

Eduquer le regard à porter sur les figures en géométrie

Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Professeur émérite à l'université d'Artois
Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR)
Universités de Paris, Cergy, Créteil, Lille, Rouen



Regarder un dessin comme une figure de géométrie

Une figure de géométrie est définie par un texte ou un procédé de construction avec des instruments.

Articulation texte et figure, registre verbal et registre graphique

Lien entre instruments de tracé et propriétés géométriques dans le langage

Plan

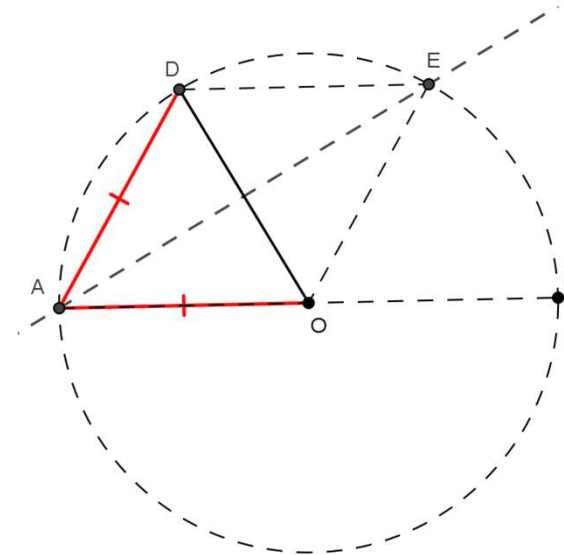
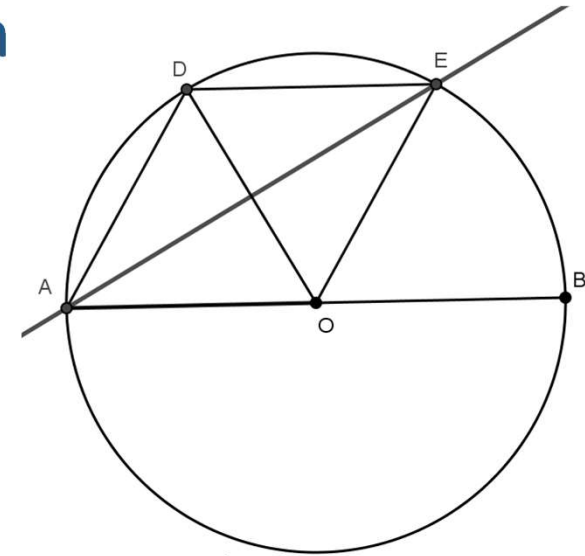
- Introduction : deux exemples
 - Regard et langage dans une démonstration de géométrie
 - Regard à porter sur une figure pour la reconstruire
- Le regard géométrique sur les figures
 - Les travaux de Raymond Duval
 - Le groupe de recherche de l'IUFM Nord-Pas-de-Calais
- Regard géométrique sur la figure et instruments permettant de la construire
 - Des situations didactiques pour faire évoluer le regard sur la figure au cycle 3
 - Regard sur la figure et choix d'axiomatique sous-jacente au cycle 4
- Conclusion

Articulation texte et figure dans une démonstration

Un exemple de problème de collège

- Soit C un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ et un point D sur ce cercle, tel que $AD = AO$.
- La perpendiculaire à (DO) passant par A recoupe le cercle C au point E .
- Montrer que le quadrilatère $ADEO$ est un losange.

- Exemple de démonstration (et regards sur la figure) :
 - $AD=AO$
 - donc A sur la médiatrice de $[DO]$.

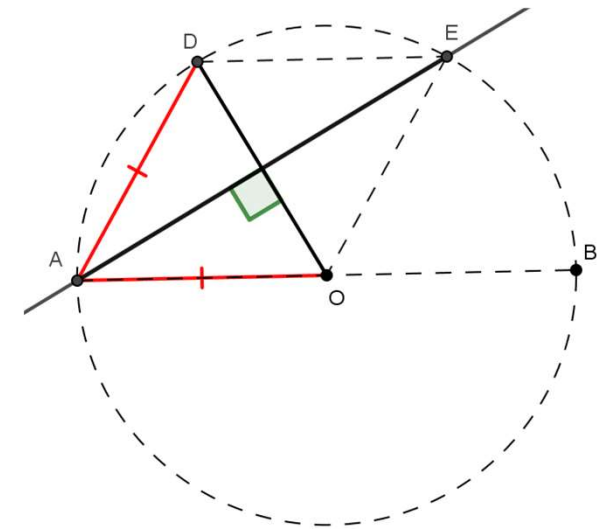
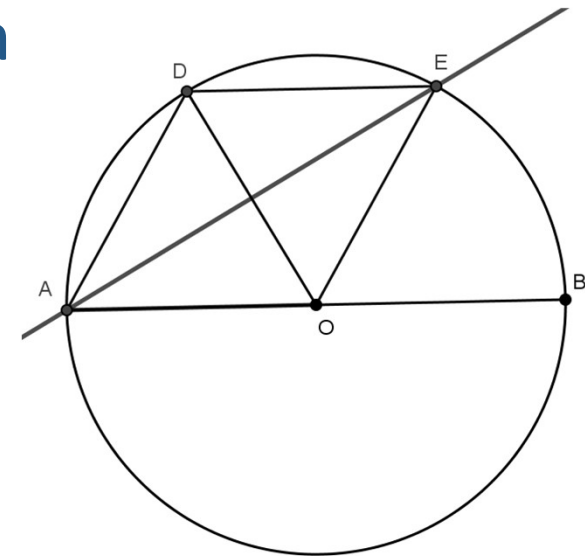


Articulation texte et figure dans une démonstration

Un exemple de problème de collège

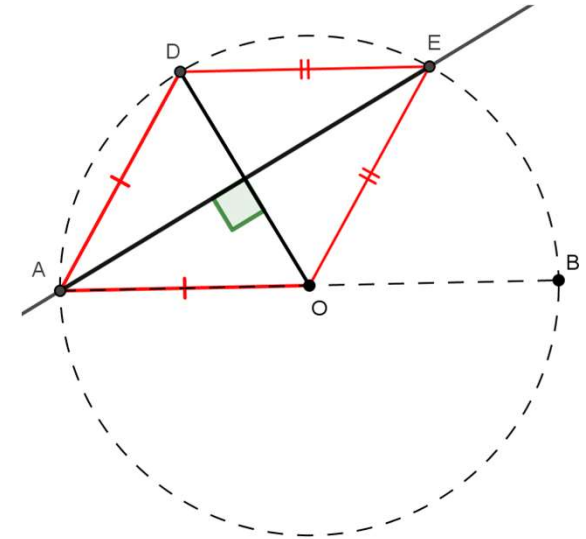
- Soit C un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ et un point D sur ce cercle, tel que $AD = AO$.
- La perpendiculaire à (DO) passant par A recoupe le cercle C au point E .
- Montrer que le quadrilatère $ADEO$ est un losange.

- Exemple de démonstration (et regards sur la figure) :
 - $AD=AO$
 - donc A sur la médiatrice de $[DO]$.
 - Mais (AE) perpendiculaire à $[DO]$
 - Une seule perpendiculaire à $[DO]$ passant par A .
 - Donc E sur la médiatrice de $[DO]$



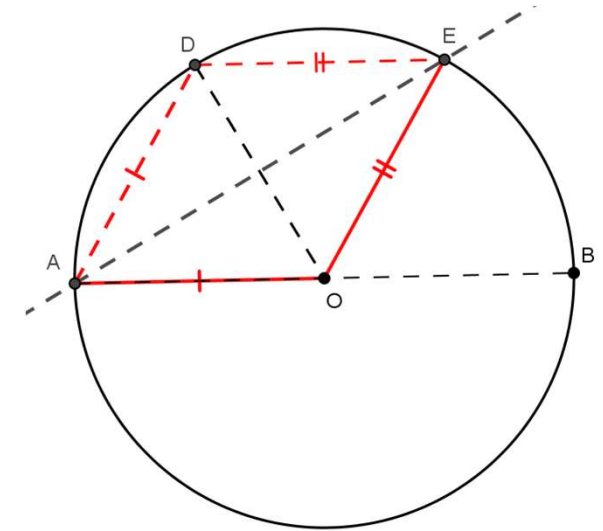
Regards sur la figure pendant la démonstration

- E sur la médiatrice de [DO]
- Donc $ED = EO$



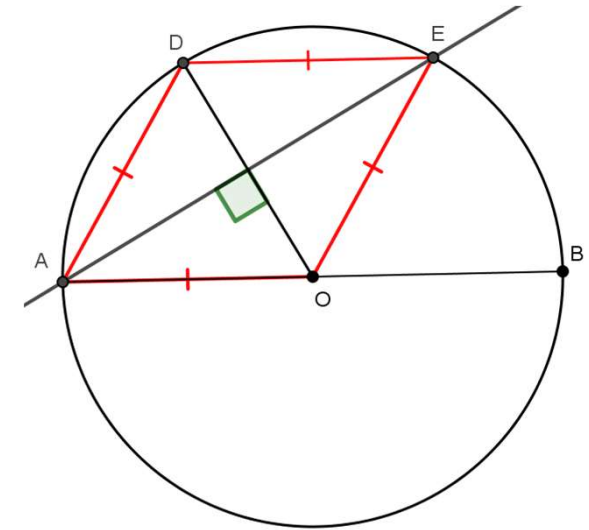
Regards sur la figure pendant la démonstration

- E sur la médiatrice de [DO]
- Donc $ED = EO$
- Mais A et E sont sur le cercle de centre O
- Donc OA et OE sont des rayons du même cercle et $OA = OE$
- Finalement $AD = AO = OE = ED$



Regards sur la figure pendant la démonstration

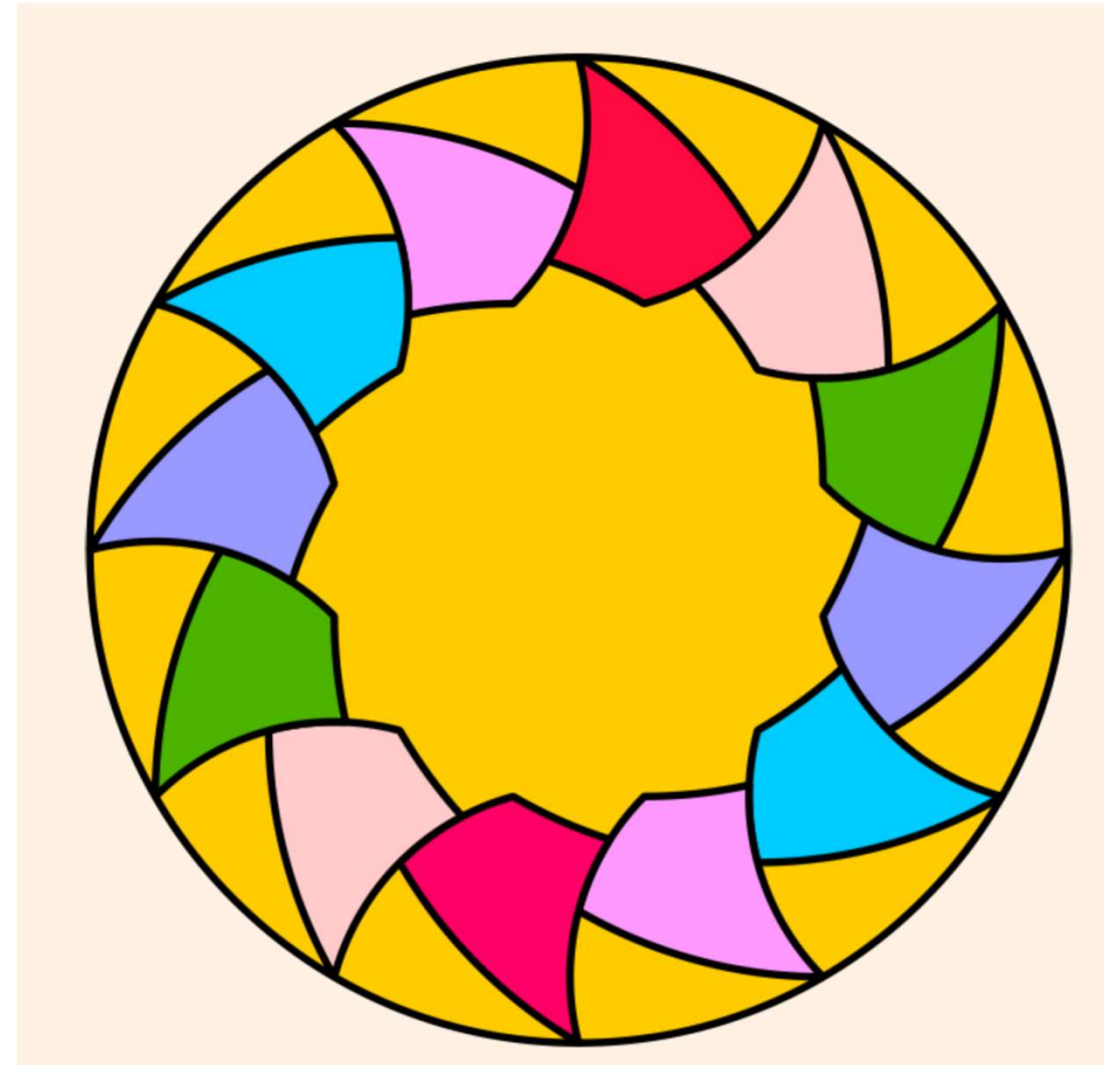
- E sur la médiatrice de [DO]
 - Donc $ED = EO$
 - Mais A et E sont sur le cercle de centre O
 - Donc OA et OE sont des rayons du même cercle et $OA = OE$
 - Finalement $AD = AO = OE = ED$
- Regard sur la figure guidé par le texte et les connaissances
 - Figures superposées : triangle, losange, cercle définies par des lignes avec des points spécifiques à identifier.
 - Relations entre points, droites, cercles, segments à isoler. Savoirs sur la médiatrice le cercle et le losange.



Un exemple : Noria

www.bellesfigures.fr

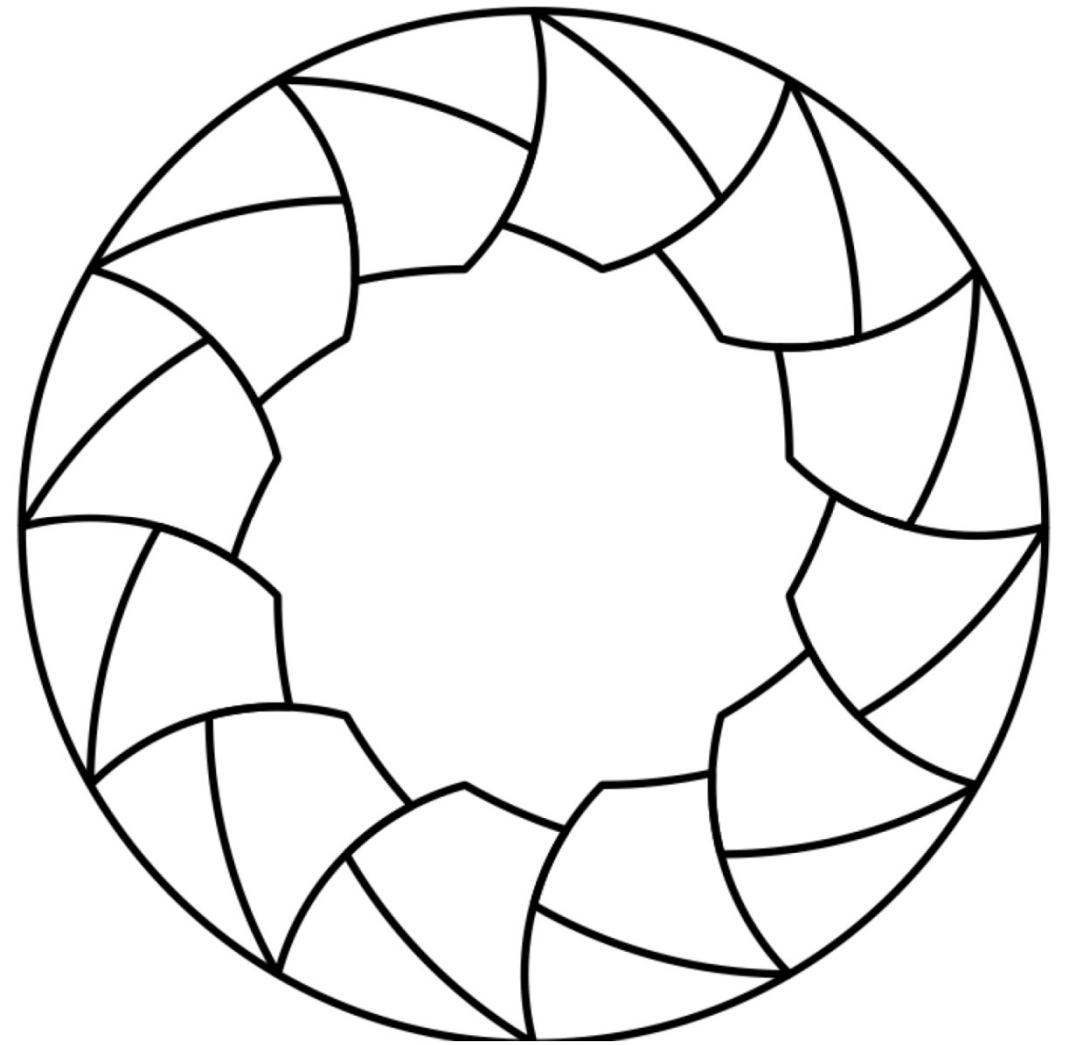
- Au premier coup d'œil, on voit des formes colorées sur fond circulaire jaune, dégagant une forme jaune dentée à l'intérieur.
- La même forme est reproduite douze fois en une suite de 6 couleurs répétée.
- On peut s'intéresser à l'harmonie, à la répétition des couleurs.
- On peut aussi se demander comment on peut reconstruire cette figure à partir du cercle extérieur
 - Avec un compas
 - Avec GeoGebra



