HAL
open science

Une méthode particulaire pour résoudre des problèmes d'écoulements dans les milieux poreux

Anthony Beaudoin, Serge Huberson, Élie Rivoalen

To cite this version:

Anthony Beaudoin, Serge Huberson, Élie Rivoalen. Une méthode particulaire pour résoudre des problèmes d'écoulements dans les milieux poreux. 17e Congrès Français de Mécanique, Aug 2005, Troyes, France. hal-04243634

HAL Id: hal-04243634

https://hal.science/hal-04243634

Submitted on 16 Oct 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthode particulaire pour résoudre des problèmes d'écoulements dans des milieux poreux

Anthony Beaudoin, Serge Huberson & Elie Rivoalen

Université du Havre
Laboratoire de Mécanique, Physiques et Géosciences
25, rue Philippe Lebon BP 540 76058 Le Havre
Anthony.Beaudoin@irisa.fr

Résumé :

L'influence des forces inertielles sur la loi de Darcy est étudiée avec un modèle simulant l'écoulement dans un milieu poreux saturé à l'échelle des pores. Le milieu poreux est composé de cylindres disposés périodiquement dans l'espace. Les conditions aux limites sont satisfaites en couplant une méthode intégrale et une méthode particulaire. Les résultats de cet algorithme sont comparés à ceux de la littérature.

Abstract :

The effect of inertial forces on Darcy's law is studied by means of a model simulating the fluid flow in a saturated porous medium at the pore scale. The porous medium is composed of a spatially periodic array of aligned circular cylinders. The boundary conditions are satisfied by means of a boundary integral method implemented in a particles method. The results of applying this lagrangian scheme are compared with those of the literature.

Mots-clefs :

écoulement, milieu poreux, échelle des pores, méthode intégrale et méthode particulaire

1 Introduction

Les écoulements dans les milieux poreux sont décrits par la loi de Darcy. Cette relation introduite par Darcy en 1856 relie la vitesse d'écoulement du fluide au gradient de pression. Cette relation est linéaire pour des écoulements de Stokes. Quand le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e$ augmente, elle devient non linéaire [1]. L'influence des forces inertielles sur la loi de Darcy peut être étudiée à l'aide de modèles numériques simulant des écoulements dans des milieux poreux à l'échelle des pores. Il éxiste très peu de résultats sur ces simulations dans la littérature. Les premiers résultats ont été obtenus par Edwards *et al.* [2] et Ghaddar [3] à l'aide d'une méthode d'éléments finis. Edwards *et al.* ont simulé des écoulements permanents alors que Ghaddar a calculé des écoulements instationnaires. Koch *et al.* [4] ont ensuite réalisé des simulations numériques à l'aide d'une formulation de Lattice Bolztmann pour étudier l'influence de l'orientation du gradient de pression. Dans un récent travail, Graham *et al.* [5] ont étudié l'influence des forces oscillantes en réalisant des simulations numériques à l'aide de la méthode d'éléments finis. Ces simulations résolvent les équations de Navier-Stokes sur une grille fixe. Dans le cas de géométries complexes avec des frontières mouvantes, la grille est reconstruite à chaque pas de temps. Pour éviter ce problème, Calhoun proposa un modèle numérique basé sur une méthode de différences finies et une méthode de frontière immergée. La méthode de frontière immergée modélise les obstacles par une frontière mouvante sur laquelle une distribution de sources est déterminée pour imposer la condition d'adhérence [6]. Dans ce papier, une autre approche basée sur une méthode particulaire est présentée. Les méthodes particulaires sont basées sur une

