



Sur la probabilité de fausse alarme du filtre adapté pour la détection distance-Doppler de cibles hors-grille

Pierre Develter, Jonathan Bosse, Olivier Rabaste, Philippe Forster,
Jean-Philippe Ovarlez

► To cite this version:

Pierre Develter, Jonathan Bosse, Olivier Rabaste, Philippe Forster, Jean-Philippe Ovarlez. Sur la probabilité de fausse alarme du filtre adapté pour la détection distance-Doppler de cibles hors-grille. GRETSI 2023, Aug 2023, GRENOBLE, France. hal-04248039

HAL Id: hal-04248039

<https://hal.science/hal-04248039>

Submitted on 18 Oct 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur la probabilité de fausse alarme du filtre adapté pour la détection distance-Doppler de cibles hors-grille

Pierre DEVELTER^{1,2}, Jonathan BOSSE¹, Olivier RABASTE¹, Philippe FORSTER³, Jean-Philippe OVARLEZ^{1,2}

¹DEMR, ONERA, Université Paris-Saclay, F-91120 Palaiseau, France

²SONDRA, CentraleSupélec, Université Paris-Saclay, F-91192 Gif-sur-Yvette, France

³Université Paris-Saclay, ENS Paris-Saclay, CNRS, SATIE, F-91190, Gif-sur-Yvette, France

pierre.develter@onera.fr, jonathan.bosse@onera.fr

olivier.rabaste@onera.fr, pforster@parisnanterre.fr, jean-philippe.ovarlez@onera.fr

Résumé — Dans la plupart des cas, le filtre adapté est évalué pour des valeurs de paramètres de cibles non-linéaires fixées sur une grille discrète, de manière à avoir des tests statistiquement indépendants. En réalité, les paramètres de cibles appartiennent à un espace continu, et ne seront en général pas exactement sur la grille. Quand le filtre adapté est évalué en toutes les valeurs de paramètres possibles, le calcul de la probabilité de fausse alarme (P_{FA}) se complexifie. Dans cet article, nous calculons une relation P_{FA} -seuil asymptotique pour ce détecteur sous bruit blanc gaussien complexe en utilisant l'espérance de caractéristiques d'Euler pour la détection distance-Doppler FMCW. La relation obtenue correspond aux résultats constatés en simulations.

Abstract — In most cases, the matched filter is evaluated for values of the non-linear target parameter values fixed on a discrete grid to have statistically independent tests. However, in practice, the target parameters lie in a continuous space, and will usually not fall exactly on the grid. When the matched filter is evaluated for all possible parameter values, the computation of the Probability of False Alarm (P_{FA}) becomes more complex. In this paper, we compute the asymptotic P_{FA} -threshold relation of this detector for FMCW distance-Doppler detection under complex white Gaussian noise using expected Euler characteristics. The obtained relation corresponds to the empirical results obtained via Monte Carlo simulations.

1 Introduction

Détecter des signaux bruités est un problème rencontré dans de nombreux domaines [1]. Classiquement, quand les signaux dépendent de paramètres inconnus, le détecteur du Test du Rapport de Vraisemblance Généralisé (GLRT) est utilisé : il consiste à remplacer les paramètres inconnus dans le test du rapport de vraisemblance par leur Estimateur du Maximum de Vraisemblance (MLE). Cependant, certains paramètres non-linéaires n'admettent pas de MLE sous forme analytique. En pratique, pour palier ce problème, l'espace de paramètre est discrétisé en une grille fixe, et des tests sont réalisés pour les valeurs de paramètres sur la grille judicieusement choisies de manière à obtenir des tests indépendants. Cependant, en réalité les vrais paramètres de cibles ne correspondront pas exactement aux paramètres sur grille, créant là une désadaptation entre les signaux reçus et les signaux de référence. Cette désadaptation peut dégrader les performances de détection des tests. Quand le GLRT correspond au filtre adapté, il est bien connu que cette perte peut atteindre 3dB par paramètre inconnu [2].

La détection en présence d'erreurs de modèle sur le signal a été considérée dans plusieurs contextes généraux,

comme dans le cas d'une désadaptation dans un cône autour du signal de référence [3] ou d'une désadaptation contrainte quadratiquement [4], parmi d'autres contextes [5–7]. Alors que le problème de désadaptation lié à une grille est couramment examiné en reconstruction parcimonieuse [8, 9] ou en estimation [10], il reste relativement peu étudié en détection [11].