Un exemple : Noria

www.bellesfigures.fr

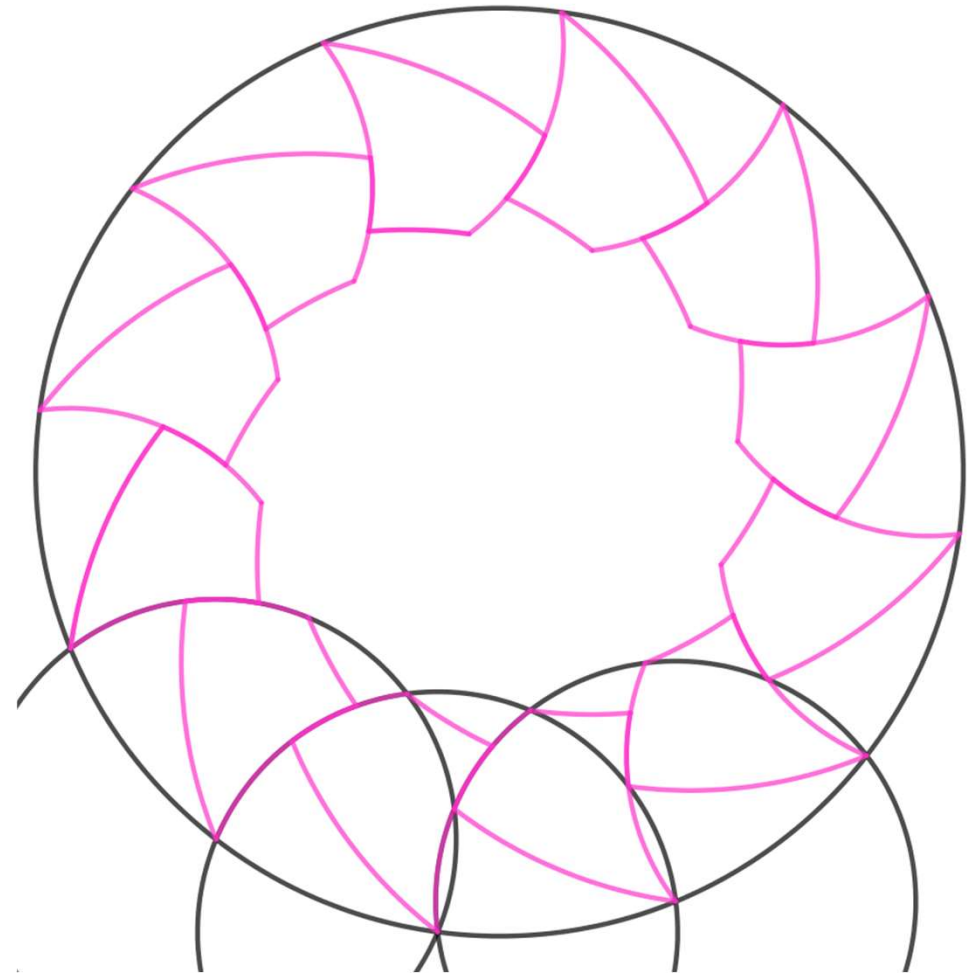
- Comment reconstruire cette figure à partir du cercle extérieur ?
 - Avec un compas
 - Avec GeoGebra
- Phase 1. Analyse de la figure.
Il faut d'abord supposer qu'on bien des arcs de cercle et le vérifier avec un compas.
 - Pour cela il faut trouver les centres et les rayons.



Un exemple : Noria

www.bellesfigures.fr

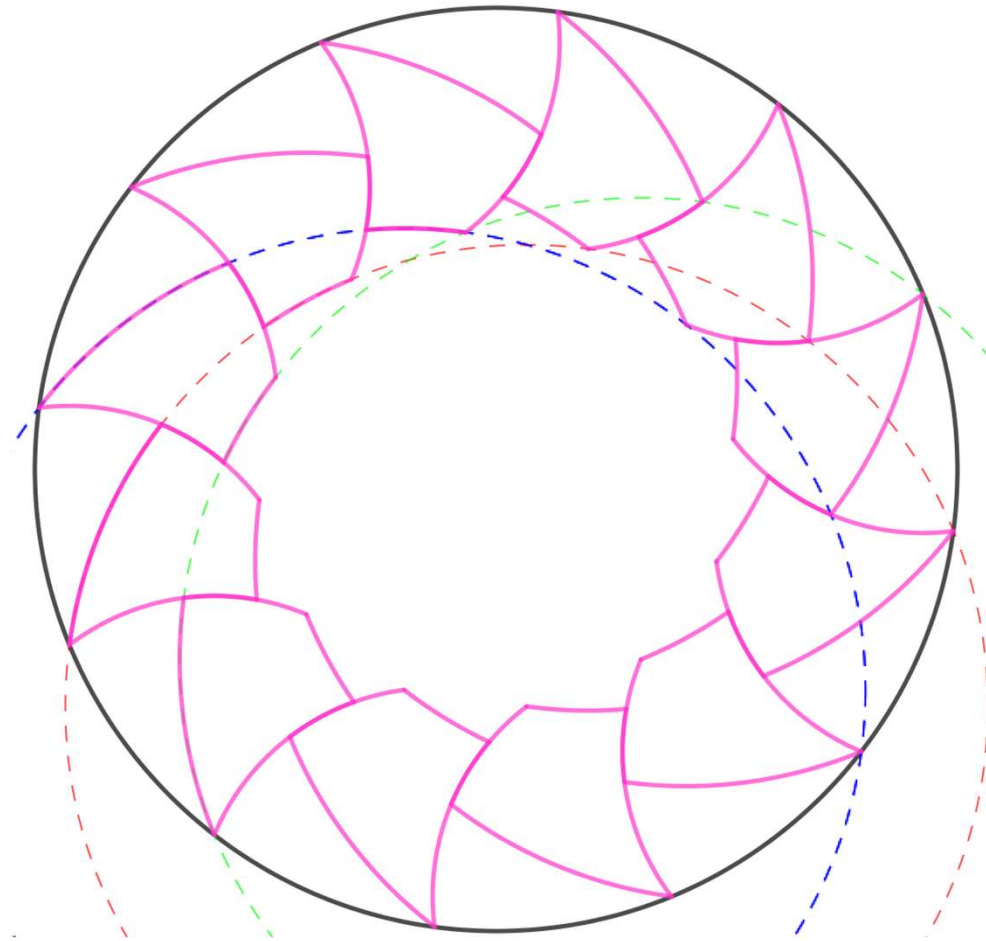
- Comment reconstruire cette figure à partir du cercle extérieur ?
 - Avec un compas
 - Avec GeoGebra
- Phase 1. Analyse de la figure.
Il faut vérifier qu'on bien des arcs de cercle.
 - Pour vérifier avec le compas, il faut trouver les centres et les rayons.
 - A priori, chaque forme est délimitée par 4 arcs.
 - Certains centres et rayons sont assez faciles à repérer ; les arcs centrés sur le cercle extérieur et de rayon la distance entre deux pointes.



Un exemple : Noria

www.bellesfigures.fr

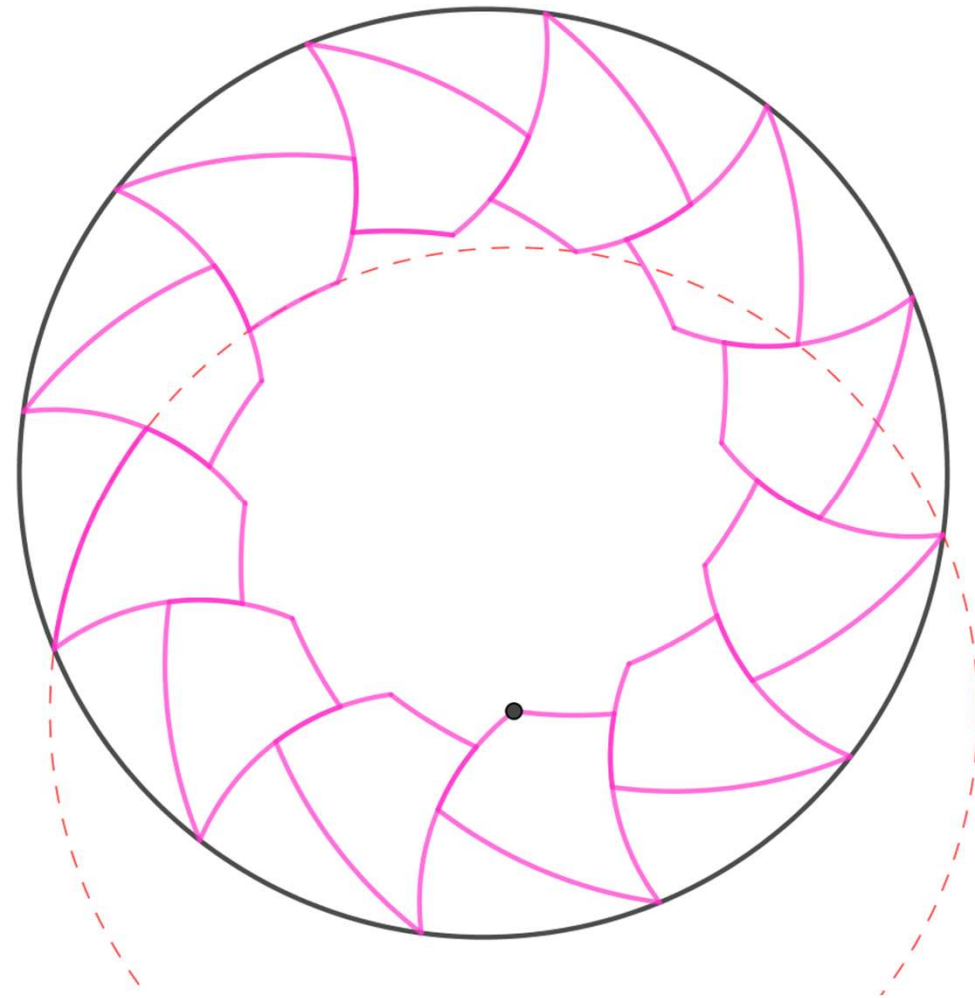
- Comment reconstruire cette figure à partir du cercle extérieur ?
 - Avec un compas
 - Avec GeoGebra
- Phase 1. Analyse de la figure.
Il faut d'abord supposer qu'on a bien des arcs de cercle et le vérifier avec un compas.
 - Pour cela il faut trouver les centres et les rayons.
 - A priori, chaque forme est délimitée par 4 arcs.
 - Certains centres et rayons sont assez faciles à repérer ; les arcs centrés sur le cercle extérieur et de rayon la distance entre deux pointes.
 - Si on regarde bien certains arcs semblent dans le prolongement l'un de l'autre, c'est-à-dire sur le même cercle. Mais les centres et rayons de ces cercles sont plus difficiles à trouver.



Un exemple : Noria

www.bellesfigures.fr

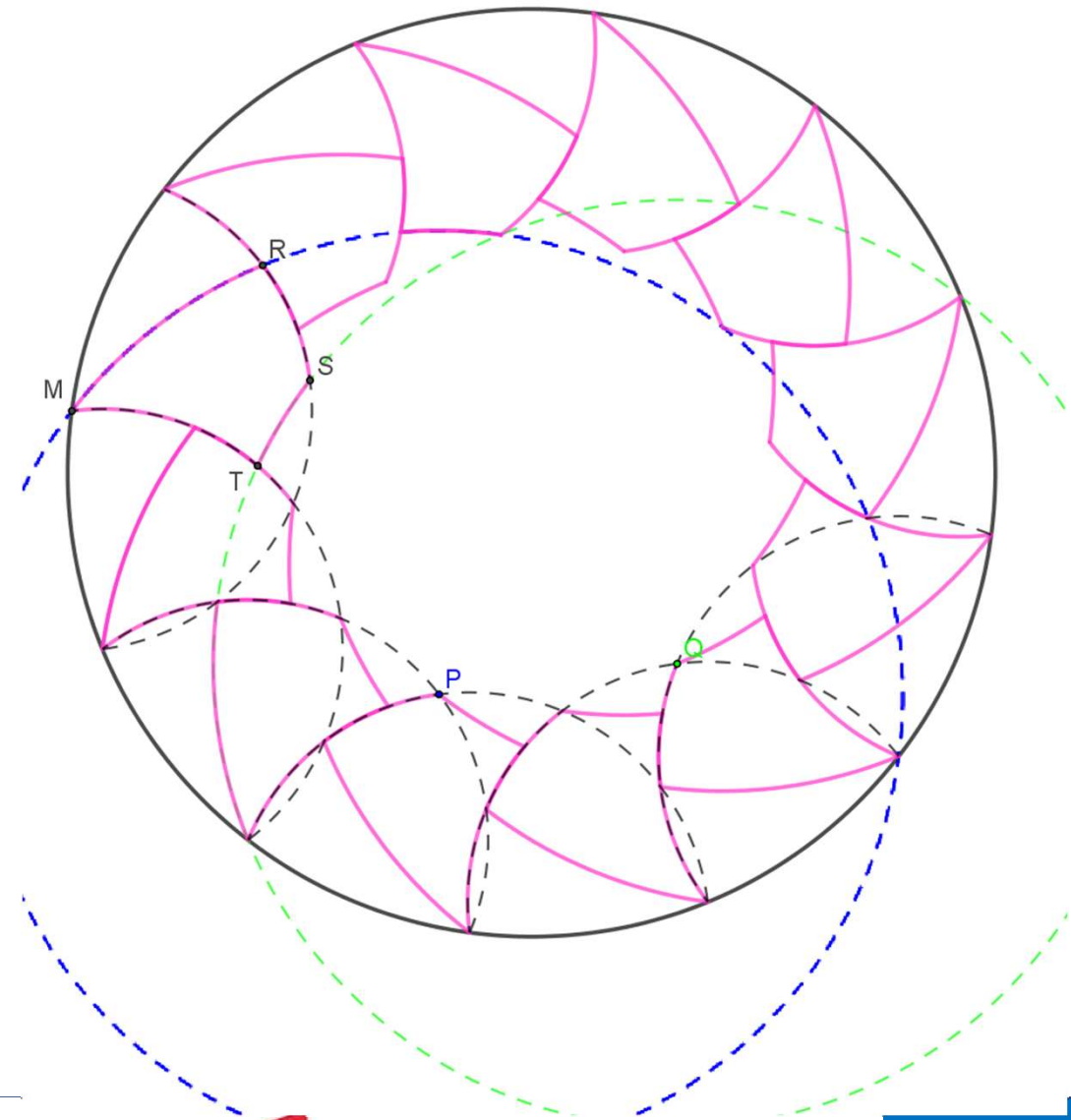
- Comment reconstruire cette figure à partir du cercle extérieur ?
 - Avec un compas
 - Avec GeoGebra
- Phase 1. Analyse de la figure.
Il faut vérifier qu'on bien des arcs de cercle.
 - Pour cela il faut trouver les centres et les rayons.
 - A priori, chaque forme est délimitée par 4 arcs.
 - Certains centres et rayons sont assez faciles à repérer ;
 - Si on regarde bien certains arcs semblent dans le prolongement l'un de l'autre, c'est-à-dire sur le même cercle. Mais les centres et rayons de ces cercles sont plus difficiles à trouver.
 - On considère deux arcs qui semblent sur le même cercle on peut s'aider d'une médiatrice pour conjecturer le centre. On vérifie au compas sur la figure initiale.



Un exemple : Noria

www.bellesfigures.fr

- Ces centres sont à l'intersection des arcs de cercle qui relient les points du partage du cercle en 12.
- Le centre du cercle bleu qui porte le bord extérieur MR du godet MRST est à l'intersection des arcs qui suivent ceux qui portent un bord latéral (RS et MT)
- Le centre du cercle (en vert) qui porte le bord intérieur ST est à l'intersection des deux arcs suivants.