discrétisation du champ de tourbillon et une description lagrangienne des équations de Navier-Stokes [7]. La difficulté d'appliquer les méthodes particulaires au calcul d'écoulement dans des milieux poreux réside dans la satisfaction des conditions aux limites. Les méthodes particulaires ne permettent pas de satisfaire correctement la condition d'adhérence pour des faibles nombres de Reynolds $\mathcal{R}_e$. Ce problème est résolu en implémentant une méthode intégrale de frontière dans une méthode particulaire [8]. Pour satisfaire la condition de périodicité, la méthode intégrale de frontière est modifiée en utilisant le travail de Monaghan qui fut le premier à considérer une condition de périodicité dans les méthodes particulaires [9]. Le noyau de Green $\mathcal{N}$ de la méthode intégrale de frontière est remplacé par un noyau bipériodique $\mathcal{N}^{per2D}$ obtenu en évaluant une double somme infinie de noyaux de Green.

2 Schéma lagrangien

2.1 Formulation du problème

Pour simplifier le problème de l'écoulement à l'échelle des pores, le milieu poreux est construit par une répétition périodique d'une cellule unité composée d'un carré de taille λ contenant en son centre un disque fixe de rayon R. Dans cette cellule, l'écoulement est gouverné par les équations de Navier-Stokes dont la formulation vitesse-tourbillon $(\mathbf{u}, \omega)$ est :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \nu \Delta \omega \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2}$$

ν est la viscosité cinématique du fluide. Sur la frontière solide $\delta\mathcal{D}$, la fonction de courant ψ doit satisfaire deux conditions aux limites :

$$\psi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \tag{3}$$

$\mathbf{n}$ désigne la normale sortante à la frontière solide $\delta\mathcal{D}$. L'hypothèse d'un milieu périodique impose une condition de périodicité pouvant s'exprimer avec la fonction de courant ψ :

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} + \lambda(i\mathbf{e}_x + j\mathbf{e}_y)) \quad \text{avec} \quad i, j \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

$\mathbf{x} = (x, y)$ est un vecteur position dans la cellule unité et $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ la base associée à cette cellule.

2.2 Méthode intégrale de frontière

La condition d'adhérence (éq. 3) est satisfaite à l'aide d'une méthode intégrale de frontière introduite par Achdou et Pironneau [8]. Dans une première étape, cette méthode décompose l'équation de transport du tourbillon (éq. 1) en une partie convective et une partie diffusive :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \Delta \omega = 0 \tag{5}$$

A chaque pas de temps, ces deux équations sont résolues successivement. Pour la partie convective, la vitesse $\mathbf{u}$ et le tourbillon ω obtenus au pas de temps précédent satisfont la condition d'adhérence. L'équation de convection est alors résolue sans la condition d'adhérence. Après l'étape convective, la vitesse $\mathbf{u}$ et le tourbillon ω ne satisfont plus la condition d'adhérence.

L'équation de diffusion est complétée de la condition d'adhérence. En utilisant un schéma d'Euler implicite d'ordre 2 et l'équation de Poisson $\omega = -\Delta\psi$, ce système d'équations s'écrit :

$$(\eta\Delta^2 - \Delta)\psi^{n+1} = \omega^n \quad \text{avec} \quad \eta = \nu\delta t \tag{6}$$

$$\psi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur} \quad \delta\mathcal{D} \tag{7}$$

δt est un pas de temps. Ce problème est appelé le problème de Stokes généralisé dont la solution est donnée par l'équation intégrale de frontière :

$$\psi^{n+1}(\mathbf{x}) = \eta\int_{\partial\mathcal{D}}\left(q_2(\mathbf{x}')\mathcal{N}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - q_1(\mathbf{x}')\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial\mathbf{n}'}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right)d\mathbf{x}' - \int_{\mathcal{D}}\omega^n(\mathbf{x}')\mathcal{N}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d\mathbf{x}' \tag{8}$$

En utilisant l'équation de Poisson, le tourbillon ω^{n+1} est donné par :

$$\omega^{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\partial\mathcal{D}}\left(q_1(\mathbf{x}')\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\mathbf{n}'}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - q_2(\mathbf{x}')\mathcal{K}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right)d\mathbf{x}' + \frac{1}{\eta}\int_{\mathcal{D}}\omega^n(\mathbf{x}')\mathcal{K}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d\mathbf{x}' \tag{9}$$

