



HAL
open science

Une construction du groupe G_{32} de Shephard-Todd via le groupe de Weyl de type E_6

Cédric Bonnafé

► **To cite this version:**

Cédric Bonnafé. Une construction du groupe G_{32} de Shephard-Todd via le groupe de Weyl de type E_6 . 2023. hal-04248838

HAL Id: hal-04248838

<https://hal.science/hal-04248838v1>

Preprint submitted on 18 Oct 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNE CONSTRUCTION DU GROUPE G_{32} DE SHEPHARD-TODD VIA LE GROUPE DE WEYL DE TYPE E_6

par

CÉDRIC BONNAFÉ

Résumé. — Il est connu que le quotient du groupe dérivé du groupe de réflexions complexe G_{32} de Shephard-Todd (qui est de rang 4) par son centre est isomorphe au groupe dérivé du groupe de Weyl de type E_6 . Nous montrons que cet isomorphisme peut se réaliser via la puissance extérieure deuxième et en profitons pour proposer une construction alternative du groupe G_{32} .

Notons G_{32} le groupe de réflexions complexe construit par Shephard-Todd [ShTo] et notons E_6 un groupe de Weyl de type E_6 (qui est noté G_{35} dans la classification de Shephard-Todd). Notons $\mathbf{Sp}_4(\mathbb{F}_3)$ (resp. $\mathbf{SO}_5(\mathbb{F}_3)$) le groupe symplectique (resp. orthogonal) de dimension 4 (resp. 5) sur le corps fini à trois éléments \mathbb{F}_3 . Notons $\Omega_5(\mathbb{F}_3)$ l'image de $\mathbf{Sp}_4(\mathbb{F}_3)$ dans $\mathbf{SO}_5(\mathbb{F}_3)$ à travers le morphisme naturel $\mathbf{Sp}_4(\mathbb{F}_3) \rightarrow \mathbf{SO}_5(\mathbb{F}_3)$: c'est le sous-groupe distingué d'indice 2 de $\mathbf{SO}_5(\mathbb{F}_3)$. Pour finir, si G est un groupe, notons respectivement $D(G)$ et $Z(G)$ son groupe dérivé et son centre et, si d est un entier naturel non nul, notons μ_d le groupe des racines d -ièmes de l'unité dans \mathbb{C} .

Il est montré dans [LeTa, théo. 8.43 et 8.54] que $G_{32} \simeq \mu_3 \times \mathbf{Sp}_4(\mathbb{F}_3)$ et que $E_6 \simeq \mathbf{SO}_5(\mathbb{F}_3)$. En particulier,

$$(*) \quad D(G_{32})/\mu_2 \simeq \Omega_5(\mathbb{F}_3) \simeq D(E_6).$$

L'objet de cette note est de présenter une explication élémentaire directe de l'isomorphisme $D(G_{32})/\mu_2 \simeq D(E_6)$, qui permet en fait de construire le groupe de réflexions complexe G_{32} à partir du groupe de réflexions rationnel E_6 . Cette construction utilise le morphisme classique $\mathbf{SL}_4(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{SO}_6(\mathbb{C})$, et suit les mêmes lignes que notre précédent article [Bon] (dans lequel nous construisons le groupe de réflexions complexe G_{31} en partant du groupe de Weyl de type B_6).

Cette note ne prétend pas démontrer un résultat profond : nous la voyons plutôt comme un joli exemple d'application de la théorie classique des groupes de réflexions (invariants, théorie de Springer,...).

Remarque. Il est montré dans [LeTa, théo. 8.53] que $G_{33} \simeq \mu_2 \times \Omega_5(\mathbb{F}_3)$. En particulier, cela donne indirectement un isomorphisme $D(G_{33}) \simeq D(E_6)$. Mais nous ne connaissons pas de construction de cet isomorphisme qui soit dans le même esprit que ci-dessus.

1. Le morphisme $\mathbf{SL}_4(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{SO}_6(\mathbb{C})$

Nous rappelons ici la construction de ce morphisme, en reprenant certaines notations de [Bon]. Fixons un espace vectoriel complexe V de dimension 4 et notons

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathbf{GL}(V) &\longrightarrow \mathbf{GL}(\wedge^2 V) \\ g &\longmapsto \wedge^2 g \end{aligned}$$

le morphisme naturel de groupes algébriques. Notons que $\wedge^2 V$ est de dimension 6 et que

$$(1.1) \quad \text{Ker } \Lambda \simeq \mu_2 = \{\pm \text{Id}_V\}.$$

Les listes de valeurs propres d'éléments de $\mathbf{GL}(V)$ ou $\mathbf{GL}(\wedge^2 V)$ seront toujours données avec multiplicités. Si $g \in \mathbf{GL}(V)$ admet pour valeurs propres a, b, c et d , alors

$$(1.2) \quad \Lambda(g) \text{ admet } ab, ac, ad, bc, bd \text{ et } cd \text{ comme valeurs propres.}$$