Un exemple : Noria

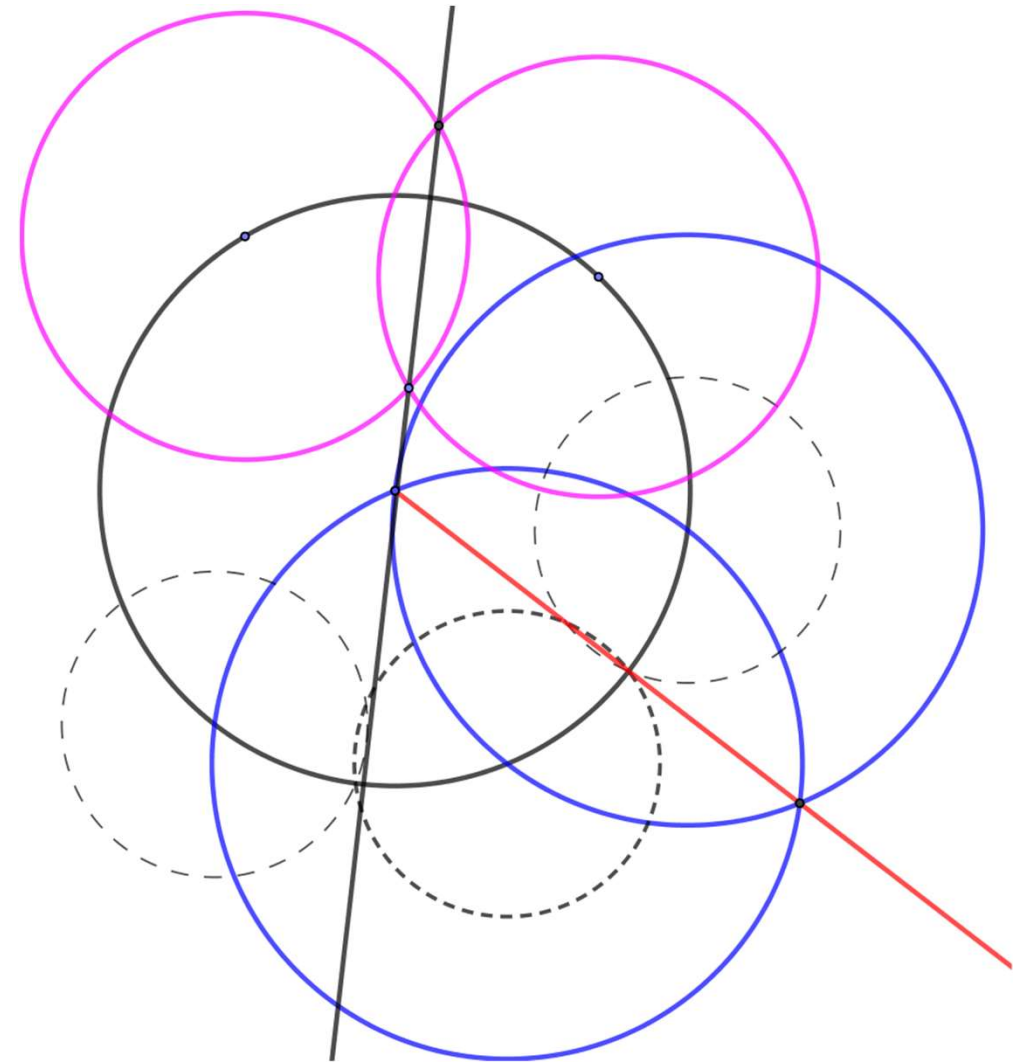
www.bellesfigures.fr

- Regard sur la figure dans la phase d'analyse sur papier avec les instruments matériels
 - Reconnaître un partage du cercle circonscrit en douze ; reconnaître une répétition d'un motif par rotation autour du centre
 - Reconnaître des arcs de cercle par leur courbure régulière
 - Rechercher pour chacun le centre et un point
 - Reconnaître les cercles centrés en un point du partage en 12 et passant par un point voisin
 - Voir que les arcs latéraux d'un godet sont portés par ces cercles
 - Reconnaître que les arcs moins cintrés sont deux à deux sur le même cercle : un arc interne avec l'arc externe voisin à droite
 - Voir que les centres de ces cercles sont des intersections des cercles précédents ; associer le centre et le point du cercle circonscrit pour reconstituer le cercle.
- Il faut regarder, interpréter avec ses connaissances, ajouter des lignes qui ne sont pas présentes mais permettent de relier celles qu'on a à des moyens de les construire avec les connaissances sur les cercles.
- C'est la partie mathématisation du dessin. On est dans la géométrie matérielle.

Un exemple : Noria

www.bellesfigures.fr

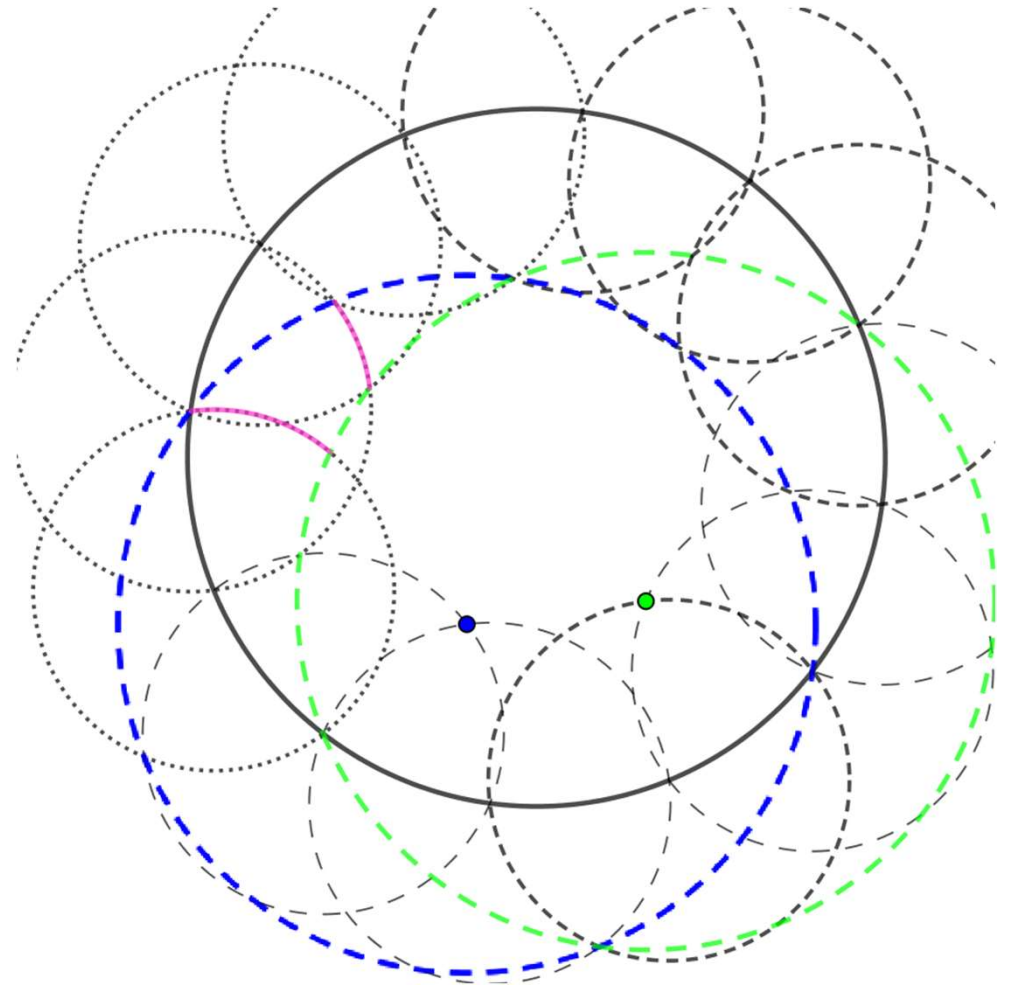
- Comment reconstruire cette figure à partir du cercle extérieur ?
 - Avec GeoGebra (ou avec un compas)
- Phase 2. Reconstruction
 - Partager le cercle en 12
 - Trouver le centre : un diamètre et son milieu
 - Report du rayon (rosace en 6), médiatrice, partage en 12.
 - Choix de stratégie : fabriquer une forme et la reproduire par rotation ou fabriquer toutes les formes en même temps.



Un exemple : Noria

www.bellesfigures.fr

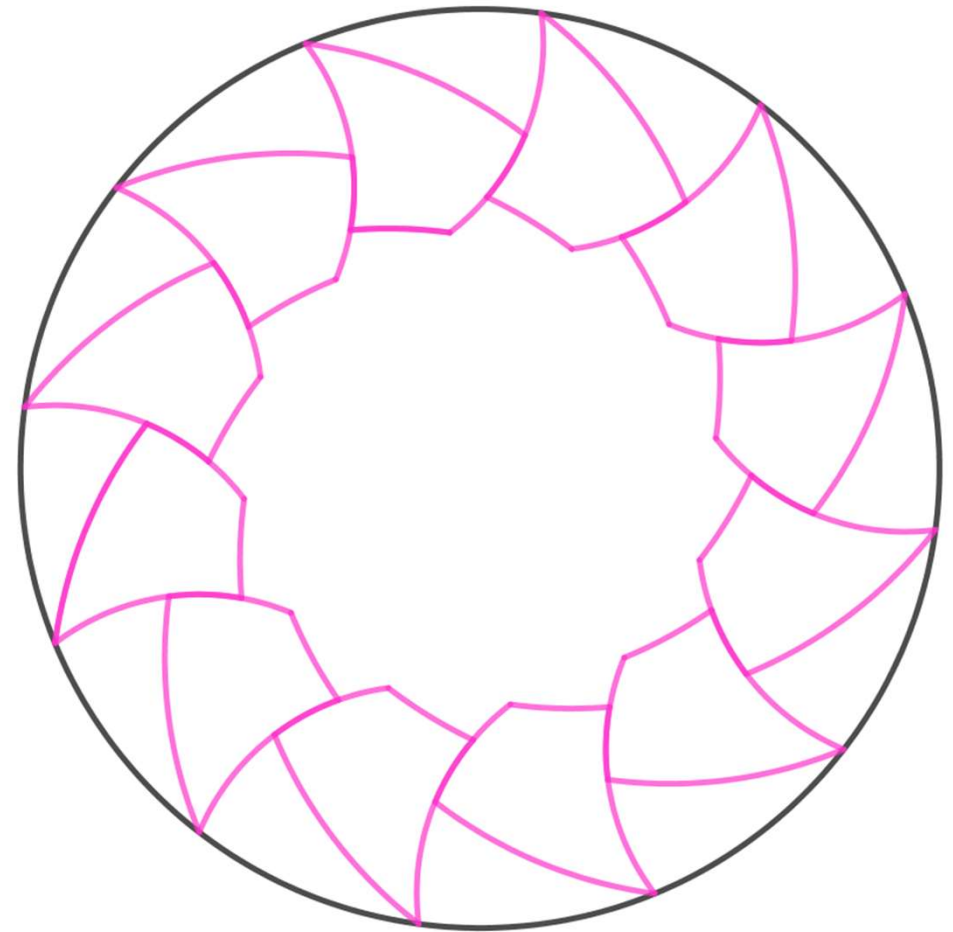
- Comment reconstruire cette figure à partir du cercle extérieur ?
 - Avec GeoGebra (ou avec un compas)
- Phase 2. Reconstruction
 - Partager le cercle en 12
 - Trouver le centre : un diamètre et son milieu
 - Report du rayon (rosace en 6), médiatrice, partage en 12.
 - Choix de stratégie : fabriquer une forme et la reproduire par rotation ou fabriquer toutes les formes en même temps.
 - On a déjà les demi-cercles support de la moitié des arcs (en rose) et une de leurs extrémités mais l'autre extrémité est définie par l'intersection avec les cercles bleus ou verts.



Un exemple : Noria

www.bellesfigures.fr

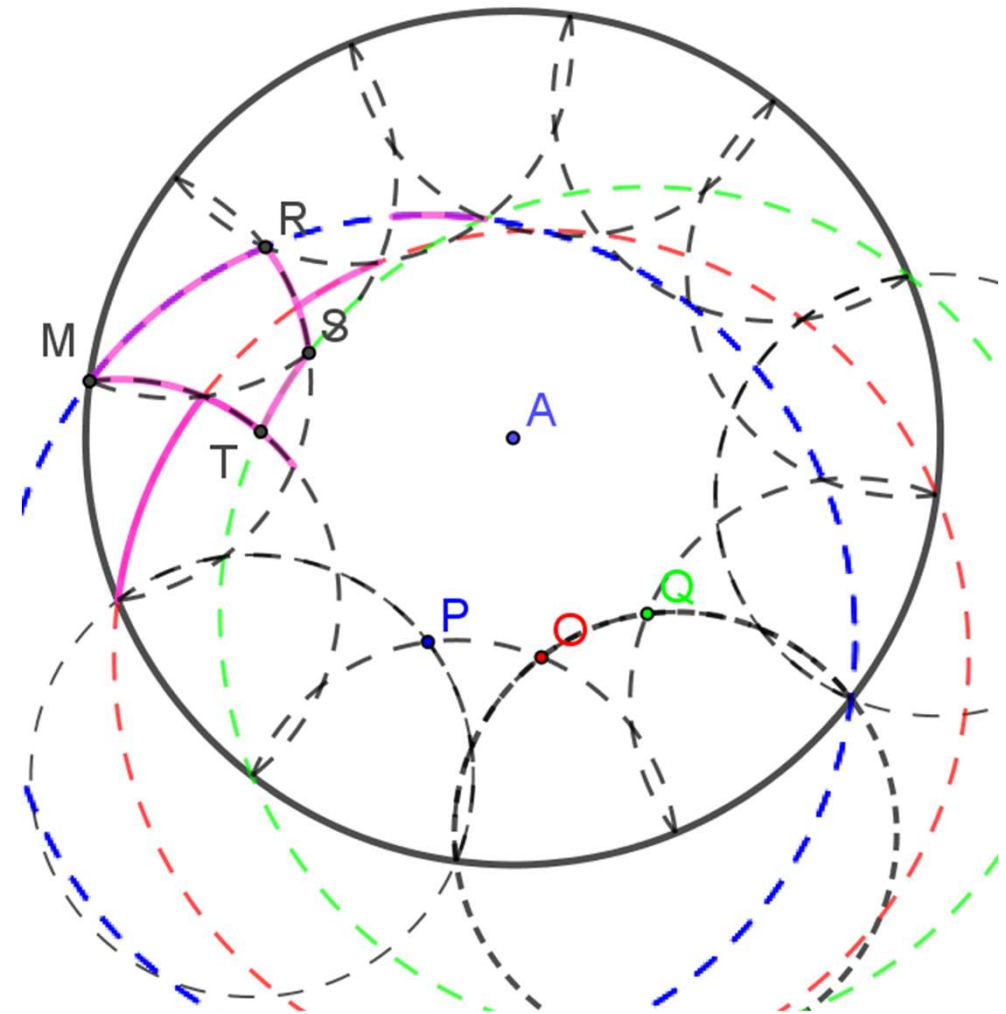
- Comment reconstruire cette figure à partir du cercle extérieur ?
 - Avec GeoGebra (ou avec un compas)
- Phase 2. Reconstruction
 - Il reste à tracer tous les arcs souhaités et à cacher tous les cercles et points servant à la construction.



Un exemple : Noria

www.bellesfigures.fr

- Regard sur la figure dans la phase de reconstruction
 - Construire les lignes et marquer les points qui seront utiles, distinguer ce qu'on garde de ce qu'on efface
 - Prendre des repères significatifs pour la construction
 - des couleurs différentes
 - Le cercle et son centre de la même couleur...
 - Tracer les arcs utiles : repérer sur quels cercles ils sont et leurs extrémités.
 - Ici les arcs interne et externe du godet dont j'ai tracé les arcs latéraux en rose sont sur les cercles vert et bleu.
 - Le cercle rouge intermédiaire porte des arcs interne ou externe des godets voisins.
 - Cacher les lignes inutiles.
- Utilisation du modèle mathématique dans le domaine du dessin : retenir ce qui est utile pour le projet.



Le regard géométrique sur les figures

Un groupe de recherche à l'IUFM Nord-Pas-de-Calais de 1999 à 2010

- Les membres du groupe

- Des formateurs de professeurs des écoles avec une grande expérience
- Des enseignants maîtres formateurs
- Une didacticienne des mathématiques (avec un renfort au fil des années)
- Un spécialiste de psychologie cognitive travaillant depuis longtemps avec des enseignants de mathématiques : Raymond Duval

- Le projet

- Réfléchir à l'enseignement de la géométrie sur toute la scolarité obligatoire, de 6 à 15 ans.
- Continuités possibles et gestion des ruptures entre l'école et le collège.
- Comment faire acquérir aux élèves la mobilité du regard sur les figures indispensable pour faire de la géométrie ?

Regard sur la figure et langage en géométrie. Les travaux de Raymond Duval

- Deux références accessibles sur internet
 - Repères-IREM, N°17. p. 121-138 (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique.
 - Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Annales de didactique et de sciences cognitives n° 10, p. 5 – 53 (2005).
- Ce qu'il tend à montrer (extraits du résumé de l'article de 2005)
 - La géométrie est un domaine de connaissance qui exige l'articulation cognitive de deux registres de représentation très différents : la visualisation de formes pour représenter l'espace et le langage pour en énoncer des propriétés et pour en déduire de nouvelles.
 - Les difficultés d'apprentissage viennent d'abord de ce que ces deux registres sont utilisés d'une manière souvent contraire à leur fonctionnement cognitif normal en dehors des mathématiques.
 - La manière de voir des figures dépend de l'activité dans laquelle elle est mobilisée. On peut ainsi distinguer une manière de voir qui fonctionne de manière iconique et une manière de voir fonctionnant de manière non iconique.