Les fonctions $\mathcal{N}$ et $\mathcal{K}$ sont définies par :

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\left(\log\mid\mathbf{x}\mid + K_0\left(\frac{\mid\mathbf{x}\mid}{\sqrt{\eta}}\right)\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{K}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{\mid\mathbf{x}\mid}{\sqrt{\eta}}\right) \tag{10}$$

où K_0 est la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro. Les inconnues sont les intensités q_1 et q_2 qui sont calculées de manière à satisfaire la condition d'adhérence (éq. 3).

2.3 Noyau de Green bipériodique $\mathcal{N}^{per2D}$

Pour satisfaire la condition de périodicité (éq. 4), le noyau de Green $\mathcal{N}$ est remplacé par un noyau de Green bipériodique $\mathcal{N}^{per2D}$ obtenu à l'aide d'une somme infinie de noyaux de Green $\mathcal{N}$ dans les deux directions $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^{per2D}(\mathbf{x}) &= \frac{y}{2\lambda} - \frac{y^2}{2\lambda^2} + \sum_{i,j}\frac{1}{2\pi}K_o\left(\frac{\mid\mathbf{x}+i\lambda\mathbf{e}_x+j\lambda\mathbf{e}_y\mid}{\sqrt{\eta}}\right)\\ &+ \sum_{j=0}^{j=+N_{per}}\frac{1}{4\pi}\log\left(1+\frac{\exp\left(-\frac{2\pi(y+j\lambda)}{\lambda}\right)-2\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)}{\exp\left(\frac{2\pi(y+j\lambda}{\lambda}\right)}\right)\\ &+ \sum_{j=-N_{per}}^{j=-1}\frac{1}{4\pi}\log\left(1+\frac{\exp\left(\frac{2\pi(y+j\lambda)}{\lambda}\right)-2\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)}{\exp\left(-\frac{2\pi(y+j\lambda)}{\lambda}\right)}\right)\end{aligned} \tag{11}$$

N_{per} désigne le nombre de période λ. Ces séries convergent et nous avons pu vérifier qu'un nombre limite de périodes ($N_{per} < 3$) était suffisant.

2.4 Méthodes particulaires

L'implémentation de la méthode intégrale dans une méthode particulaire consiste à discrétiser les équations (éq. 1) et (éq. 8) à l'aide des méthodes particulaires. La frontière solide $\partial\mathcal{D}$ est

découpée en M segments $\mathcal{S}_k$ définis par une longueur δl_k, une position $\mathbf{x}_k$ et un couple d'intensités ($q_1(\mathbf{x}_k)$,$q_2(\mathbf{x}_k)$). Le tourbillon ω est également discrétisé en N_p particules $\mathcal{P}_k$ définies par un poids Ω_k et une position $\mathbf{x}_k$. La forme discrète de l'équation (éq. 8) est :

$$\begin{aligned}\psi^{n+1}(\mathbf{x}) &= \eta \sum_{k=1}^{M} \delta l_k \left(q_2(\mathbf{x}_k)\mathcal{N}^{per2D}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k) - q_1(\mathbf{x}_k)\frac{\partial \mathcal{N}^{per2D}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k)\right) \\ &- \sum_{k=1}^{N_p} \Omega_k^n \mathcal{N}^{per2D}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k^n) \end{aligned} \tag{12}$$

Dans cette approche lagrangienne, l'équation (éq. 1) est remplacée par :

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_k^n) \quad \text{et} \quad \frac{d\Omega_k}{dt} = \nu \Delta \Omega_k^n \tag{13}$$