La façon la plus directe de lutter contre cette désadaptation est de se passer de la grille en utilisant le "vrai" GLRT qui consiste à calculer le maximum du rapport de vraisemblance sur tout l'espace continu où les paramètres peuvent se situer. Cependant, ses propriétés statistiques dépendent du maximum d'un continuum de variables non-indépendantes et leur étude peut être délicate, et sa relation P_{FA} -seuil n'est pas connue. Dans [12], nous avons calculé la relation P_{FA} -seuil du Filtre Adapté Normalisé. De manière analogue, dans cet article nous nous proposons de calculer une nouvelle relation P_{FA} -seuil asymptotique pour le filtre adapté avec deux (distance et Doppler) paramètres inconnus dans le cas d'un radar à ondes continues (FMCW), en présence de bruit blanc gaussien complexe. Pour cela, nous allons utiliser l'espérance de caractéristiques d'Euler [13].

La section 2 formalise le problème ainsi que le détecteur

GLRT hors-grille étudié dans cet article. Dans la section 3, nous calculons la relation P_{FA} -seuil asymptotique de ce détecteur, qui est validée numériquement en section 4.

Notations : Les matrices sont en gras et en majuscules, les vecteurs en gras. Pour toute matrice $\mathbf{A}$ ou vecteur, $\mathbf{A}^T$ est la transposée et $\mathbf{A}^H$ la transposée Hermitienne. $\mathbf{I}$ est la matrice identité et $\mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Gamma})$ est la distribution normale complexe circulaire de moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Gamma}$. $\otimes$ est le produit de Kronecker. $\mathbf{a}_r$ et $\mathbf{a}_i$ sont les parties complexes et imaginaires du vecteur complexe $\mathbf{a}$.

2 Formulation du problème

Notre problème consiste à détecter un signal connu $\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{C}^{NM}$ d'amplitude inconnue, dépendant d'un paramètre inconnu $\boldsymbol{\xi}$ et plongé dans du bruit. Formellement, cela correspond au test d'hypothèses binaire suivant :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{r} = \mathbf{n}, \\ H_1 : \mathbf{r} = a \mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{n}, \end{cases} \quad (1)$$

où $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{NM}$ est un vecteur de bruit distribué selon une loi gaussienne complexe circulaire $\mathbf{n} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Gamma})$ de matrice de covariance connue $\boldsymbol{\Gamma}$ et $a \in \mathbb{C}$ est l'amplitude complexe de la cible. Dans la suite de cet article, le nombre de paramètres inconnus est fixé à deux : la distance de la cible et son décalage Doppler.

La distance de la cible au radar se déduit du délai d avant le retour du signal émis. Dans le reste de cet article, nous considérons que le signal reçu sur une impulsion pour un certain retard d est modélisé par $\frac{1}{\sqrt{K}} e^{i\pi k(t-d)^2}$ où les $t_j = jT_s$ sont les instants d'échantillonnage avec $T_s = \frac{1}{B}$ où B est la bande de fréquences, reliée avec le scalaire $k \in \mathbb{R}$ par $k = \frac{B}{T_p}$. K est le nombre d'échantillons non nuls et $T_p = KT_s$ est la durée de l'impulsion. En FMCW, le signal reçu est multiplié par le conjugué de l'impulsion émise. En notant $\tau = \frac{d}{T_p}$ le délai normalisé, le signal $\mathbf{b}(\tau)$ reçu après cette opération est, à un facteur de phase près :

$$\mathbf{b}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{K}} \left[1, e^{-2i\pi\tau}, \dots, e^{-2i\pi(K-1)\tau} \right]^T.$$

Le même modèle peut être considéré après un *deramping* avec un *chirp*. Le vecteur de Fourier $\mathbf{d}(\theta)$ suivant rend compte du Doppler θ avec N impulsions :

$$\mathbf{d}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[1, e^{2i\pi\theta}, \dots, e^{2i\pi(N-1)\theta} \right]^T,$$

Le modèle de signal distance-Doppler que nous utilisons est défini de manière classique comme le produit de Kronecker de $\mathbf{b}$ et $\mathbf{d}$, avec $\boldsymbol{\xi} = \{\tau, \theta\}$:

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{b}(\tau) \otimes \mathbf{d}(\theta). \quad (2)$$

Quand $\boldsymbol{\xi}$ est connu et l'amplitude complexe a est inconnue, le GLRT de ce problème, appelé GLRT "oracle",

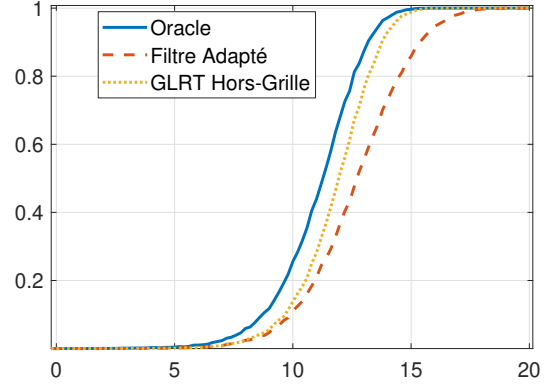


FIGURE 1 – Performance en détection distance-Doppler avec des cibles hors-grille tirées aléatoirement et uniformément dans une cellule pour le détecteur oracle, le GLRT (5) et le Filtre Adapté (3). $P_{FA} = 10^{-6}$, $N = 10$, $K = 40$.

devient le test du Filtre Adapté [14] :

$$\frac{|\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{r}|^2}{\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} w^2. \quad (3)$$

Dans ce cas, la relation P_{FA} -seuil est donnée par :

$$P_{FA} = e^{-w^2}. \quad (4)$$

Puisque les vrais paramètres de cible sont inconnus, les tests sont généralement évalués pour des valeurs de paramètres $\boldsymbol{\xi}$ sur une grille discrète. Cependant, dans la réalité les paramètres de cible ne correspondent jamais exactement aux paramètres de la grille. Pour une résolution de Fourier usuelle, la perte en SNR du filtre adapté peut atteindre 3 dB par paramètre inconnu en bord de case de résolution (donc 6 dB en détection distance-Doppler), ce qui dégrade les performances de détection.

Le "vrai" GLRT, nommé GLRT *hors-grille* ou Filtre Adapté *hors-grille*, consiste à évaluer (3) pour tous les $\boldsymbol{\xi}$ de manière continue dans le domaine de recherche $\mathcal{D}$, que l'on appellera une cellule (par exemple, un intervalle $\left[\frac{h}{N}, \frac{h+1}{N}\right] \times \left[\frac{h'}{B}, \frac{h'+1}{B}\right]$, pour lequel les tests sont indépendants par application du théorème de Cochran) dans la suite :

$$\max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{D}} \frac{|\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{r}|^2}{\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} w^2. \quad (5)$$

Les performances de détection empiriques de ce détecteur sont montrées en Figure 1, Elles sont proches du GLRT oracle (qui connaît parfaitement la position des cibles) alors que le Filtre Adapté montre une perte en performance de détection liée à la présence de cibles hors-grille. Pour garantir une P_{FA} donnée, on doit fixer un seuil adéquat w^2 dans (5). Pour cela, on doit évaluer la statistique du maximum d'un continuum de variables non-indépendantes. A notre connaissance, il n'y a pas de solution connue à ce problème dans notre contexte. La section suivante comble ce manque dans le cas bruit blanc ($\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{I}$).

3 Une relation P_{FA} -seuil asymptotique pour le filtre adapté hors-grille distance-Doppler

Dans cette section, on démontre une nouvelle relation P_{FA} -seuil asymptotique pour le filtre adapté hors-grille sous bruit blanc en utilisant les caractéristiques d'Euler moyennes. L'article [13] propose un cadre théorique général pour résoudre ce type de problèmes.