Regard sur la figure et langage en géométrie. Les travaux de Raymond Duval

- La visualisation iconique

- On reconnaît les formes et on identifie les objets en une seule opération : la forme discriminée par la vue ressemble à la forme typique d'un objet réel représenté.
- Il faut parfois un apport verbal d'informations complémentaires, une légende mais le mécanisme d'iconicité continue à s'imposer de manière autonome chaque fois que quelque chose est donné à voir.
- Difficulté pour l'apprentissage de la géométrie : la reconnaissance est centrée sur le contour de la forme ; les propriétés qui ne sont pas liées au contour (par exemple les diagonales d'un quadrilatère) sont plus difficilement mobilisables ; il y a une résistance à sortir du contour fermé de la forme ; les formes apparaissent stables ; il est difficile de les transformer en d'autres formes semblables (par exemple un carré sur la pointe vu comme un losange) ou, plus encore, différentes (par exemple transformer un triangle en un rectangle de même aire).

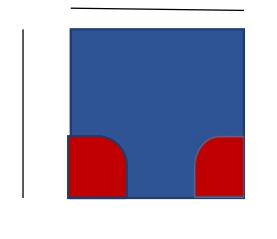
Regard sur la figure et langage en géométrie. Les travaux de Raymond Duval

- La visualisation non iconique ou la déconstruction des formes
 - Décomposition en unités figurales de même dimension ou de dimensions plus petites
 - Imaginer des tracés supplémentaires
 - La déconstruction dimensionnelle constitue le processus central de la visualisation géométrique.
- Par exemple, pour vérifier qu'on a un carré
 - D'un coup d'œil (vision iconique)



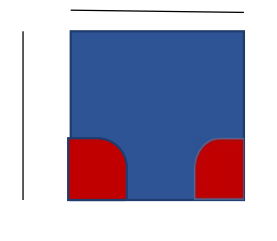
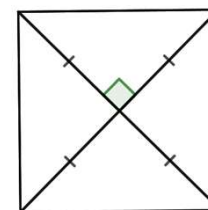
Regard sur la figure et langage en géométrie. Les travaux de Raymond Duval

- La visualisation non iconique ou la déconstruction des formes
 - Décomposition en unités figurales de même dimension ou de dimensions plus petites
 - Imaginer des tracés supplémentaires
 - La déconstruction dimensionnelle constitue le processus central de la visualisation géométrique.
- Par exemple, pour vérifier qu'on a un carré
 - D'un coup d'œil (vision iconique)
 - En recherchant des propriétés suffisantes pour assurer qu'il s'agit d'un carré.
- Quadrilatère qui a 4 angles droits et 4 côtés de même longueur



Regard sur la figure et langage en géométrie. Les travaux de Raymond Duval

- La visualisation non iconique ou la déconstruction des formes
 - Décomposition en unités figurales de même dimension ou de dimensions plus petites
 - Imaginer des tracés supplémentaires
 - La déconstruction dimensionnelle constitue le processus central de la visualisation géométrique.
- Par exemple, pour vérifier qu'on a un carré
 - D'un coup d'œil (vision iconique)
 - En recherchant des propriétés suffisantes pour assurer qu'il s'agit d'un carré.
- Quadrilatère qui a 4 angles droits et 4 côtés de même longueur
- Quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu, sont perpendiculaires et égales.



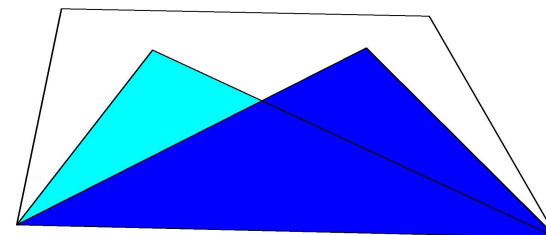
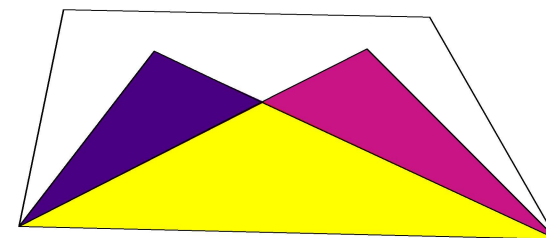
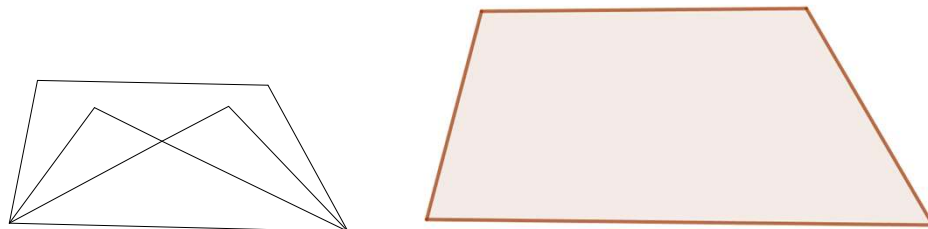
Regard sur la figure et langage en géométrie. Les travaux de Raymond Duval

- Pour analyser le rôle du langage en géométrie, il faut distinguer trois niveaux d'opérations discursives : la dénomination, l'énonciation de propriétés, la déduction. Cette distinction est essentielle car le rapport du langage à la visualisation change complètement d'un niveau à l'autre.
- Cependant, sous cette variation, se cache un phénomène cognitif fondamental : le hiatus dimensionnel. Les passages entre visualisation et discours impliquent en géométrie un changement du nombre de dimensions pour reconnaître les objets de connaissance visés dans chacun des deux registres.

Regard sur la figure. Une opérationnalisation pour l'enseignement

Vision surfaces ou D2 (vision naturelle) :

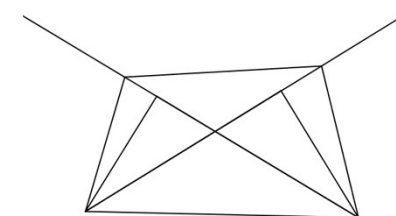
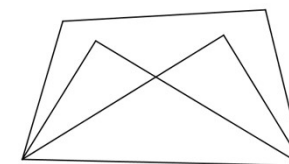
- Dans une vision « surfaces », on voit
 - des surfaces juxtaposées
 - à la rigueur superposées,
- Des lignes et des points peuvent apparaître mais
 - les lignes sont seulement des bords de surfaces,
 - les points sont des sommets de surfaces ou, en cas de superposition, des intersections de bords.
- La figure composée est vue comme un puzzle par juxtaposition ou superposition partielle de figures simples (contour de gabarit, dès la maternelle)
- On ne peut pas créer de nouvelles lignes



Regard sur la figure. Une opérationnalisation pour l'enseignement

Vision « lignes » (ou D1)

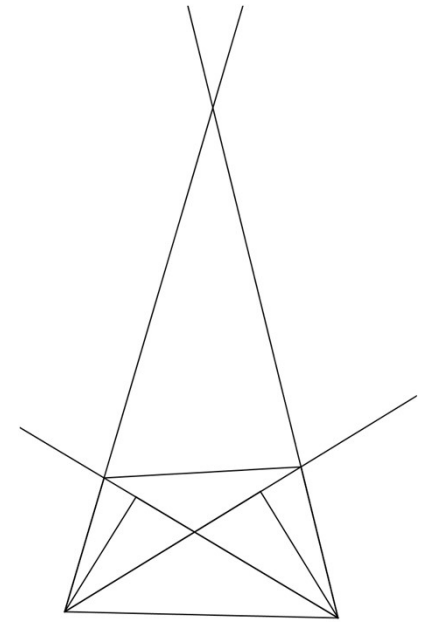
- Dans une vision « lignes » la figure est constituée de lignes qui peuvent se tracer avec des instruments :
 - la règle pour les droites, les demi-droites (qu'on peut prolonger) et les segments,
 - le compas pour les cercles ou les arcs de cercles.
- Les points sont des extrémités de lignes ou des intersections de lignes qu'on a déjà.
- On peut tracer des segments (voire des demi-droites ou des droites) qui relient des points qu'on a déjà.



Regard sur la figure. Une opérationnalisation pour l'enseignement

Vision « lignes » (ou D1)

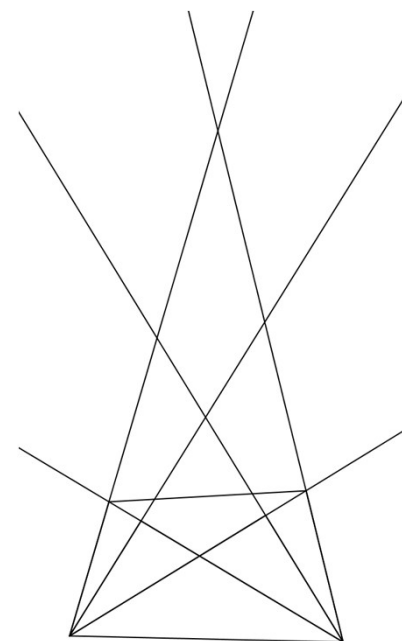
- Dans une vision « lignes » la figure est constituée de lignes qui peuvent se tracer avec des instruments :
 - la règle pour les droites, les demi-droites (qu'on peut prolonger) et les segments,
 - le compas pour les cercles ou les arcs de cercles.
- Les points sont des extrémités de lignes ou des intersections de lignes qu'on a déjà.
- On peut tracer des segments (voire des demi-droites ou des droites) qui relient des points qu'on a déjà.
- On peut obtenir de nouveaux points par intersection de lignes qu'on a prolongées mais pas créer ces points pour obtenir de nouvelles lignes



Regard sur la figure. Une opérationnalisation pour l'enseignement

Vision « lignes » (ou D1)

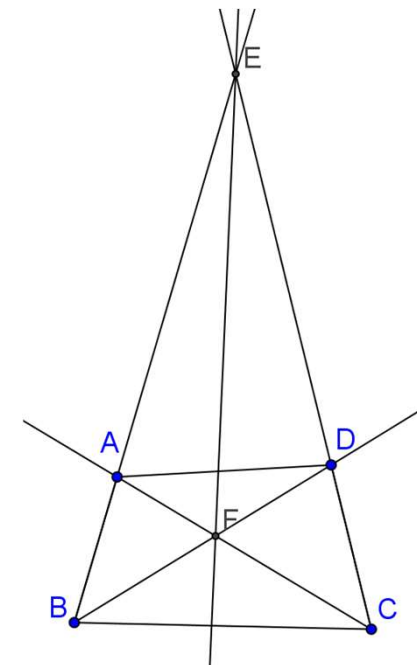
- Dans une vision « lignes » la figure est constituée de lignes qui peuvent se tracer avec des instruments :
 - la règle pour les droites, les demi-droites (qu'on peut prolonger) et les segments,
 - le compas pour les cercles ou les arcs de cercles.
- Les points sont des extrémités de lignes ou des intersections de lignes qu'on a déjà.
- On peut tracer des segments (voire des demi-droites ou des droites) qui relient des points qu'on a déjà.
- On peut obtenir de nouveaux points par intersection de lignes qu'on a prolongées mais pas créer ces points pour obtenir de nouvelles lignes
- Sur l'exemple, on verra plus ou moins de lignes supports des côtés : les lignes qui font sortir de l'enveloppe convexe de la figure initiale sont plus difficiles à considérer.



Regard sur la figure. Une opérationnalisation pour l'enseignement

Vision « points » (ou D0)

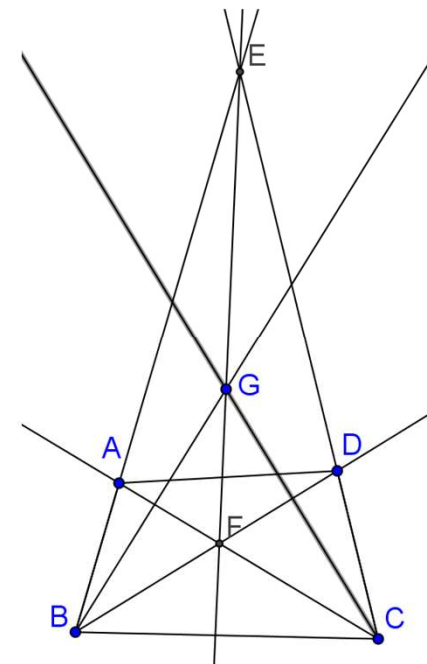
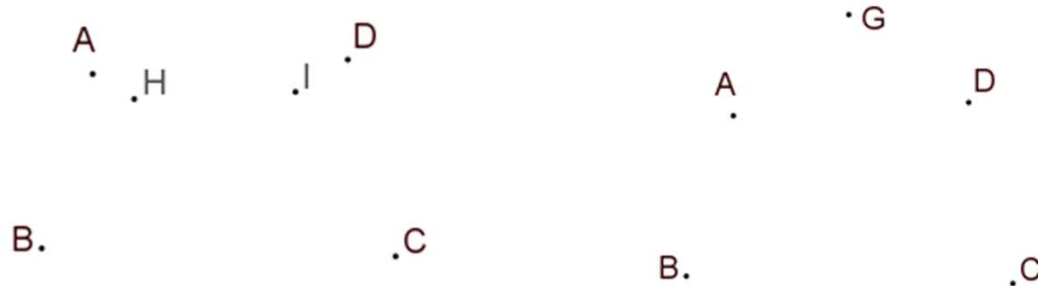
- Sur l'exemple, on peut identifier des points qui permettent de définir les lignes :
 - On peut identifier les 6 points ABCDHI pour définir la figure
 - La donnée de A, B, C, D (le quadrilatère) détermine quatre droites dont les intersections donnent deux nouveaux points E et F et une nouvelle droite (EF).



Regard sur la figure. Une opérationnalisation pour l'enseignement

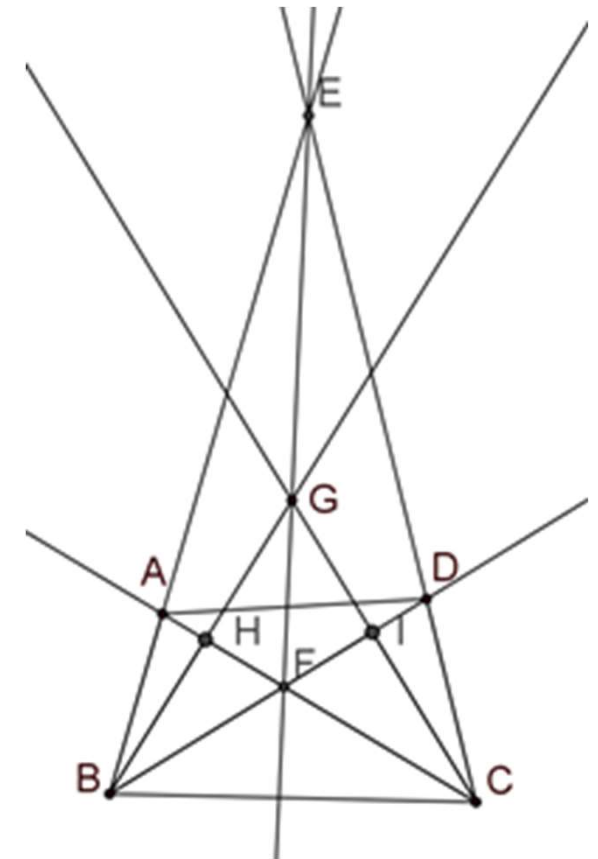
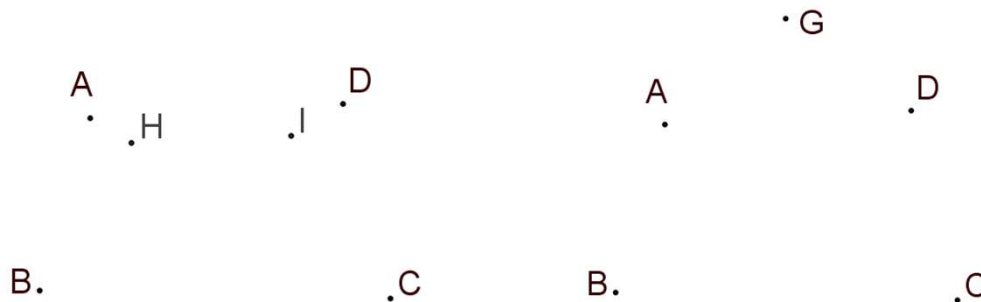
Vision « points » (ou D0)

- Sur l'exemple, on peut identifier des points qui permettent de définir les lignes :
 - On peut identifier les 6 points ABCDHI pour définir la figure
 - La donnée de A, B, C, D (le quadrilatère) détermine quatre droites dont les intersections donnent deux nouveaux points E et F et une nouvelle droite (EF).
 - Le choix de G sur (EF) détermine les petits triangles. Finalement les 5 points ABCDG déterminant la figure.



Regard sur la figure. Une opérationnalisation pour l'enseignement

- Dans une vision « points » de la figure, on peut créer des points par intersection de deux lignes et les points peuvent définir des lignes :
 - il faut deux points (ou un point et une direction) pour déterminer une droite, une demi-droite ;
 - pour un segment, il faut deux points ou un point et une longueur sur une demi-droite déjà tracée ;
 - il faut deux points pour déterminer un cercle (le centre et un point du cercle) ou un point et une longueur.