L'équation de convection est résolue à l'aide d'un schéma de Runge Kutta d'ordre 4. La vitesse est déterminée en prenant le gradient de la fonction de courant ψ^{n+1}. La solution de l'équation de diffusion est obtenue en appliquant la méthode PSE [7] :

$$\begin{aligned}\Omega_k^{n+1} &= \Omega_k^n + \sum_j \left(\Omega_j^n \sigma_k - \Omega_k^n \sigma_j\right) \mathcal{K}^{per2D}(\mathbf{x}_k^n - \mathbf{x}_j^n) \\ &+ \sigma_k \sum_j \delta l_j \left(q_1(\mathbf{x}_j)\frac{\partial \mathcal{K}^{per2D}}{\partial \mathbf{n}'}(\mathbf{x}_k^n - \mathbf{x}_j) - q_2(\mathbf{x}_j)\mathcal{K}^{per2D}(\mathbf{x}_k^n - \mathbf{x}_j)\right) \end{aligned} \tag{14}$$

σ_k est le support de la particule $\mathcal{P}_k$. La fonction $\mathcal{K}^{per2D}$ est définie par :

$$\mathcal{K}^{per2D}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i,j} K_o \left(\frac{\mid \mathbf{x} + i\lambda \mathbf{e}_x + j\lambda \mathbf{e}_y \mid}{\sqrt{\eta}} \right) \tag{15}$$

3 Résultats numériques

A l'aide du modèle numérique, nous simulons l'écoulement d'un fluide dans la cellule unité pour des nombres de Reynolds $\mathcal{R}_e = 2UR/\nu$ entre 10 et 200 et une fraction solide ϕ définie par le ratio entre la surface du cylindre et la surface du carré entre 0,2 et 0,4. Les simulations numériques sont réalisées sur 700 itérations avec un pas de temps $\delta t = 0,05$. Le nombre M de segments $\mathcal{S}_k$ et le nombre N_{per} de périodes λ sont fixés à 300 et 3. La figure 1 montre la force agissant sur le cylindre de la cellule unité en fonction du nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e$ pour $\phi = 0,4$ obtenue avec le modèle numérique, une formulation de Lattice Bolztmann utilisée par Koch *et al.* [4] et une méthode d'éléments finis utilisée par Edwards *et al.* [2] et Ghaddar [3]. Le modèle numérique donne des résultats proches de ceux de la littérature. Pour des forts nombres de Reynolds, la littérature montre que l'écoulement devient instationnaire. Sur la figure 2, la fonction de courant ψ obtenue avec le modèle numérique pour $\mathcal{R}_e = 80$ et $\mathcal{R}_e = 180$ est représentée. La fraction solide ϕ est de 0,2. L'écoulement est stationnaire à $\mathcal{R}_e = 80$. Pour $\mathcal{R}_e = 180$, des lâchés de tourbillons sont observés derrière le cylindre. Ces lâchés sont caractérisés par une fréquence adimensionnelle appelée le nombre de Strouhal $St = 2Rf/U$ où f est la fréquence des lâchés. La littérature montre que le nombre de Strouhal St augmente légèrement avec le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e$. Sur la figure 3, le nombre de Strouhal St obtenu par le modèle numérique et une formulation de Lattice Bolztmann utilisée par Koch *et al.* [4] est représenté en fonction du nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e$ pour $\phi = 0,2$. Cette figure valide le modèle numérique.