La réponse du filtre adapté peut être considérée comme le champ aléatoire $Y(\xi)$ suivant :

$$Y(\xi) = |s(\xi)^H \mathbf{r}|^2. \quad (6)$$

Pour utiliser les résultats de [13], il est nécessaire d'introduire le champ aléatoire gaussien :

$$X(\alpha, \xi) = (\gamma_1(\xi) \cos \alpha + \gamma_2(\xi) \sin \alpha)^T \mathbf{r}, \quad (7)$$

où $\gamma_1(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_r(\xi) \\ \mathbf{s}_i(\xi) \end{bmatrix}$, $\gamma_2(\xi) = \begin{bmatrix} -\mathbf{s}_i(\xi) \\ \mathbf{s}_r(\xi) \end{bmatrix}$, $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_r \\ \mathbf{r}_i \end{bmatrix}$ est un vecteur de bruit réel à $2N$ éléments suivant une loi gaussienne centrée de covariance $\mathbf{I}_{2N}/2$ et α est dans $[0, 2\pi]$. On peut montrer [12] que $\max_{\alpha \in [0, 2\pi]} X(\alpha, \xi) = \sqrt{Y(\xi)}$. Ainsi la P_{FA} à caractériser peut s'écrire :

$$P_{FA} = \mathbb{P} \left(\max_{\xi \in \mathcal{D}} Y(\xi) > w^2 \right) = \mathbb{P} \left(\max_{\alpha, \xi \in [0, 2\pi] \times \mathcal{D}} X(\alpha, \xi) > w \right). \quad (8)$$

On peut aisément montrer que X est stationnaire (X étant Gaussien, la notion est définie sans ambiguïtés) et on note

Λ la matrice de covariance de son gradient $\left[\frac{\partial X}{\partial \alpha}, \frac{\partial X}{\partial \xi} \right]^T$.

L'ensemble d'excursion $A_w(X)$ associé à X pour un seuil w est défini comme l'ensemble des paramètres tels que $X(\alpha, \xi)$ excède w [13] :

$$A_w(X) = \{(\alpha, \xi) \in [0, 2\pi] \times \mathcal{D}, X(\alpha, \xi) > w\}. \quad (9)$$

Dans [15], il est montré que l'espérance de la caractéristique d'Euler de $A_w(X)$, $\mathbb{E}(\varphi(A_w(X)))$, est une estimation précise de la probabilité que $X(\alpha, \xi)$ excède w , et donc de la P_{FA} voulue :

$$|P_{FA} - \mathbb{E}(\varphi(A_w(X)))| < O(e^{-cw^2}), \quad (10)$$

pour un certain $c > 1$. La caractéristique d'Euler $\varphi(\cdot)$ est une caractérisation topologique d'un ensemble : les lecteurs intéressés peuvent étudier les chapitres correspondants de [15]. Notre résultat est basé sur le théorème pour les champs aléatoires définis sur $\mathbb{R}^3$ suivant :

Théorème 3.1 [13] Soit X un champ aléatoire centré, isotrope et stationnaire sur l'espace de paramètres $T \subset \mathbb{R}^3$ avec pour matrice de covariance du gradient $\Lambda = \lambda \mathbf{I}$. Supposons de plus que ∂T , définie comme la frontière de T , est de classe C^2 sauf sur les arêtes, les creux de longueurs

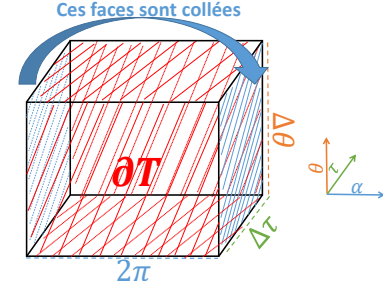


FIGURE 2 – Espace de paramètre phase-distance-Doppler T . Il s'agit d'un pavé droit avec deux faces collées .

finies et les sommets. Alors

$$\mathbb{E}(\varphi(A_w(X))) = |T| \rho_3(w) + \frac{|\partial T|}{2} \rho_2(w) + \frac{H(\partial T)}{\pi} \rho_1(w) + \varphi(T) \Psi\left(\frac{w}{\sigma}\right), \quad (11)$$

où $H(\cdot)$ est une fonction de la courbure détaillée dans [16], σ^2 est la variance de X (constante puisque X est stationnaire), $\rho_k(w) = \frac{e^{-w^2/2\sigma^2} \lambda^{k/2}}{(2\pi)^{(k+1)/2} \sigma^k} H_{k-1}\left(\frac{w}{\sigma}\right)$ avec H_k le k -ième polynôme de Hermite et $\Psi(t) = \int_t^{+\infty} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du$ désigne la queue d'une loi gaussienne centrée réduite. $|T|$ désigne le volume de T et $|\partial T|$ la surface de ∂T .