Regard géométrique sur la figure et instruments permettant de la construire

Géométrie matérielle / géométrie théorique

- Rupture entre géométrie instrumentée et géométrie de la démonstration
- Nature des objets, mode de validation des énoncés
- Cependant les objets de la géométrie théorique ne sont pas sans rapport avec ceux de la géométrie physique.

Géométrie matérielle / géométrie théorique

- Rupture entre géométrie instrumentée et géométrie de la démonstration
- Nature des objets, mode de validation des énoncés
- Cependant les objets de la géométrie théorique ne sont pas sans rapport avec ceux de la géométrie physique.
- Quels liens entretiennent objets et pratiques de chacun de ces rapports à la géométrie ?
- Comment penser une géométrie théorique au collège qui prenne appui sur la géométrie de l'école ?
- Comment traiter l'espace graphique des figures matérielles en dimension 2, interface entre l'espace sensible de la géométrie matérielle et l'espace géométrique théorique ? Source de malentendus mais espace d'expérimentation pour la géométrie théorique.

Géométrie des tracés

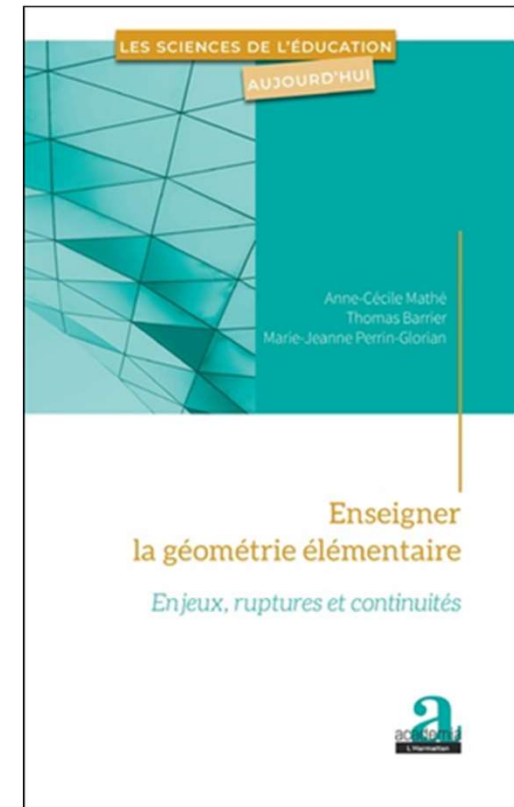
Un moyen de travailler dans la géométrie matérielle avec en perspective la géométrie théorique.

Tracés matériels dans des reproductions et construction de figures.
Les objets géométriques en construction.

Reports de longueurs et d'angles sans mesure.

Mathé, Barrier et Perrin-Glorian (2020).

Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités.



Instruments de tracé

Les instruments de la géométrie des tracés

- Les gabarits et pochoirs sont considérés comme des instruments de tracé pour tracer une figure simple (contour de gabarit).
 - Ce sont des instruments qui gardent une trace de la forme de la figure ou une partie de cette forme. Ils sont spécifiques de cette figure simple.
 - Une première étape au cours du cycle 2 est de passer de ces instruments spécifiques à des instruments universels qui ont chacun une fonction différente :
 - La règle pour tracer des traits droits
 - Le reporteur de longueur : reporter une longueur sur une droite qu'on a déjà
 - Le médiateur de longueur : partager une longueur en deux
 - Le gabarit d'angle : reporter un angle sur une demi-droite
- Le gabarit d'angle est un gabarit de surface déchiré ; il porte une partie de l'information sur la surface. On va donner une place particulière au gabarit d'angle droit qu'on va appeler équerre.
- Le compas comme traceur de cercles.
 - Au cycle 3, le compas qui servait uniquement à tracer des cercles va devenir reporteur de longueur dans le plan : tous les points pris sur le cercle sont à la même distance du centre.
 - Différence entre reporteur de longueur et compas.

Géométrie des tracés et règles d'usage géométrique des instruments

- Une axiomatique pratique sur des instruments de tracé théoriques (non limités)
 - pour poser la règle, il faut disposer de deux points ou d'un segment déjà tracé
 - pour reporter une longueur, il faut une droite déjà tracée et un point sur cette droite, la longueur se reporte sur la droite d'un côté ou de l'autre de ce point
 - le médiateur de segment permet de prendre la moitié d'une longueur
 - pour reporter un angle, il faut une droite et un point sur cette droite (ou une demi-droite) : le sommet du gabarit se pose sur le point et un côté du gabarit se pose sur la droite, l'angle se reporte d'un côté ou de l'autre (4 positions si on a une droite, 2 positions si on a une demi-droite)
 - pour tracer un cercle, il faut un point où poser la pointe du compas (le centre du cercle) et un point où poser la mine (un point du cercle) ou une longueur qui donne l'écartement du compas
 - en faisant glisser un côté d'un gabarit d'angle sur une droite, on trace des traits droits parallèles sur l'autre côté.



Géométrie des tracés et règles d'usage géométrique des instruments

- Une axiomatique pratique sur des instruments de tracé théoriques (non limités)
 - pour poser la règle, il faut disposer de deux points ou d'un segment déjà tracé
 - pour reporter une longueur, il faut une droite déjà tracée et un point sur cette droite, la longueur se reporte sur la droite d'un côté ou de l'autre de ce point
 - le médiateur de segment permet de prendre la moitié d'une longueur
 - pour reporter un angle, il faut une droite et un point sur cette droite (ou une demi-droite) : le sommet du gabarit se pose sur le point et un côté du gabarit se pose sur la droite, l'angle se reporte d'un côté ou de l'autre (4 positions si on a une droite, 2 positions si on a une demi-droite)
 - pour tracer un cercle, il faut un point où poser la pointe du compas (le centre du cercle) et un point où poser la mine (un point du cercle) ou une longueur qui donne l'écartement du compas
 - en faisant glisser un côté d'un gabarit d'angle sur une droite, on trace des traits droits parallèles sur l'autre côté.



Exercer le regard géométrique sur les figures : la restauration de figure au cycle 3

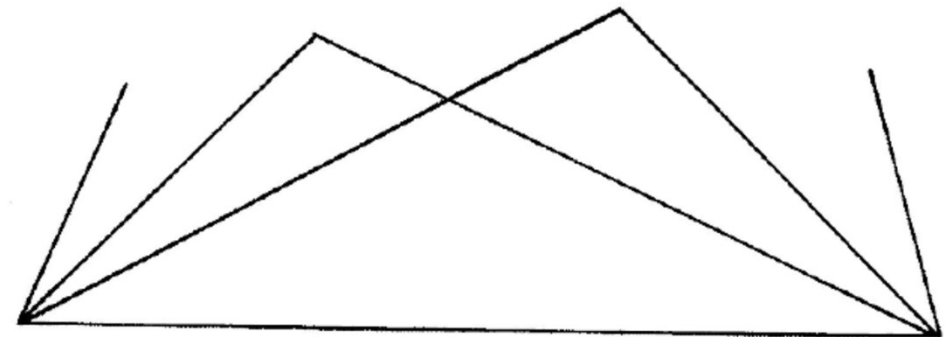
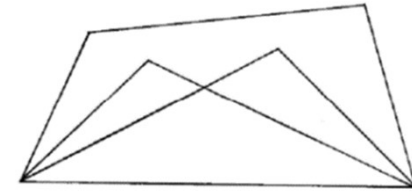
Une restauration de figure est une reproduction de figure. On a

- Un modèle
- **Une amorce** (éventuellement à une taille et dans une orientation différentes de celles du modèle)
- **Des instruments de tracé (mais pas de mesure)** avec éventuellement un coût pour leur usage.
 - La règle et l'équerre sont non graduées. Un autre instrument permet de reporter des longueurs. Le compas sert à tracer des cercles (ou des arcs de cercles).
 - Parmi les instruments il peut y avoir des gabarits.
- **La validation se fait par un calque**

Restauration de figure

Un exemple extrait de la ressource du LÉA
<https://lea-geometrie.etab.ac-lille.fr/>

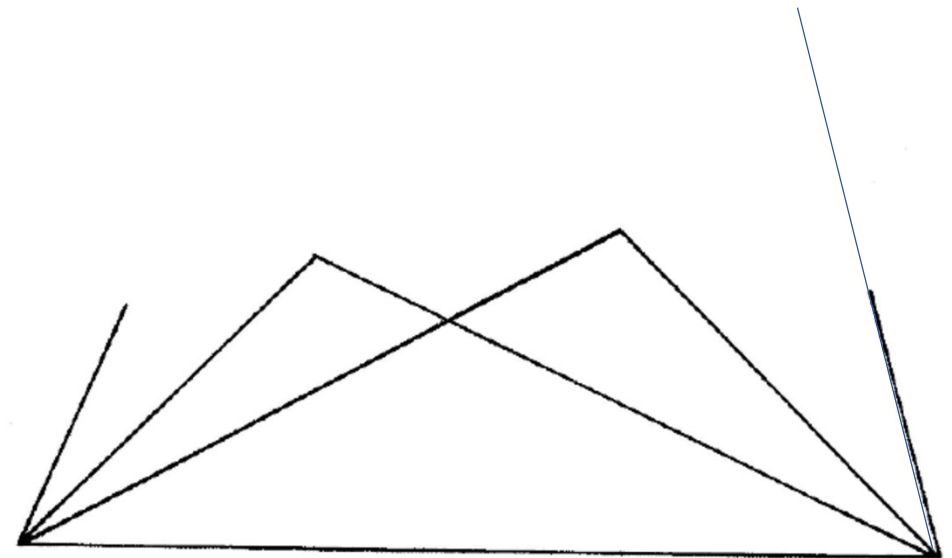
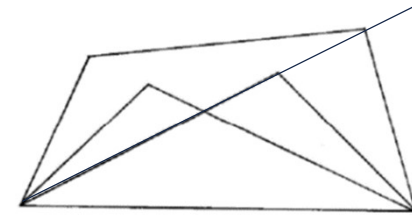
- L'amorce et le modèle sont à des tailles différentes
- Il manque un côté du quadrilatère
- Il manque deux sommets
- Un point peut s'obtenir par l'intersection de deux lignes.



Restauration de figure

Un exemple extrait de la ressource du LÉA
<https://lea-geometrie.etab.ac-lille.fr/>

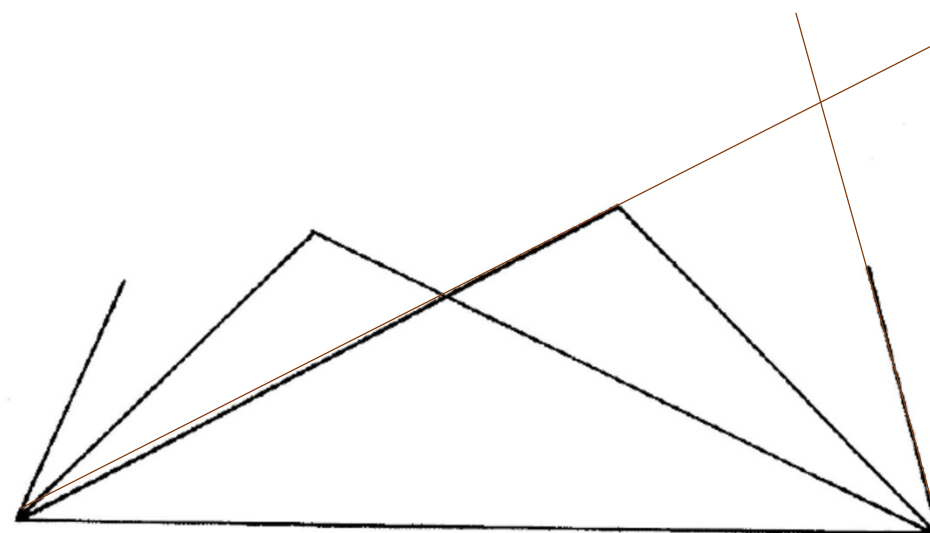
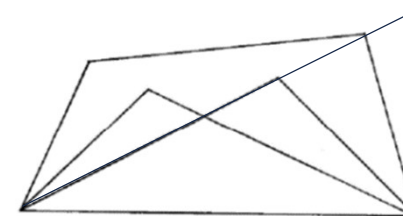
- Il manque un côté du quadrilatère
- Il manque deux sommets
- Un point peut s'obtenir par l'intersection de deux lignes
- On a une des lignes qui passe par le point
- Peut-on trouver sur le modèle une autre ligne qui passe par le point manquant et qu'on pourra construire sur l'amorce ?



Restauration de figure

Un exemple extrait de la ressource du LÉA
<https://lea-geometrie.etab.ac-lille.fr/>

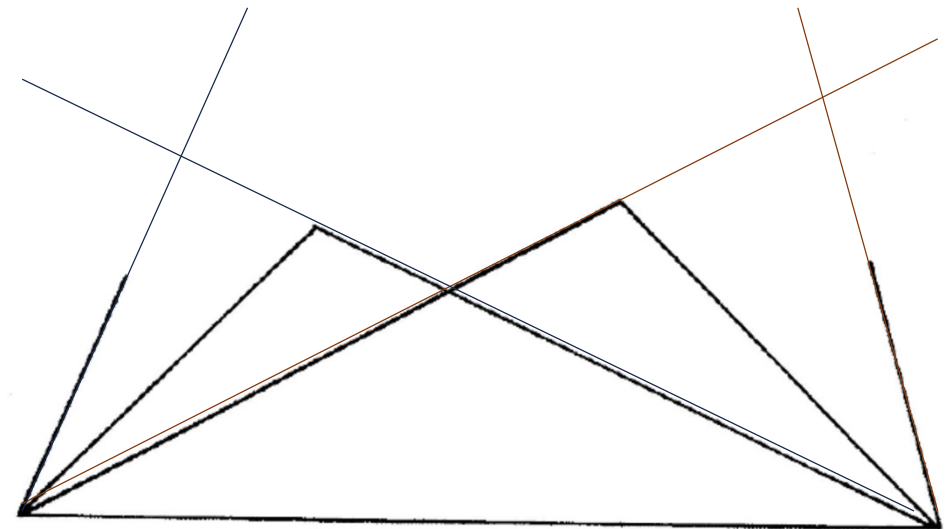
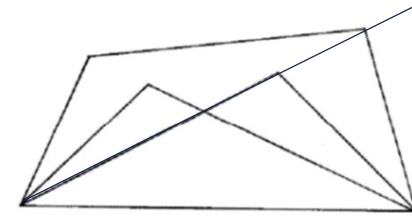
- Il manque un côté du quadrilatère
- Il manque deux sommets
- Un point peut s'obtenir par l'intersection de deux lignes
- On a une des lignes qui passe par le point
- Peut-on trouver sur le modèle une autre ligne qui passe par le point manquant et qu'on pourra construire sur l'amorce ?



Restauration de figure

Un exemple extrait de la ressource du LÉA
<https://lea-geometrie.etab.ac-lille.fr/>

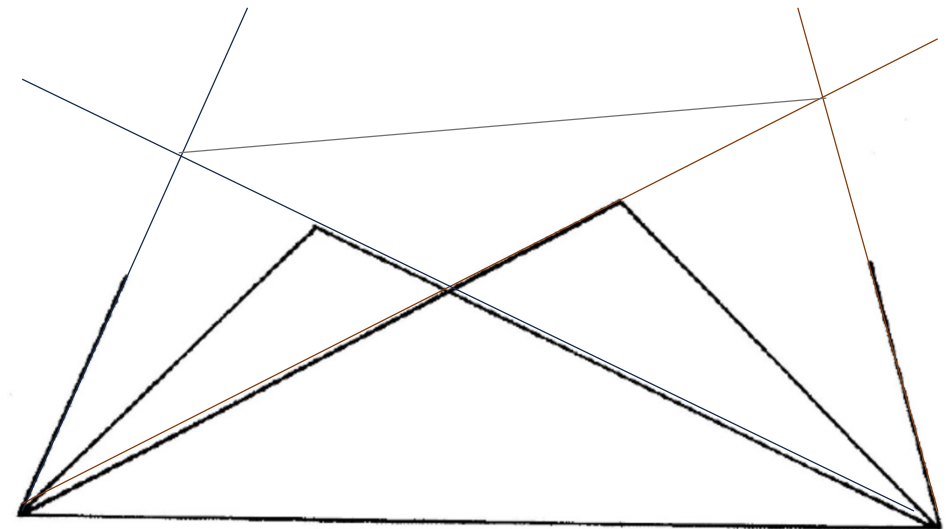
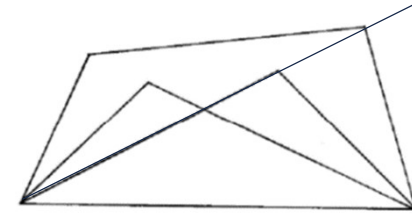
- Il manque un côté du quadrilatère
- Il manque deux sommets
- Un point peut s'obtenir par l'intersection de deux lignes
- On a une des lignes qui passe par le point
- Peut-on trouver sur le modèle une autre ligne qui passe par le point manquant et qu'on pourra construire sur l'amorce ?