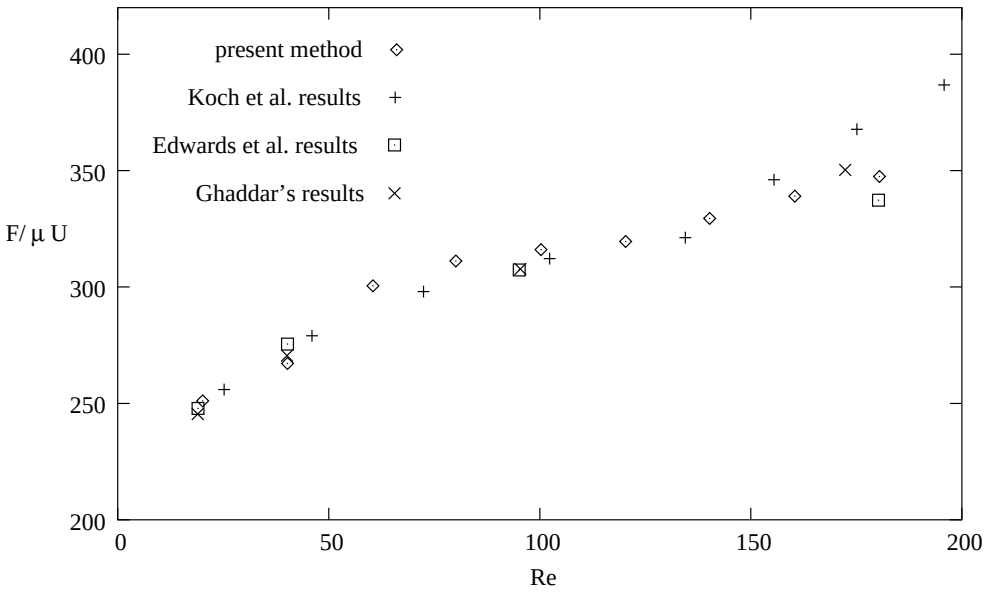

FIG. 1 – *Force $F/\mu U$ agissant sur le cylindre par rapport au nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e$ pour une fraction solide $\phi = 0,4$ (losanges : modèle numérique - croix : résultats de Koch et al. - carrés : résultats de Edouards et al. - croix inclinées : résultats de Ghaddar).*

4 Conclusion

L'utilisation des méthodes particulaires pour simuler des écoulements dans des milieux poreux à l'échelle des pores a soulevé des difficultés auxquelles nous avons apporté des solutions. Les écoulements dans des milieux poreux sont des écoulements lents avec $0 \leq \mathcal{R}_e \leq 200$. Pour ces écoulements, les méthodes particulaires doivent être capables de résoudre correctement la condition d'adhérence. Cela est réalisée en implémentant une méthode intégrale de frontière dans une méthode particulaire. Pour satisfaire la condition de périodicité, un noyau de Green périodique $\mathcal{N}^{per2D}$ remplace le noyau de Green $\mathcal{N}$ de la méthode intégrale de frontière. Dans les simulations numériques, la fraction solide ϕ varie entre 0,2 et 0,4. Dans le cas d'un écoulement dans un sol, cette fraction solide est encore plus importante. Des simulations numériques de-

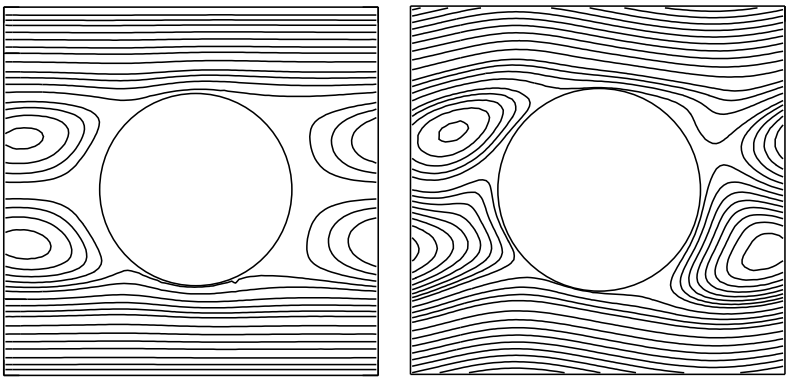

FIG. 2 – *Fonction de courant ψ d'un régime permanent (gauche : $\mathcal{R}_e = 80$) et d'un régime instationnaire (droite : $\mathcal{R}_e = 180$) pour une fraction solide $\phi = 0,2$.*