En particulier,

$$(1.3) \quad \det \Lambda(g) = (\det g)^3.$$

Fixons maintenant un générateur ε de l'espace vectoriel unidimensionnel $\wedge^4 V$. Le choix de ce générateur permet d'identifier \mathbb{C} et $\wedge^4 V$ et de définir la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} \beta_\wedge : \wedge^2 V \times \wedge^2 V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto x \wedge y. \end{aligned}$$

Cette forme bilinéaire est symétrique et non dégénérée. Par définition du déterminant,

$$(1.4) \quad \beta_\wedge(\Lambda(g)(x), \Lambda(g)(y)) = (\det g)\beta_\wedge(x, y)$$

pour tous $g \in \mathbf{GL}(V)$ et $x, y \in \wedge^2 V$. Pour des raisons de dimension et de connexité, l'image de $\mathbf{GL}(V)$ à travers Λ est la composante neutre $\mathbf{CO}(\wedge^2 V)^\circ$ du groupe conforme orthogonal $\mathbf{CO}(\wedge^2 V) = \mathbf{CO}(\wedge^2 V, \beta_\wedge)$ et Λ induit un isomorphisme de groupes algébriques

$$(1.5) \quad \mathbf{SL}(V)/\mu_2 \simeq \mathbf{SO}(\wedge^2 V).$$

Le lemme élémentaire suivant nous sera utile (dans cet article, nous noterons j une racine primitive cubique de l'unité).

Lemme 1.6. — Soit $g \in \mathbf{SO}(\wedge^2 V)$ admettant pour valeurs propres j, j, j, j^2, j^2 et j^2 . Alors il existe un unique élément $\tilde{g} \in \mathbf{SL}(V)$, admettant $1, j, j$ et j comme valeurs propres, et tel que

$$\Lambda^{-1}(\{g, g^{-1}\}) = \{\pm \tilde{g}, \pm \tilde{g}^{-1}\}.$$

Démonstration. — Soit $h \in \mathbf{SL}(V)$ tel que $\Lambda(h) = g$. Alors $\Lambda^{-1}(\{g, g^{-1}\}) = \{\pm h, \pm h^{-1}\}$. Notons a, b, c et d les valeurs propres de h . D'après (1.2), quitte à réordonner les valeurs propres de h , on peut supposer que $ab = ac = j$. En particulier, $b = c$. Donc $bd = cd$, ce qui force $bd = cd = j^2$ (car sinon j serait une valeur propre de g avec multiplicité ≥ 4). Toujours d'après (1.2), $(ad, bc) = (j, j^2)$ ou $(ad, bc) = (j^2, j)$.

Si $(ad, bc) = (j, j^2)$, alors $b = c = d$ et $b^2 = j^2$, donc $b = c = d = \eta j$ et $a = \eta$, pour un $\eta \in \{\pm 1\}$. Quitte à remplacer h par $-h$, les valeurs propres de h sont donc $1, j, j, j$ et donc h est bien le seul élément de $\Lambda^{-1}(\{g, g^{-1}\})$ admettant cette liste de valeurs propres.

Si $(ad, bc) = (j^2, j)$, alors $d = jb = jc$ et $b^2 = j$, ce qui force $a = b = c = \eta j^2$ et $d = \eta$, pour un $\eta \in \{\pm 1\}$. Quitte à remplacer h par $-h$, les valeurs propres de h sont donc $1, j^2, j^2, j^2$ et donc h^{-1} est bien le seul élément de $\Lambda^{-1}(\{g, g^{-1}\})$ admettant $1, j, j, j$ comme liste de valeurs propres. \square

Corollaire 1.7. — Soit $g \in \mathbf{SO}(\wedge^2 V)$ admettant pour valeurs propres j, j, j, j^2, j^2 et j^2 . Alors g et g^{-1} ne sont pas conjugués dans $\mathbf{SO}(\wedge^2 V)$.