Restauration de figure

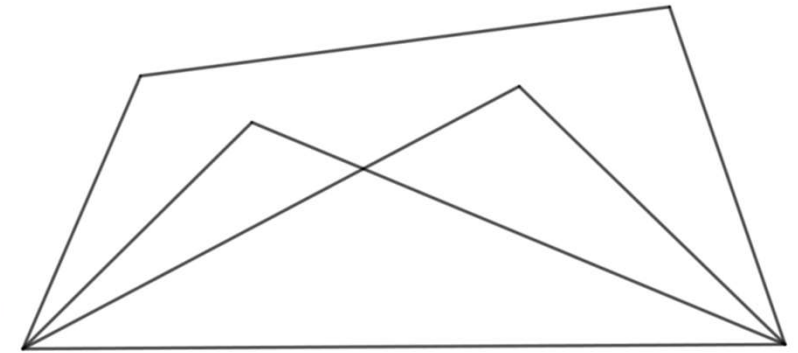
Un exemple extrait de la ressource du LÉA
<https://lea-geometrie.etab.ac-lille.fr/>

- Il manque un côté du quadrilatère
- Il manque deux sommets
- Un point peut s'obtenir par l'intersection de deux lignes
- On a une des lignes qui passe par le point
- Peut-on trouver sur le modèle une autre ligne qui passe par le point manquant et qu'on pourra construire sur l'amorce ?

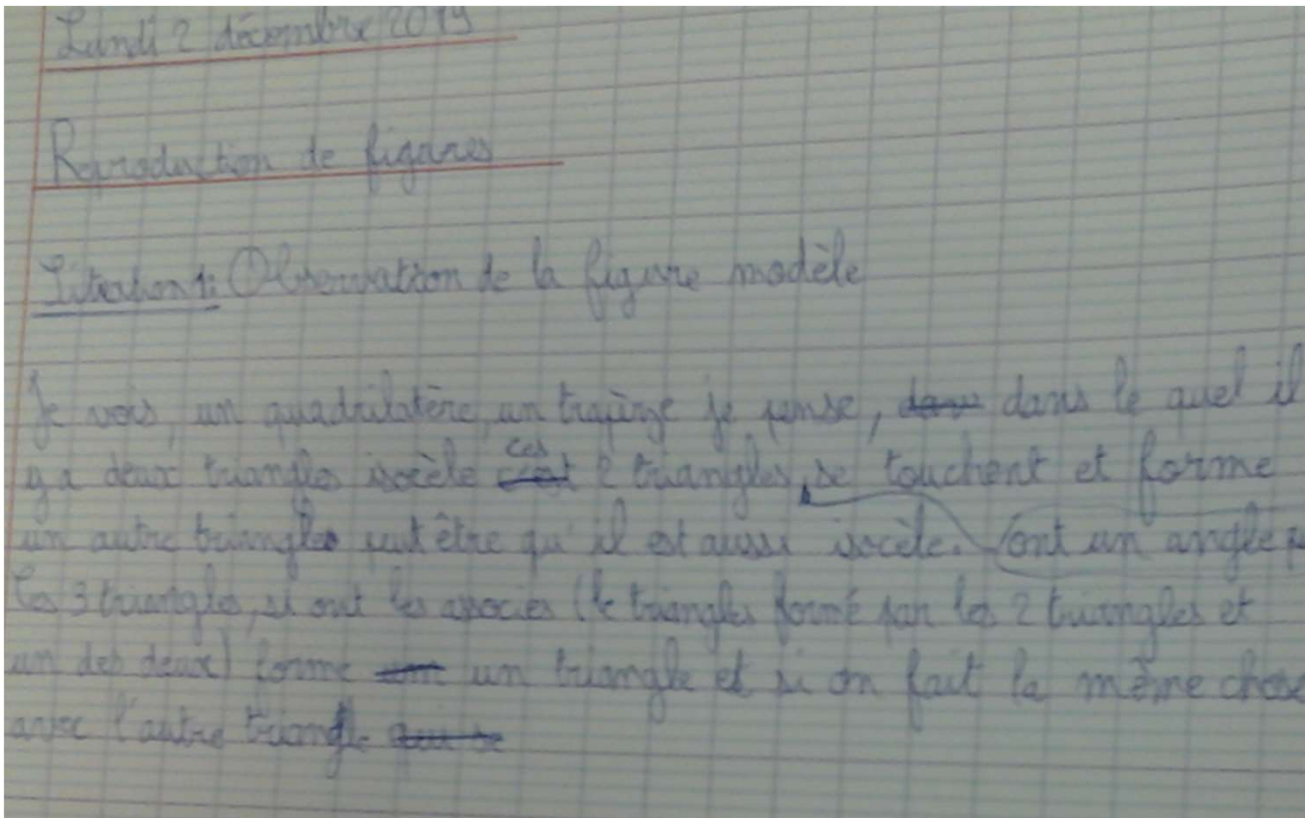


Variante utilisée en 6ème

- **Phase 1.** Décrire la figure. On a obtenu des productions variées et inattendues (orthographe respectée) ...



Je vois un quadrilatère, un trapèze je pense, dans lequel il y a deux triangles isocèle ; ces deux triangles ont un angle qui se touchent et forme un autre triangle peut-être qu'il est aussi isocèle. Ces trois triangles si on les associe (le triangle formé par les deux triangles et un des deux) forme un triangle et si on fait la même chose avec l'autre triangle.



Sur la figure je vois au milieu une figure qui se croise avec et qui non pas le même angle. La figure n'est pas droit car je crois que ses un polygone. On dirait un neu papillon. Cette figure na pas d'angle droit.

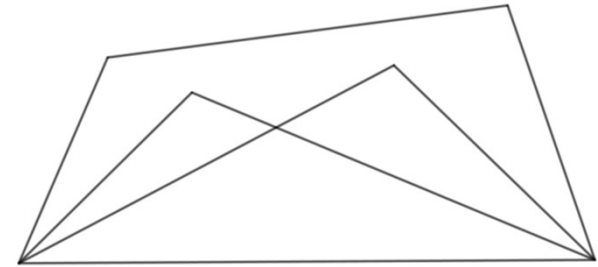
Sur la figure je vois au milieu une figure qui se croise et qui non pas le même angle. La figure n'est pas droit car je crois que ses un polygone. On dirait un neu papillon. Cette figure na pas d'angle droit.

Je vois une sorte de rectangle avec des cônes à l'intérieur ; les pointes des cônes se touche ; il y a un cône plus maigre que l'autre ; entre les deux pointes de cônes au milieu ça forme un triangle.

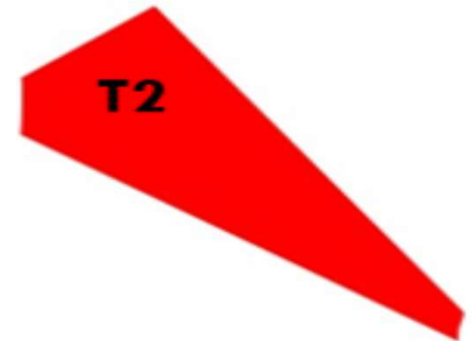
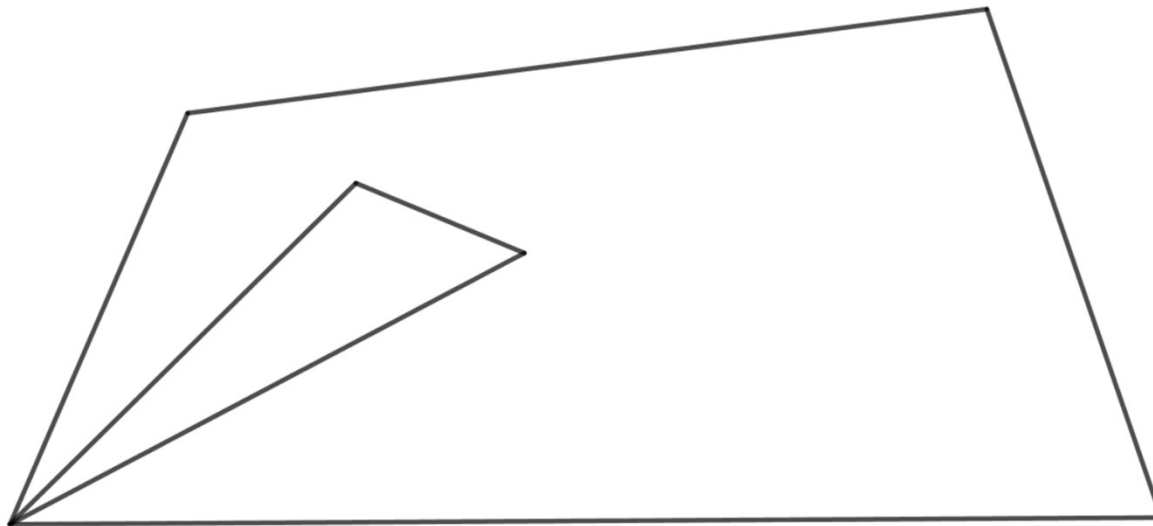
Je vois une sorte de rectangle avec des cônes à l'intérieur. Les pointes des cônes se touchent et il y a un cône plus maigre que l'autre. Entre les deux pointes de cônes au milieu ça forme un triangle.

Phase 2

Compléter la figure ci-dessous pour reconstituer la figure modèle.
Matériel : règle non graduée, gabarit de l'autre triangle avec les coins coupés. **Ici l'amorce est à la même taille que le modèle**



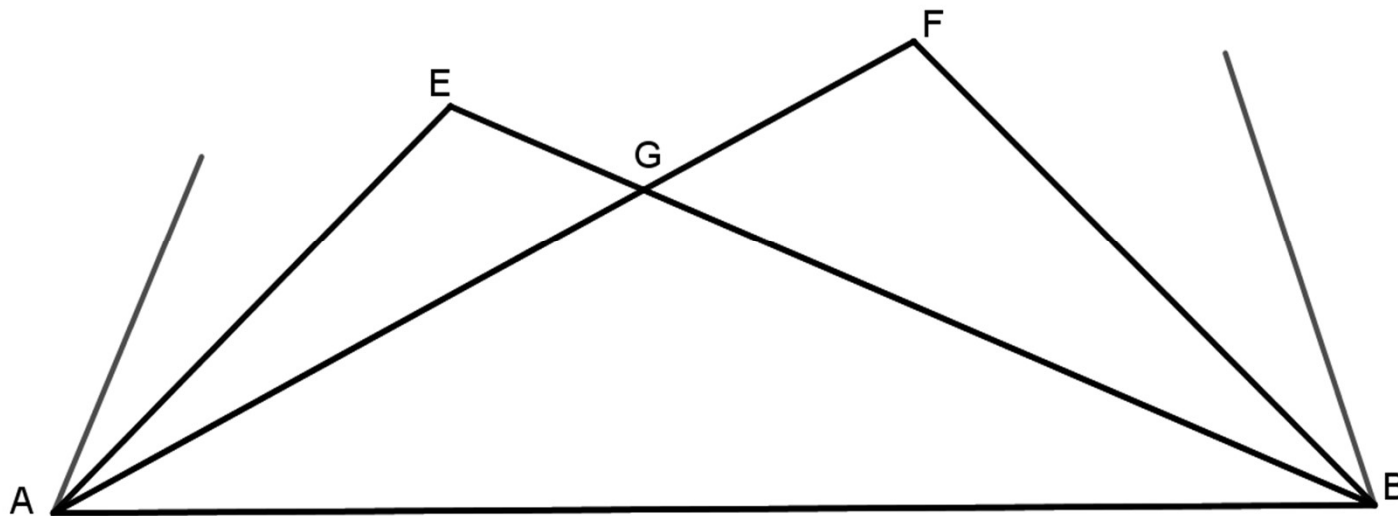
On peut profiter de la mise en commun pour remarquer que donner des noms faciliterait la communication et voir que nommer les sommets permet aussi de nommer les segments et les droites (objectif de 6ème).



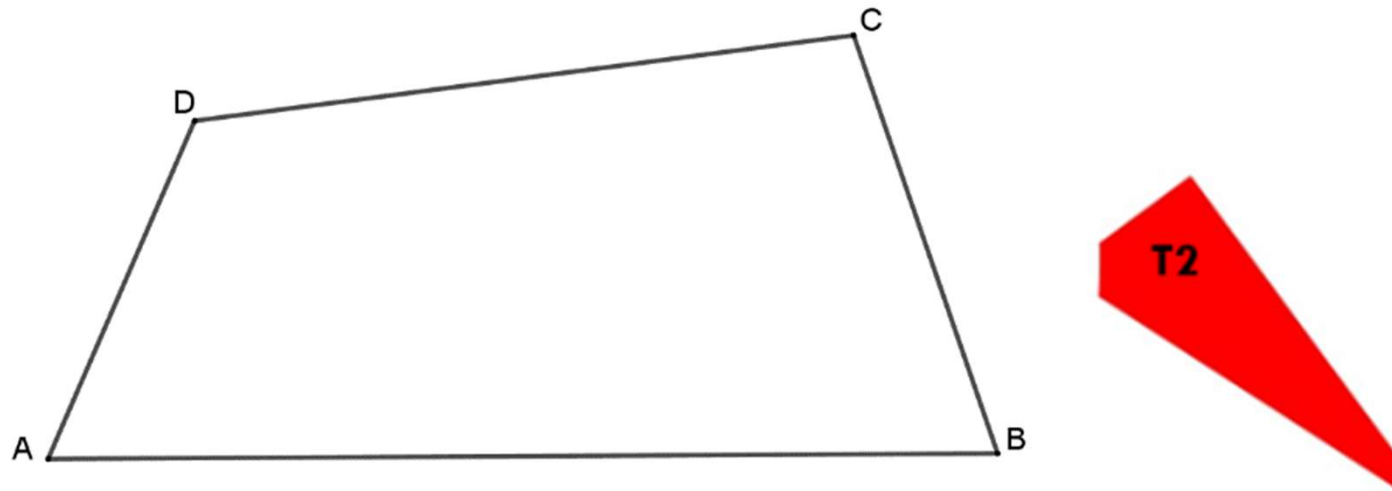
Phase 3

Reproduction à une taille plus grande que le modèle

Si on a introduit des notations à la phase 2, on peut les utiliser à la phase 3 sur l'amorce pour que tout le monde ait les mêmes.



Variante possible pour la phase 4 : réinvestissement des diagonales et report de longueur pour T1 (modèle à la même taille)



Cette variante pour la 6ème a été conçue pour limiter le travail matériel de l'enseignant : on n'a qu'un gabarit à fabriquer.

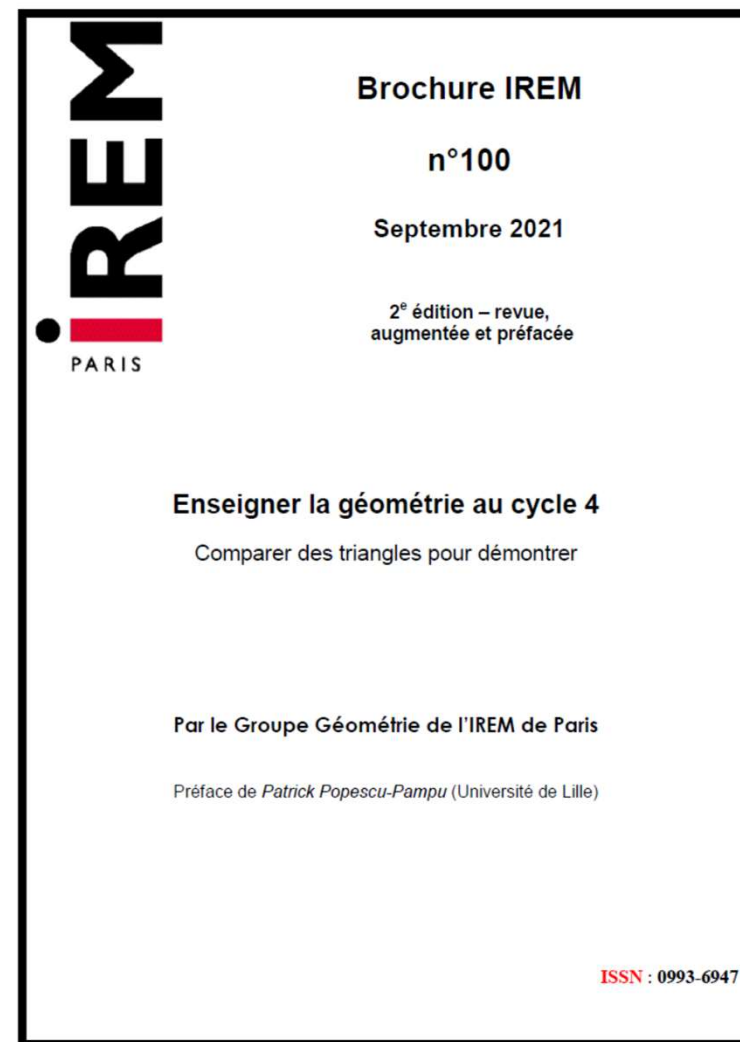
Restauration de figure et regard sur la figure

- La restauration de figure est un moyen de faire évoluer le regard naturel qu'on porte sur un dessin vers le regard qu'on porte sur une figure géométrique
- La présence de l'amorce oblige dans un premier temps à identifier ce qui est déjà donné sur le modèle et ce qui manque, ce qu'on cherche à tracer.
- Il faut relier ce qui manque à ce qu'on a, éventuellement en complétant le modèle par des tracés supplémentaires qu'on ne voyait pas au départ, comme la diagonale du quadrilatère mais que la recherche du lien guidée par les nécessités imposées par les instruments, va permettre de voir.
- Les tracés avec les instruments sont liés à des propriétés géométriques de la figure.
- Ici il y a un lien à faire entre le langage des instruments (langage technique géométrique) : je prolonge le côté du triangle jusqu'au sommet du quadrilatère et le langage géométrique proprement dit : le sommet du quadrilatère est aligné avec le côté du triangle, le sommet du triangle est sur diagonale du quadrilatère...