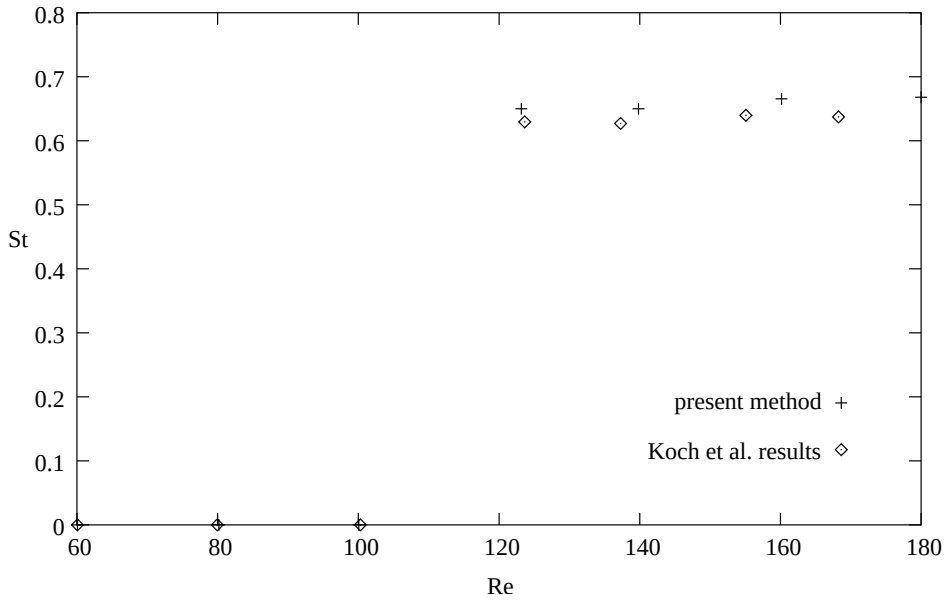

FIG. 3 – *Nombre de Strouhal St par rapport au nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e$ pour une fraction solide $\phi = 0,2$ (croix : modèle numérique - losanges : résultats de Koch et al.).*

vront être réalisées à des fractions solides plus importantes. L'écoulement dans un sol peut provoquer le déplacement des grains du sol. Le modèle devra simuler le déplacement des grains. Ce futur travaille devra être facilité par la représentation lagrangienne.

Références

[1] M. Firdaouss, J.L. Guermond, and P. Lequéré. Nonlinear corrections to darcy's law at low reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 343:331–350, 1997.

[2] D.A. Edwards, M. Shapiro, P. Bar-Yoseph, and M. Shapira. The influence of reynolds number upon the apparent permeability of spatially periodic arrays of cylinders. *Phys. Fluids*, 1:45–55, 1990.

[3] C.K. Ghaddar. On the permeability of unidirectional fibrous media : a parallel computational approach. *Phys. Fluids*, 11:2563–2585, 1995.

[4] D.L. Koch and A.J.C. Ladd. Moderate reynolds number flows through periodic and random arrays of aligned cylinders. *J. Fluid Mech.*, 349:31–66, 1997.

[5] D.R. Graham and J.J.L. Higdon. Oscillatory forcing of flow through porous media. part 2. unsteady flow. *J. Fluid Mech.*, 465:237–260, 2002.

[6] D. Calhoun. A cartesian grid method for solving the two-dimensional stream function-vorticity equations in irregular regions. *J. Comput. Phys.*, 176:231–275, 2002.

[7] G.H. Cottet and P. Koumoutsakos. Vortex methods theory and practice. Technical report, Cambridge University Press, 2000.

[8] Y. Achdou and O. Pironneau. A fast solver for navier-stokes equations in the laminar regime using mortar finite element and boundary element methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32(4):985–1016, 1993.

[9] J.J. Monaghan and R.J. Humble. Vortex particle methods for periodic channel flow. *J. Comput. Phys.*, 152-159, 1993.