(n), t_2 = \mathcal{D}_{u_2}(n)$ $p_3 / (p_1 \text{ ou } p_3)$ si $a + \theta + b + t_1 > c + d + t_2$ $(p_2 \text{ ou } p_4) / p_4$ si $a + b + t_1 < c + d + \theta + t_2$
	$\Delta(x_{ed3}, x'_{s3})$			Localisation
12	[0,0]			\emptyset ou $t_1 = \mathcal{D}_{u_1}(n), t_2 = \mathcal{D}_{u_2}(n)$ p_1 ou p_3 si $a + \theta + b + t_1 < c + d + t_2$ p_2 ou p_4 si $a + b + t_1 > c + d + \theta + t_2$
13	$[\theta, \theta]$			$\forall n \in \mathbb{Z}, t_1 = \mathcal{D}_{u_1}(n), t_2 = \mathcal{D}_{u_2}(n)$ p_1 ou p_3 si $a + \theta + b + t_1 > c + d + t_2$ p_2 ou p_4 si $a + b + t_1 < c + d + \theta + t_2$
14	$[0, \theta]$			$\exists n \in \mathbb{Z}, t_1 = \mathcal{D}_{u_1}(n), t_2 = \mathcal{D}_{u_2}(n)$ p_1 ou p_3 si $a + \theta + b + t_1 > c + d + t_2$ p_2 ou p_4 si $a + b + t_1 < c + d + \theta + t_2$

Table 3: Résumé de l'interprétation des intervalles pour une structure de synchronisation

- La seconde situation est symétrique, soit si $a + b + t_1 < c + d + \theta + t_2$, et pour les mêmes raisons, la dérive temporelle est sur p_4 .

La ligne 6 décrit le cas où l'effet de la faute est intermittent ce qui mène à $\Delta(x_{ed3}, x'_{s3}) = [0, \theta]$ au lieu de $\Delta(x_{ed3}, x'_{s3}) = [\theta, \theta]$. Dans ce cas, p_3 est suspecté sous la condition que $\exists n \in \mathbb{Z}, t_1 = \mathcal{D}_{u_1}(n), t_2 = \mathcal{D}_{u_2}(n)$ tel que $a + \theta + b + t_1 > c + d + t_2$. Ici, l'indicateur utilise l'avantage de l'état estimé STD alors que l'indicateur de [PLCPV20] aurait renvoyé $[0, \theta]$ dans tous ces cas.

5 Conclusions

Cet article définit une méthode pour détecter et localiser des dérives temporelles dans des systèmes modélisés par des GET, grâce à des observateurs estimant les états sensibles-aux-perturbations (STD). De par la nature de ces observateurs, seules des dérives ralentissant le système sont prises en compte. Un indicateur est proposé à partir de ces états estimés STD et dont les valeurs de l'intervalle aident à localiser la faute dans trois types de structures élémentaires de GET : tandem, parallèle, synchronisation.

La complexité algorithmique des calculs est polynomial et cette méthode est implémentée en C++ dans une librairie appelée MAXPLUSDIAG, dont les opérations de base du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ (addition \oplus , multiplication \otimes , résiduation $\not\leftarrow$) sont issues de la librairie de calculs MINMAXGD ([CLHB00]).

Une perspective directe de cet article est d'améliorer la localisation pour une autre structure élémentaire de GET appelé boucle : n'importe quelle structure élémentaire bouclée entre deux transitions. Ensuite, toutes les conclusions faites séparément devront être réunies dans une conclusion générale qui indiquera où la faute a lieu dans le GET. Des exemples illustrant des cas d'application réels pourront alors être réalisés ainsi qu'une étude sur la précision de la localisation obtenue.

Une analyse plus profonde des intervalles de valeurs de l'indicateur pourra également être faite afin de caractériser la nature des dérives temporelles. Enfin, une extension de ce travail est à réfléchir sur des dérives événementielles, c'est-à-dire des fautes impactant le nombre de jetons dans le système (surtout présents dans les structures de type boucle).

References

- [BCOQ92] F. Baccelli, G. Cohen, G.J Olsder, and J.-P Quadrat. *Synchronization and linearity: an algebra for discrete event systems*. Wiley and sons, 1992.
- [CLHB00] B. Cottenceau, M. Lhommeau, L. Hardouin, and J.-L Boimond. Data processing tool for calculation in dioid. In *5th International Workshop on Discrete Event Systems. (WODES)*, 2000. <http://www.istia.univ-angers.fr/~hardouin/outils.html>.
- [GTU09] M. Ghazel, A. Toguyéni, and P. Yim. State observer for DES under partial observation with time petri nets. *Journal of Discrete Event Dynamic Systems*, 19(2):137–165, 2009.
- [HMCL10] L. Hardouin, C A. Maia, B. Cottenceau, and M. Lhommeau. Observer design for (max,+) linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(2):538–543, 2010.
- [KL15] C. Kim and T.E. Lee. Feedback control of cluster tools for regulating wafer delays. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 13(2):1189–1199, 2015.
- [KLBvdB18] J. Komenda, S. Lahaye, J.-L. Boimond, and T. van den Boom. Max-plus algebra in the history of discrete event systems. *Annual Reviews in Control*, 45:240 – 249, 2018.
- [LCPS21] E. Le Corrnc, Y. Pencolé, A. Sahuguède, and C. Paya. Failure detection and localization for timed event graphs in (max,+)-algebra. *Discrete Event Dynamic Systems*, 2021.
- [Max91] MaxPlus. Second order theory of min-linear systems and its application to discrete event systems. In *30th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 1991.
- [PLCPV20] C. Paya, E. Le Corrnc, Y. Pencolé, and P. Vialletelle. Observer-based detection of time shift failures in (max,+)-linear systems. In *The 31st International Workshop on Principles of Diagnosis (DX)*, 2020.
- [Tri02] S. Tripakis. Fault diagnosis for timed automata. In *7th International Symposium On Formal Techniques in Real-Time and Fault-Tolerant Systems (FTRTFT)*, 2002.