Démonstration. — Supposons trouvé $w \in \mathbf{SO}(\wedge^2 V)$ tel que $wgw^{-1} = g^{-1}$. Notons ω et γ des antécédents respectifs de w et g dans $\mathbf{SL}(V)$. Alors $\Lambda(\omega\gamma\omega^{-1}) = g^{-1} = \Lambda(\gamma^{-1})$. Cela montre que γ^{-1} est conjugué à γ ou à $-\gamma$, ce qui est impossible suite à l'examen des possibles listes de valeurs propres de γ effectué dans la preuve du lemme 1.6. \square

2. Construction de G_{32}

Voyons le groupe E_6 comme un sous-groupe fini de $\mathbf{O}(\wedge^2 V)$ engendré par des réflexions. Posons

$$\mathbf{jSO}(\wedge^2 V) = \langle \mathbf{SO}(\wedge^2 V), j \text{Id}_{\wedge^2 V} \rangle$$

et
$$\sqrt[3]{\mathbf{SL}}(V) = \{g \in \mathbf{GL}(V) \mid \det(g)^3 = 1\} = \langle \mathbf{SL}(V), j \text{Id}_V \rangle.$$

Alors

$$(2.1) \quad \Lambda^{-1}(\mathbf{jSO}(\wedge^2 V)) = \sqrt[3]{\mathbf{SL}}(V).$$

Nous définissons alors

$$W = \Lambda^{-1}(\langle \mathbf{D}(E_6), j \text{Id}_{\wedge^2 V} \rangle).$$

C'est un sous-groupe de $\sqrt[3]{\mathbf{SL}}(V)$. Le but de cette note est de montrer que W est isomorphe au groupe de réflexions complexes G_{32} de Shephard-Todd. Remarquons pour commencer que

$$(2.2) \quad \mu_6 \subset W.$$

2.A. Réflexions dans W . — La liste des degrés de E_6 est 2, 5, 6, 8, 9, 12 alors que celle de ses codegrés est 0, 3, 4, 6, 7, 10 (voir [Bro, table A.3]). En particulier, exactement 3 des degrés sont divisibles par 3, ce qui montre [Spr, théo. 3.4] que E_6 contient un élément w_3 admettant la valeur propre j avec multiplicité 3. Nous noterons C_3 la classe de conjugaison de w_3 dans W . Puisqu'aussi exactement 3 des codegrés sont divisibles par 3, cela implique, par exemple grâce à [LeMi, théo. 1.2], que w_3 est régulier au sens de Springer [Spr, §4] (c'est-à-dire admet un vecteur propre pour la valeur propre j dont le stabilisateur dans E_6 est trivial). Puisque E_6 est un groupe rationnel, w_3 admet aussi j^2 comme valeur propre avec multiplicité 3. En conclusion, les valeurs propres de w_3 sont j, j, j, j^2, j^2 et j^2 . En particulier, $\det w_3 = 1$ et donc

$$w_3 \in \mathbf{D}(E_6) = E_6 \cap \mathbf{SO}(\wedge^2 V).$$

D'après [Spr, théo. 4.2(iii)], le centralisateur de w_3 dans E_6 est d'ordre $6 \cdot 9 \cdot 12$ ce qui montre que

$$(2.3) \quad |C_3| = 2 \cdot 5 \cdot 8 = 80.$$

De plus [Spr, théo. 4.2(iii)], si $w \in E_6$, alors

$$(2.4) \quad w \in C_3 \text{ si et seulement si } \dim \text{Ker}(w - j \text{Id}_V) = 3.$$

Ainsi, si $w \in C_3$, alors $w^{-1} \in C_3$ mais w^{-1} n'est pas conjugué à w dans $\mathbf{D}(E_6)$ (en vertu du corollaire 1.7).

Notons maintenant $\text{Ref}(W)$ l'ensemble des réflexions de W . Si $s \in \text{Ref}(W)$, les valeurs propres de $\Lambda(s)$ sont $1, 1, 1, \det(s), \det(s), \det(s)$. Puisque $\det(s) \in \{j, j^2\}$, les valeurs propres de $\det(s)\Lambda(s)$ sont donc j, j, j, j^2, j^2, j^2 . Il découle de (2.4) que $\det(s)\Lambda(s) \in C_3$. On a donc défini une application

$$\begin{aligned} \lambda : \text{Ref}(W) &\longrightarrow C_3 \\ s &\longmapsto \det(s)\Lambda(s). \end{aligned}$$

Le résultat suivant nous sera fort utile :

Lemme 2.5. — *L'application λ est bijective.*

Démonstration. — Tout d'abord, si $\lambda(s) = \lambda(s')$, alors il existe $\xi \in \mathbb{C}^\times$ tel que $s' = \xi s$. Puisque s et s' sont des réflexions, cela n'est possible que si $\xi = 1$, et donc $s = s'$. Cela montre l'injectivité de λ .