En appliquant ce résultat général à notre problème, on peut montrer le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.1 La relation P_{FA} -seuil du GLRT hors-grille testé sur une cellule $\mathcal{D} = [\tau_1, \tau_2] \times [\theta_1, \theta_2]$ est :

$$P_{FA} = \left[\frac{\pi}{6} \Delta\tau \Delta\theta \sqrt{(N^2 - 1)(K^2 - 1)} (2w^2 - 1) + \sqrt{\frac{\pi}{3}} \left(\Delta\tau \sqrt{(K^2 - 1)} + \Delta\theta \sqrt{(N^2 - 1)} \right) w + 1 \right] e^{-w^2} + O(e^{-cw^2}) \quad \text{pour un } c > 1. \quad (12)$$

Trois termes apparaissent dans la formule : le premier rend compte de l'intérieur de la cellule. Les deuxième et troisième termes représentent respectivement les arêtes et les coins de la cellule : leur somme est égale à la somme des P_{FA} du filtre adapté hors-grille dans les cas où un seul paramètre est inconnu (distance ou Doppler).

Donnons une idée de la preuve de ce corollaire. On obtient le résultat en calculant la caractéristique d'Euler de l'ensemble d'excursion de X définie dans (9) grâce au Théorème 3.1, puis en appliquant le résultat (10) pour approximer la P_{FA} . Tout d'abord, notons que dans notre cas $\sigma^2 = 1/2$. Puisque pour tout $\xi \in \mathcal{D}$, $X(0, \xi) = X(2\pi, \xi)$, X est périodique selon α et l'espace de paramètres T peut être vu comme un pavé droit de dimensions $2\pi, \Delta\tau, \Delta\theta$ où les faces selon l'axe α sont collées ensemble, comme représenté sur la figure 2. Par conséquent, $|T| = 2\pi \Delta\tau \Delta\theta$, $|\partial T| = 4\pi(\Delta\tau + \Delta\theta)$. En appliquant la définition donnée

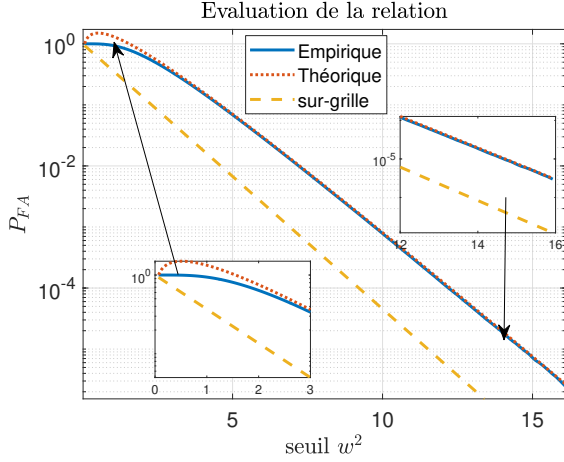


FIGURE 3 – 3 premiers termes de la relation théorique (12) et empirique obtenues sous bruit blanc en utilisant 5×10^7 tirages de Monte Carlo avec $K = 40$, et $N = 10$. La relation sur-grille (4) est montrée à titre de comparaison.

dans [16], on trouve que $\frac{H(\partial T)}{\pi} = 2\pi$ est égal à la longueur moyenne des arêtes, soit 2π , puis la caractéristique d'Euler du pavé est nulle d'où $\varphi(T) = 0$. Notre processus X n'est pas isotrope, cependant il est stationnaire sur ∂T et on peut ramener la matrice de covariance du gradient Λ sous forme proportionnelle à l'identité en rendant le signal centro-symétrique et en remplaçant τ par $\left(\pi\sqrt{\frac{K^2-1}{3}}\right)^{-1}$ l et θ par $\left(\pi\sqrt{\frac{N^2-1}{3}}\right)^{-1}$ ν : c'est ce qui compte dans l'hypothèse d'isotropie.

Un des arguments qui nous a permis de trouver cette relation est que X est stationnaire sous bruit blanc. Malheureusement, la méthode employée ne peut pas être appliquée sous bruit colorée ($\Gamma \neq \mathbf{I}$).