Le regard sur la figure selon les outils de démonstration au cycle 4

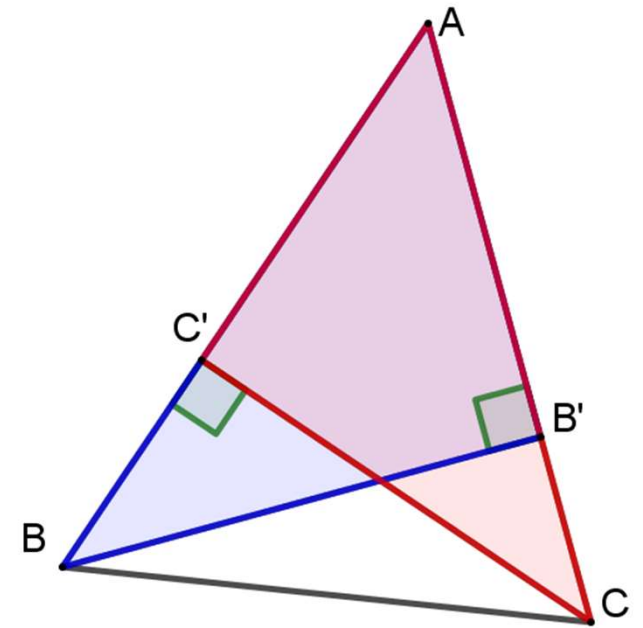
Le groupe de géométrie de l'IREM de Paris

- Si l'on excepte la période 1969-1985, deux grandes axiomatiques ont fondé l'enseignement secondaire
 - Axiomatique d'Euclide revue par des apports divers jusqu'en 1969.
 - Une axiomatique appuyée sur les transformations en admettant les propriétés de la symétrie orthogonale, explicitée par Cousin-Fauconnet en 1995.
- L'axiomatique sous-jacente qui assure la cohérence des programmes du collège a un effet sur le regard qu'il est nécessaire de porter sur les figures géométriques pour démontrer.



Un exemple : triangle dont deux hauteurs sont égales

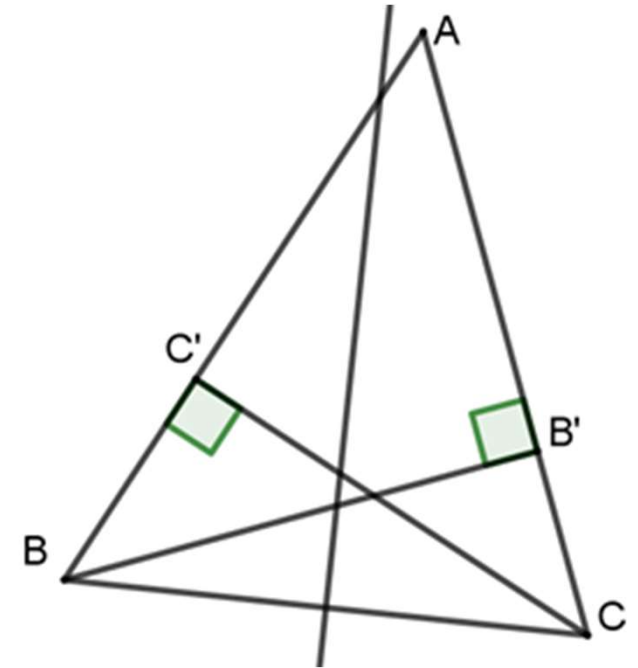
- Démonstrations avec les cas d'égalité
 - Triangles ABB' et ACC' : cas ACA conclusion $AB = AC$.
 - Triangles BCC' et BCB' : cas spécifique au triangle rectangle. Conclusion : égalité des angles en B et C.
- Difficultés de visualisation des objets :
 - triangles qui se chevauchent mais
 - compatible avec une vision surface : les côtés sont des bords de la surface et les angles des coins
 - Pas d'élément à ajouter à la figure



Un exemple : triangle dont deux hauteurs sont égales

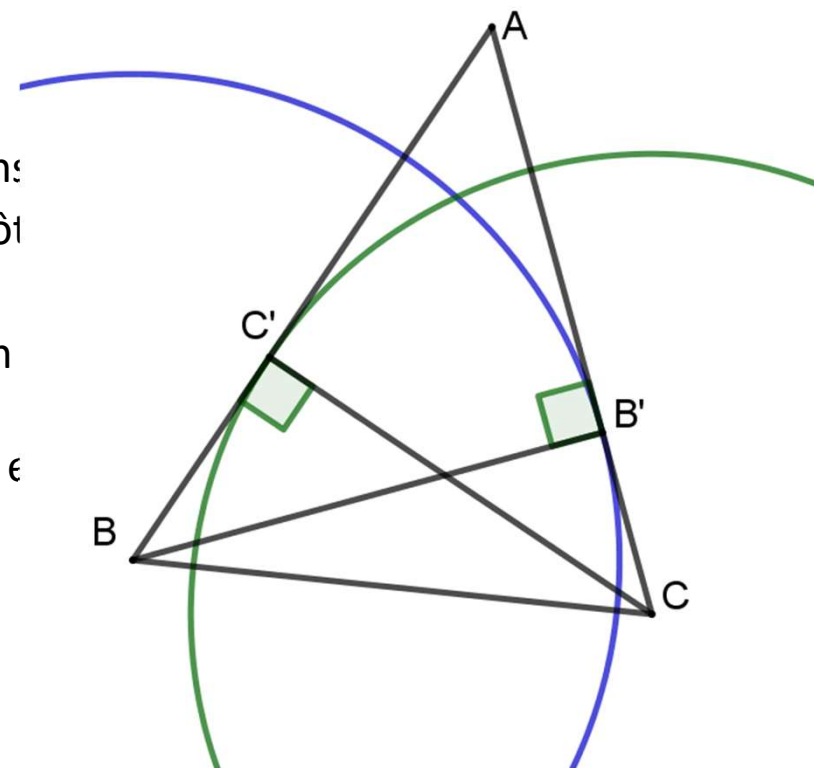
- Démonstration par la symétrie axiale

- On peut conjecturer que la médiatrice (d) de [BC] est axe de symétrie de la figure.
- Il faut montrer que B' et C' sont symétriques par rapport à (d) et en déduire que A ∈ (d) (et non le lire sur la figure !)
- On a intérêt à faire une figure fautive ou à ne pas tracer la médiatrice !



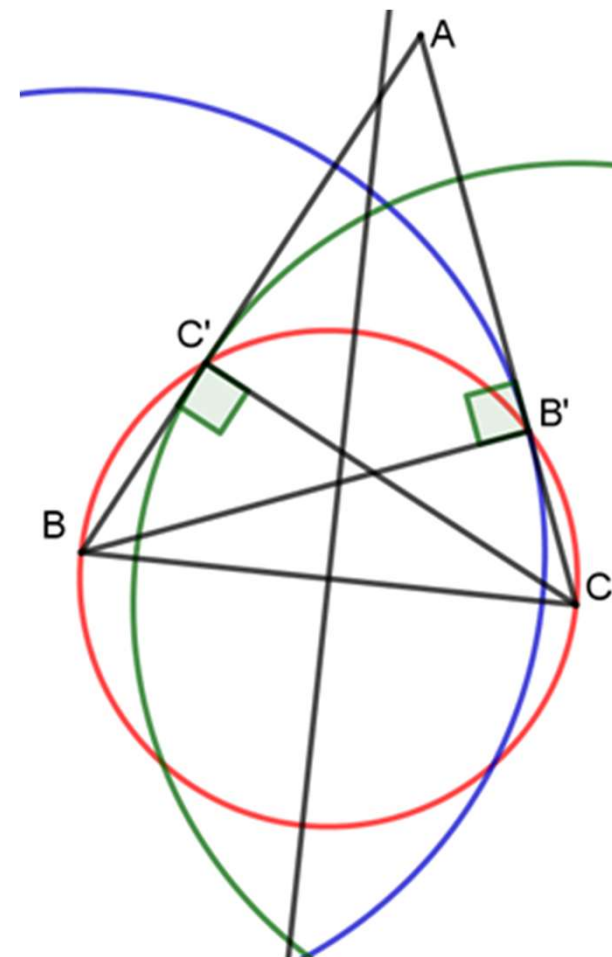
Un exemple : triangle dont deux hauteurs sont égales

- Démonstration par la symétrie axiale
 - la médiatrice (d) de [BC] est axe de symétrie de la figure.
 - Il faut montrer que B' et C' sont symétriques par rapport à (d) sans
 - Voir B' et C' comme intersections de deux lignes autres que les côtés
 - Comment trouver ces lignes ?
 - Les hauteurs sont égales donc B' et C' sont respectivement sur un de même rayon.
 - Le cercle bleu centré en B a pour image le cercle vert centré en C



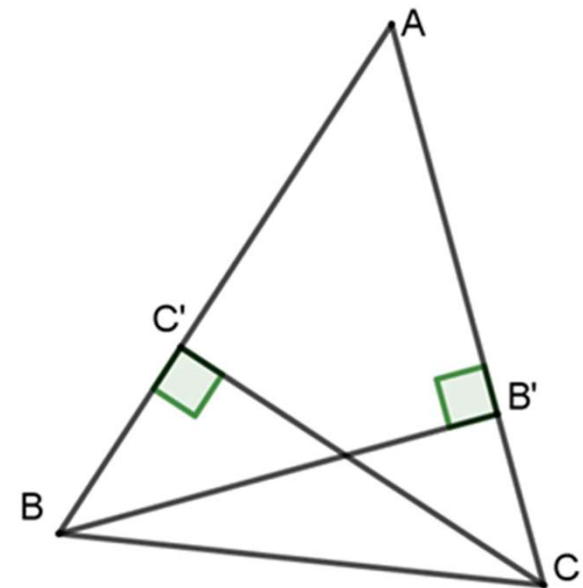
Un exemple : triangle dont deux hauteurs sont égales

- Démonstration par la symétrie axiale
 - la médiatrice (d) de [BC] est axe de symétrie de la figure.
 - Il faut montrer que B' et C' sont symétriques par rapport à (d) sans utiliser que $A \in (d)$.
 - Voir B' et C' comme intersection de deux lignes autres que les côtés.
 - Comment trouver ces lignes ?
 - Les hauteurs sont égales donc B' et C' sont respectivement sur un cercle bleu centré en B ou vert centré en C de même rayon.
 - Le cercle bleu centré en B a pour image le cercle vert centré en C et réciproquement.
 - B' et C' sont tous les deux sur le cercle rouge de diamètre [BC] (hors programmes actuels). Choix des points d'intersection...
 - Le cercle de diamètre BC est invariant dans la symétrie.



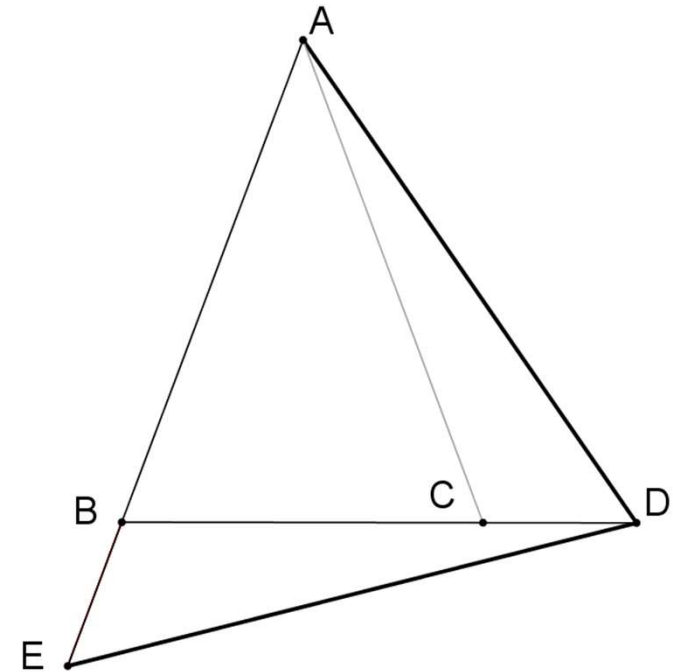
Un exemple : triangle dont deux hauteurs sont égales

- Une autre démonstration très simple !
- Le calcul de l'aire de ABC de deux manières !
- $BB' \times AC = CC' \times AB$



La transformation n'est pas toujours évidente

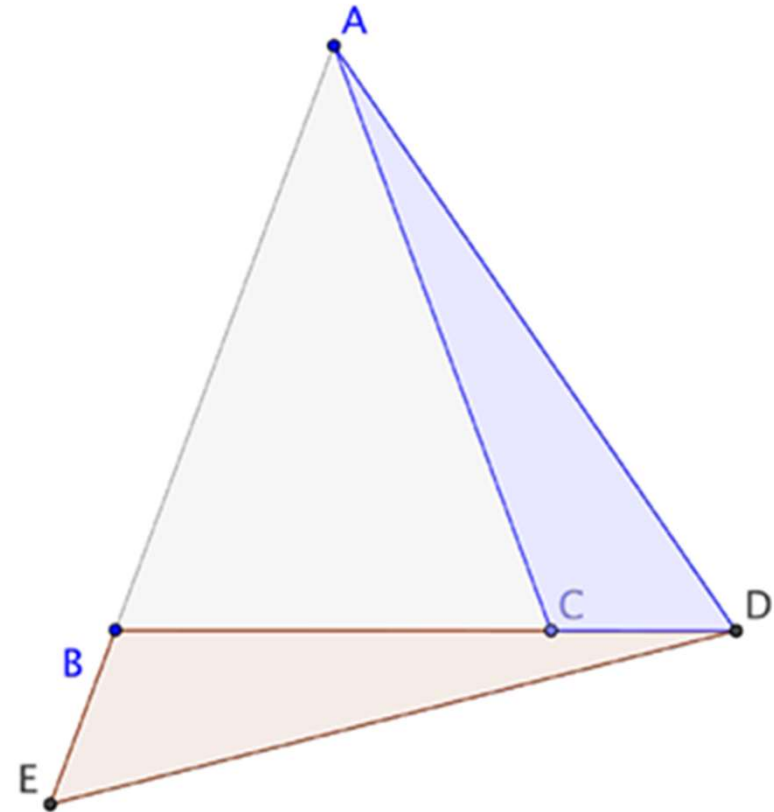
- Sur la figure
- $AB = AC$; $AB > BC$; $CD = BE = AB - BC$.
- Que peut-on-dire du triangle ADE ?



La transformation n'est pas toujours évidente

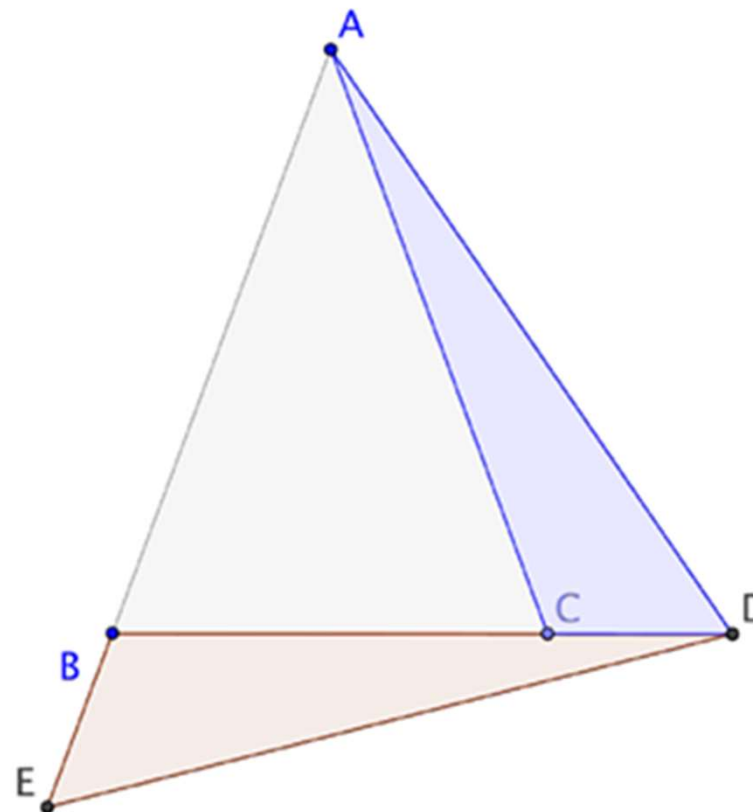
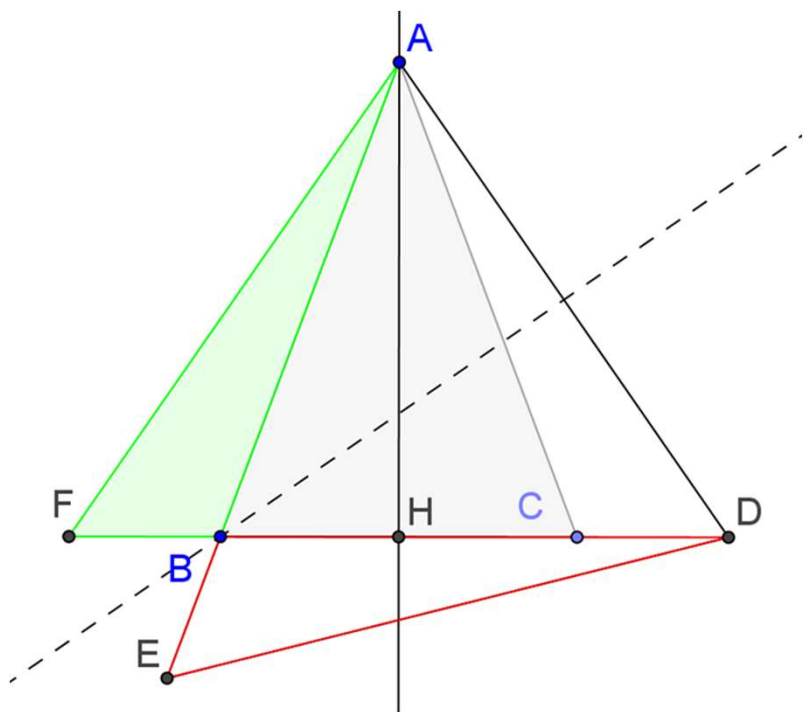
- Sur la figure
- $AB = AC$; $AB > BC$; $CD = BE = AB - BC$.
- Que peut-on-dire du triangle ADE ?