Montrons maintenant la surjectivité. Soit $w \in C_3$. D'après le corollaire 1.7, il existe un unique $\tilde{w} \in \Lambda^{-1}(\{w, w^{-1}\})$ ayant pour valeurs propres $1, j, j, j$. Alors $j^2\tilde{w}$ et $j\tilde{w}^{-1}$ sont des réflexions vérifiant

$$\lambda(j^2\tilde{w}) = \det(j^2\tilde{w})\Lambda(j^2\tilde{w}) = j^8 \cdot j^4\Lambda(\tilde{w}) = \Lambda(\tilde{w})$$

$$\text{et} \quad \lambda(j\tilde{w}^{-1}) = \det(j\tilde{w}^{-1})\Lambda(j\tilde{w}^{-1}) = j^4 \cdot j^2\Lambda(\tilde{w}^{-1}) = \Lambda(\tilde{w})^{-1}.$$

Donc $w \in \{\lambda(j^2\tilde{w}), \lambda(j\tilde{w}^{-1})\}$, ce qui montre la surjectivité de λ . \square

On déduit alors de (2.3) et du lemme 2.5 que

$$(2.6) \quad |\text{Ref}(W)| = 80.$$

2.B. Structure de W . — Notre résultat principal est le théorème 2.7 ci-dessous : la preuve que nous proposons ici n'utilise aucune propriété du groupe G_{32} ni la classification des groupes de réflexions complexes et peut donc être vu comme une construction alternative de G_{32} à partir de E_6 (nous utilisons en revanche des propriétés de E_6).

Théorème 2.7. — *Le groupe W :*

- (a) *est d'ordre 155 520 ;*
- (b) *est engendré par des réflexions d'ordre 3 ;*
- (c) *est irréductible et primitif ;*
- (d) *admet 12, 18, 24, 30 comme liste de degrés.*

Démonstration. — Notons $E_6^\# = \langle D(E_6), j \text{Id}_{\wedge^2 V} \rangle$ et $W^+ = W \cap \mathbf{SL}(V)$. Rappelons que $|E_6| = 51\,840$. Donc

$$(2.8) \quad |D(E_6)| = 25\,920, \quad |E_6^\#| = 77\,760, \quad |W| = 155\,520 \quad \text{et} \quad |W^+| = 51\,840.$$

Cela montre entre autres (a). De plus,

$$(2.9) \quad Z(W) = \mu_6 \quad \text{et} \quad W/\mu_6 \simeq D(E_6).$$

Soit $\mathcal{R} = \{\det(s)^{-1}s \mid s \in \text{Ref}(W)\}$. Posons

$$G = \langle \text{Ref}(W) \rangle \quad \text{et} \quad H = \langle \mathcal{R} \rangle.$$

L'énoncé (b) est équivalent à l'énoncé

$$(\#) \quad W = G.$$

Tout d'abord, $\Lambda(\mathcal{R}) = C_3$ et donc $\Lambda(H) = D(E_6)$ (car ce dernier est simple et C_3 est une classe de conjugaison). En particulier, $W = H \cdot \mu_6$ et donc, puisque $H \subset G \cdot \mu_3$, on obtient

$$W = G \cdot \mu_6,$$

ce qui est presque le résultat attendu (#). Avant de montrer (#), remarquons que, puisque $\Lambda(H) = D(E_6)$, cela implique que H (et donc G) agit de façon irréductible sur V . De plus, si G n'est pas primitif, alors G (et donc H) serait monomial [LeTa, lem. 2.12], ce qui impliquerait que $\Lambda(H) = D(E_6)$ serait aussi monomial, ce qui n'est pas le cas. Donc

$$(\clubsuit) \quad G \text{ est irréductible et primitif.}$$

L'énoncé (c) en découle.

Nous terminons en montrant simultanément (b) et (d). Soient d_1, d_2, d_3, d_4 les degrés de G . Il découle de (2.6) et par exemple de [Bro, théo. 4.1] que

$$(\diamond) \quad \begin{cases} d_1 d_2 d_3 d_4 = |G|, \\ d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 84. \end{cases}$$

Le morphisme $\det : G \rightarrow \mu_3$ est surjectif (car $\det(s) \in \{j, j^2\}$ pour tout $s \in \text{Ref}(W)$), ce qui implique que $\mu_3 \subset G$ (car $G/(G \cap \mu_6) \simeq D(E_6)$ est simple). Il reste à montrer que $|G| \neq |W|/2 = 77760$.