4 Résultats numériques

Pour vérifier (12), nous avons évalué empiriquement la relation P_{FA} -seuil du Filtre adapté hors-grille approximé par un suréchantillonnage via 5×10^7 tirages de Monte Carlo dans une cellule de résolution $[0, 1/N] \times [0, 1/B]$, avec des vecteurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{d}$ de taille fixée à 10. Les résultats sont montrés dans la figure 3. La relation observée correspond très bien à la relation asymptotique calculée dans la section précédente, sauf pour des P_{FA} proches de 1. Ceci est dû au $O(e^{-cw^2})$ dans la formule, dont on a pas tenu compte dans la simulation, qui est plus élevé pour des seuils faibles : l'espérance de la caractéristique d'Euler est un estimateur moins pertinent dans ce cas.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons analysé la statistique du GLRT hors-grille, qui est plus robuste en présence de cibles hors-grille que le filtre adapté. Nous avons calculé et évalué

numériquement une relation P_{FA} -seuil asymptotique qui pourra être utilisée en détection distance-Doppler avec radar FMCW. Dans une première version de cet article, nous avons traité le cas d'un chirp classique et nous avons pu constater que la relation théorique (12) semblait en adéquation avec les simulations, avant de remarquer que nous ne vérifions pas certaines des hypothèses du théorème 3.1 dans ce cas. Une prochaine étape consisterait à revenir aux formules de base dans [13], aux hypothèses relaxées, pour obtenir une relation très similaire à (12) pour le chirp.

References

- [1] S. M. Kay, *Fundamentals of statistical processing, Volume 2: Detection theory*, Pearson Education India, 2009.
- [2] Mark A Richards, Jim Scheer, William A Holm, and William L Melvin, *Principles of modern radar*, vol. 1, Citeseer, 2010.
- [3] O. Besson, "Detection of a signal in linear subspace with bounded mismatch," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 42, no. 3, pp. 1131–1139, 2006.
- [4] A. De Maio, Y. Huang, D. P. Palomar, S. Zhang, and A. Farina, "Fractional QCQP with applications in ML steering direction estimation for radar detection," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no. 1, pp. 172–185, 2010.
- [5] F. Bandiera, D. Orlando, and G. Ricci, *Advanced Radar Detection Schemes Under Mismatched Signal Models*, Morgan & Claypool publishers, 2009.
- [6] J. Liu and J. Li, "Robust detection in mimo radar with steering vector mismatches," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 67, no. 20, pp. 5270–5280, 2019.
- [7] L. Besson, O. Scharf and S. Kraut, "Adaptive detection of a signal known only to lie on a line in a known subspace, when primary and secondary data are partially homogeneous," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 12, pp. 4698–4705, 2006.
- [8] G. Tang, B. N. Bhaskar, P. Shah, and B. Recht, "Compressed sensing off the grid," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 59, no. 11, pp. 7465–7490, 2013.
- [9] M. Lasserre, S. Bidon, O. Besson, and F. Le Chevalier, "Bayesian sparse Fourier representation of off-grid targets with application to experimental radar data," *Signal Processing*, vol. 111, pp. 261–273, 2015.
- [10] J. Dai, X. Bao, W. Xu, and C. Chang, "Root sparse Bayesian learning for off-grid DOA estimation," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 24, no. 1, pp. 46–50, 2016.
- [11] J. Bosse, O. Rabaste, and J.-P. Ovarlez, "Adaptive subspace detectors for off-grid mismatched targets," *2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pp. 4777–4780, 2020.
- [12] P. Develter, J. Bosse, O. Rabaste, P. Forster, and J.-P. Ovarlez, "Sur la probabilité de fausse alarme du filtre adapté normalisé pour la détection de cibles hors-grille," in *GRETSI 2022*, 2022.
- [13] R. J. Adler, "On excursion sets, tube formulas and maxima of random fields," *Annals of Applied Probability*, pp. 1–74, 2000.
- [14] L. L. Scharf and B. Friedlander, "Matched subspace detectors," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 8, pp. 2146–2157, 1994.
- [15] R. J. Adler and J. E. Taylor, *Random fields and geometry*, vol. 80, Springer, 2007.
- [16] K. J. Worsley, "Estimating the number of peaks in a random field using the Hadwiger characteristic of excursion sets, with applications to medical images," *The Annals of Statistics*, pp. 640–669, 1995.