Supposons donc que $|G| = 77760$. Puisque $\mu_3 \subset G$, tous les d_i sont divisibles par 3 et, puisque $\mu_6 \not\subset G$, au moins un des d_i (mettons d_4) n'est pas divisible par 6. Écrivons $e_i = d_i/3$. Alors

$$\begin{cases} e_1 e_2 e_3 e_4 = 960 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5, \\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 28, \\ e_4 \text{ est impair.} \end{cases}$$

De la deuxième égalité, on déduit qu'un autre des e_i (mettons e_3) est impair. D'autre part, d'après la deuxième égalité, au moins l'un des e_i (mettons e_2) est pair et donc e_1 est aussi pair. La première égalité montre que e_1 ou e_2 (mettons e_2) est divisible par 8. Donc $e_2 \in \{8, 16, 24\}$. Une rapide inspection des cas possibles montre qu'alors $e_1 = 4, e_2 = 16$ et $\{e_3, e_4\} = \{3, 5\}$. Les degrés de G sont donc 9, 12, 15 et 48. Puisque 16 divise l'un des degrés de G , il découle alors de [Spr, théo. 3.4(i)] que $G = H \times \mu_3$ contient un élément d'ordre 16, donc H contient un élément d'ordre 16 et donc $D(E_6) = \Lambda(H)$ contient un élément d'ordre 8, ce qui n'est pas le cas (voir la remarque 2.11 ci-dessous pour une preuve de ce fait n'utilisant que la théorie de Springer). Cela contredit le fait que $|G| = 77760$. On a donc bien montré (#), c'est-à-dire

$$W = \langle \text{Ref}(W) \rangle = G.$$

C'est l'énoncé (b). En particulier, $\mu_6 \subset W$ et donc tous les d_i sont divisibles par 6. Posons $a_i = d_i/6$. Alors (\diamond) implique que

$$\begin{cases} a_1 a_2 a_3 a_4 = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5, \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 14, \end{cases}$$

De la même manière que précédemment, puisque $\mu_{12} \not\subset W$, on peut supposer que a_3 et a_4 sont impairs et que a_1 et a_2 sont pairs. Une rapide inspection des cas possibles implique que $\{a_1, a_2\} = \{2, 4\}$ et $\{e_3, e_4\} = \{3, 5\}$. Cela termine la preuve de (d). \square

Corollaire 2.10. — *Le groupe W est isomorphe au groupe de réflexions G_{32} de Shephard-Todd.*

Démonstration. — Cela résulte du théorème 2.7 et de la classification des groupes de réflexions complexes [ShTo]. \square

Le corollaire 2.10 donne ainsi une explication au fait, mentionné dans l'introduction, que $D(G_{32})/\mu_2 \simeq D(E_6)$: l'isomorphisme est réalisé par Λ .

Remarque 2.11. — Dans la preuve du théorème 2.7, nous avons utilisé le fait que $D(E_6)$ ne contient pas d'élément d'ordre 8. Ce fait peut s'obtenir facilement par un calcul par ordinateur par exemple, mais nous en proposons ici une preuve n'utilisant que la théorie de Springer. Soit $w \in E_6$ un élément d'ordre 8. Alors w admet forcément parmi ses valeurs propres une racine primitive huitième de l'unité ζ . Comme un seul des degrés de E_6 et un seul des codegrés de E_6 est divisible par 8, cela implique que w est un élément régulier au sens de Springer [LeMi, théo. 1.2]. Alors [Spr, théo. 4.2(v)] la liste des valeurs propres de w est $\zeta^{-1}, \zeta^{-4}, \zeta^{-5}, \zeta^{-7}, \zeta^{-8}, \zeta^{-11}$, et donc $\det(w) = \zeta^{-36} = -1$. Donc $w \notin D(E_6)$.

Références

- [Bon] C. BONNAFÉ, *Une (nouvelle?) construction du groupe de réflexions complexe G_{31}* , Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **45** (2003), 133-143.
- [Bro] M. BROUÉ, *Introduction to complex reflection groups and their braid groups*, Lecture Notes in Math. **1988**, Springer-Verlag, Berlin, 2010. xii+138 pp.
- [LeMi] G. I. LEHRER & J. MICHEL, *Invariant theory and eigenspaces for unitary reflection groups*, Comptes Rendus Acad. Sci. **336** (2003), 795-800.
- [LeTa] G. I. LEHRER & D. E. TAYLOR, *Unitary reflection groups*, Australian Mathematical Society Lecture Series **20**, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [Spr] T.A. SPRINGER, *Regular elements of finite reflection groups*, Invent. Math. **25** (1974), 159-198.
- [ShTo] G. C. SHEPHARD & J. A. TODD, *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math. **6** (1954), 274-304.

18 octobre 2023

CÉDRIC BONNAFÉ, IMAG, Université de Montpellier, CNRS, Montpellier, France
E-mail : cedric.bonnafe@umontpellier.fr