- Avec les cas d'isométrie



La transformation n'est pas toujours évidente

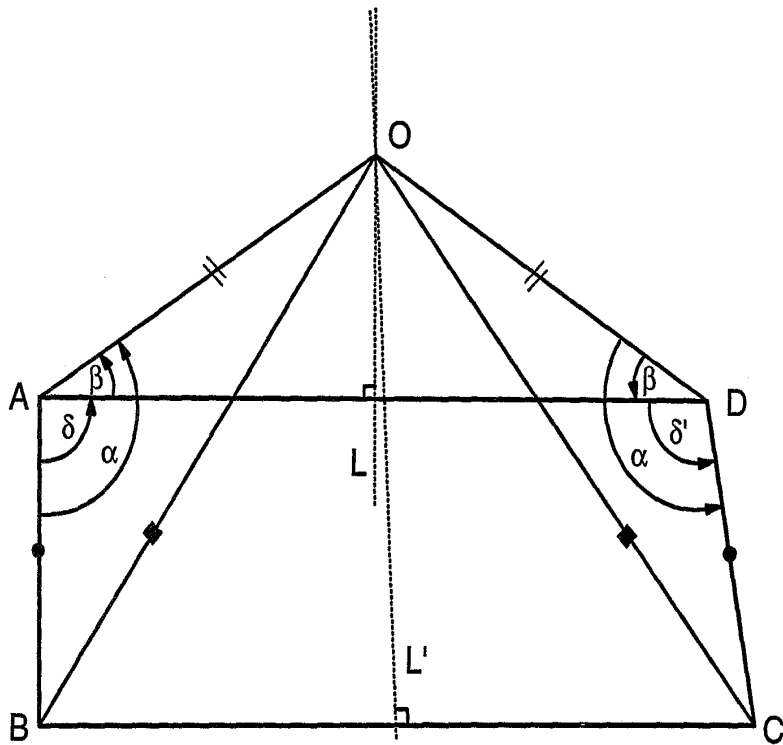
- Traitée au collège dans les années 2000 par deux symétries successives



Texte et figure

Une figure fournie peut être trompeuse

Peut-on raisonner juste sur une figure fausse ?
 Extrait de « La bosse des maths » de S. Dehaene p. 273



Démonstration : Soit un quadrilatère ABCD tel que les côtés AB et CD soient égaux et que l'angle $\delta = \angle BAD$ soit droit. L'angle $\delta' = \angle ADC$ est arbitraire. Nous allons pourtant prouver qu'il égale l'angle droit δ .

Soit L la médiatrice du segment AD et L' celle du segment BC. Soit O l'intersection de L et L'. Par construction, O est équidistant des points A et D ($OA = OD$) et également des points B et C ($OB = OC$). Comme $AB = CD$, les triangles OAB et ODC ont des côtés égaux et sont donc semblables. Donc leurs angles sont égaux :

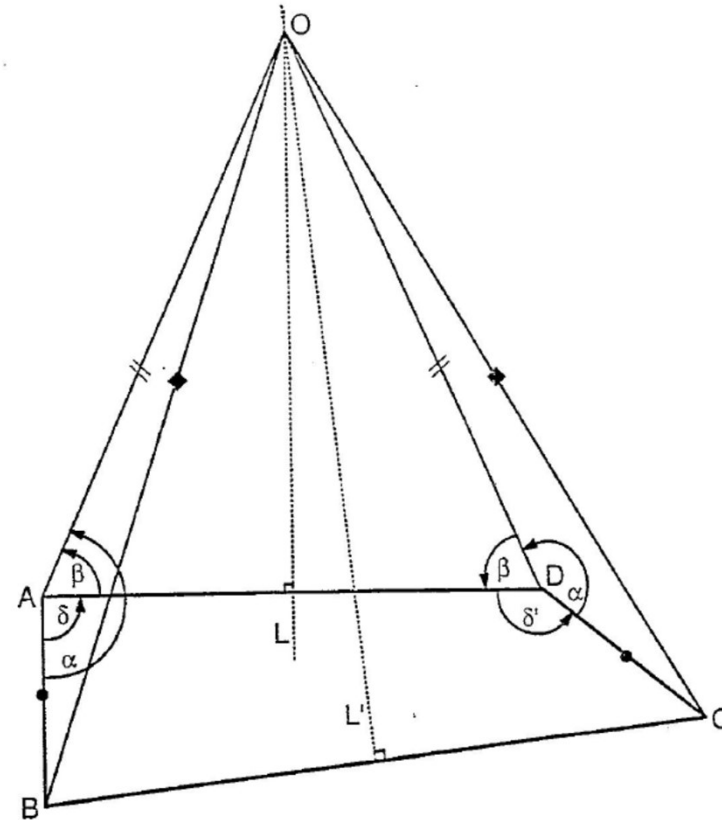
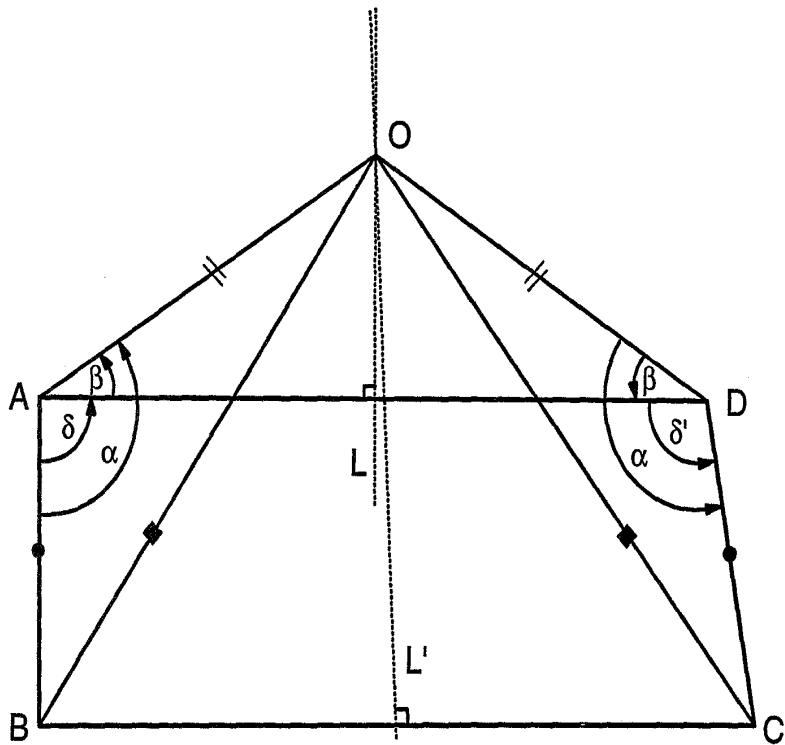
$$\angle BAO = \angle ODC = \alpha.$$

Le triangle OAD étant isocèle, on a également $\angle DAO = \angle ODA = \beta$.

D'où nous déduisons $\delta = \angle BAD = \angle BAO - \angle DAO = \alpha - \beta$; et $\delta' = \angle ADC = \angle ODC - \angle ODA = \alpha - \beta$; soit $\delta = \delta'$. Ce qu'il fallait démontrer.

Où est l'erreur ? Réponse page 295 !

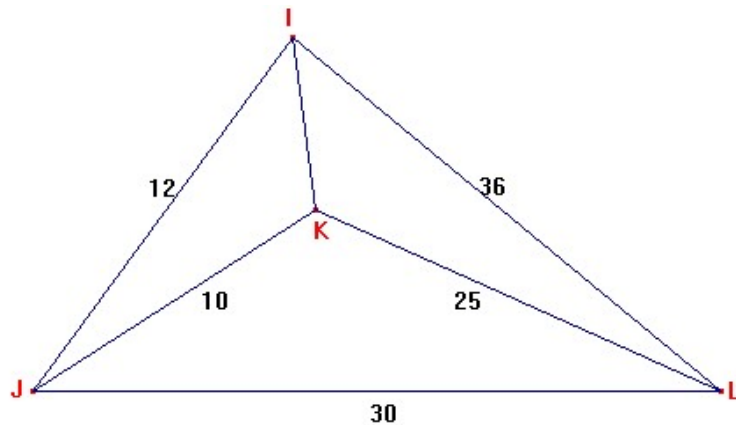
Peut-on raisonner juste sur une figure fausse ?
 Extrait de « La bosse des maths » de S. Dehaene p. 273



Reconnaître les éléments homologues

Exemple de texte proposé dans des classes de 2^{nde} (années 2000)

- Utiliser les informations données sur la figure ci-dessous pour démontrer que les triangles IJL et JKL sont de même forme :

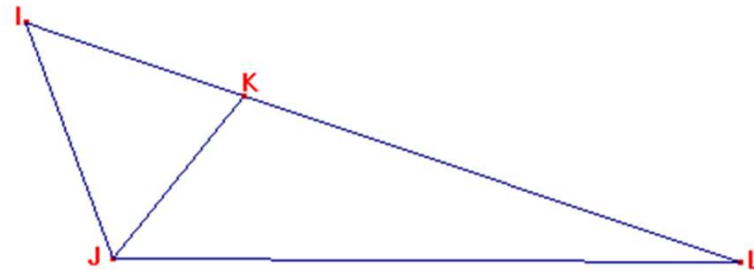
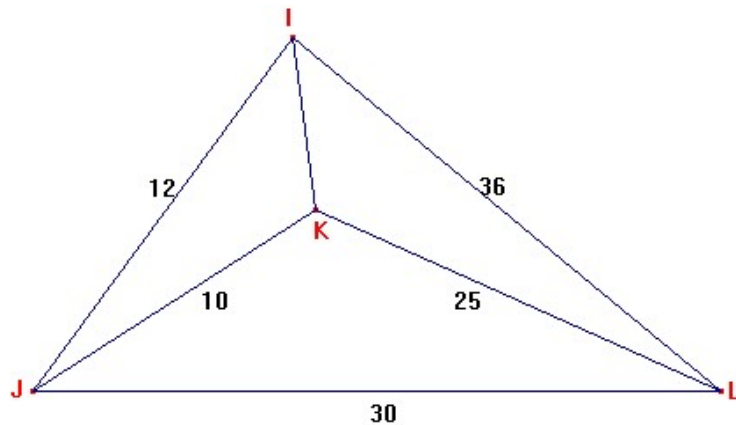


- Pour calculer les rapports entre les longueurs des côtés, il faut les ranger dans l'ordre : $IJ < JL < LI$; $JK < KL < LJ$, ce qui nous donne les sommets homologues. IJL et JKL
- Le calcul montre que ces rapports sont égaux donc les triangles sont semblables.

Reconnaître les éléments homologues

Exemple de texte proposé dans des classes de 2^{nde} (années 2000)

- Utiliser les informations données sur la figure ci-dessous pour démontrer que les triangles IJL et JKL sont de même forme :



- Pour calculer les rapports entre les longueurs des côtés, il faut les ranger dans l'ordre : $IJ < JL < LI$; $JK < KL < LJ$, ce qui nous donne les sommets homologues. IJL et JKL
- Le calcul montre que ces rapports sont égaux donc les triangles sont semblables.
- La consultation des éléments homologues nous dit que les angles en L sont égaux, ce qui veut dire que K est sur IL. La figure fournie est complètement fautive. On devrait avoir

Conclusion

- L'analyse de la figure en tenant compte de ce que l'on sait (les hypothèses et les théorèmes qui permettent de relier ce que l'on sait à ce que l'on cherche) joue un rôle important dans la recherche de la solution d'un problème de démonstration.
- Dans cette analyse, des propriétés géométriques se donnent à voir par des caractéristiques graphiques qu'on peut percevoir à l'œil ou vérifier avec des instruments.
- Les instruments (matériels ou logiciels) permettent de produire des caractéristiques graphiques qui représentent des propriétés géométriques.
- Dans une construction comme dans une démonstration, il faut faire apparaître des objets représentés par des tracés qui n'apparaissent pas au premier coup d'œil et qui viennent enrichir la figure.
- La restauration de figure, en demandant de reconstruire une figure fournie oblige à analyser cette figure pour rechercher des caractéristiques graphiques qu'on peut vérifier puis reproduire avec les instruments. Le fait de le faire à partir d'une amorce oblige à rechercher des liens entre cette amorce et le reste de la figure.
- Mais, dans la géométrie de la démonstration, il y a autre point important que je n'ai pas abordé, c'est le langage.

Prolonger les situations de restauration de figures par des situations de formulation où il faut expliquer comment reconstruire une figure à quelqu'un qui ne l'a pas vue

- Reconstruire une figure puis écrire un programme de (re)construction.
- Pour écrire un programme, il faut
 - Identifier les objets géométriques
 - Identifier des relations entre des objets géométriques
 - Distinguer ce qui est défini de ce qui ne l'est pas encore et qu'il faut définir à partir de ce que l'on a.
 - Changer de point de vue sur les objets.
- Intermédiaire possible : le langage technique géométrique

Bibliographie

Ouvrage : Mathé, A.C., Barrier, T. & Perrin-Glorian, M.J. (2020). Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités. Bruxelles : Academia. Version papier ou électronique.

<https://www.editions-academia.be/livre-enseigner-la-geometrie-elementaire-enjeux-ruptures-et-continuites-anne-cecile-mathe-thomas-barrier-marie-jeanne-perrin-glorian-9782806105004-65039.html>

La ressource du LÉA Valenciennes Denain : <https://lea-geometrie.etab.ac-lille.fr/>

La brochure de l'IREM de Paris : Enseigner la géométrie au cycle 4. Comparer des triangles pour démontrer.

<http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS20011.pdf>

Chapitre d'ouvrage à venir

- Mathé A.-C. et Perrin-Glorian M.-J. (à paraître dans un ouvrage chez ISTE) La géométrie des tracés, lien possible entre le dessin géométrique et la géométrie d'Euclide ?

Des articles de Duval

- Duval R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. Repères-IREM, N°17. p. 121-138.
- Duval R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Annales de didactique et de sciences cognitives n° 10, p. 5 – 53.

Des articles issus du travail du « groupe de Lille » consultables en ligne (ordre chronologique)

- Duval R. et Godin M. (2005) : Les changements de regard nécessaires sur les figures, Grand N n°76, 7-27.
- Offre, B., Perrin-Glorian, M.J. & Verbaere O. (2006) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, Grand N n°77, 7-34, et Petit x n°72, 6-39.
- Keskesa, B., Perrin-Glorian M.J. & Delplace J.R. (2007) Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. Grand N, n°79, 33-60.
- Godin M., Perrin M.-J. (2009). De la restauration de figure à la rédaction d'un programme de construction. Le problème de l'élève, le problème du maître. *Actes du 35ème colloque la Copirelem, Bordeaux – Bombannes, 2008.*
- **Perrin-Glorian M.J. (2012).** Vers une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie plane du CP à la fin du collège ? L'exemple de la symétrie axiale. Bulletin de l'APMEP, 499, 325-332, disponible en version plus complète sur http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Perrin_Glorian_2.pdf
- **Perrin-Glorian M.J., Mathé A.-C., Leclercq R. (2013).** Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. Repères-IREM, 90, 5-41.
- Mangiante-Orsola, C., & Perrin-Glorian, M.-J. (2014). Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des maîtres. Grand N, 94, 47–79.
- Perrin-Glorian, M.-J., & Godin, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. Math-École, 222, 26–36. https://www.revue-mathematiques.ch/files/4014/6288/8780/ME222_PerrinGlorian.pdf
- **Perrin-Glorian M.-J. (2018).** Géométrie au cycle 3 : de la reproduction de figures avec des gabarits aux constructions à la règle et au compas. Colloque de Poitiers Mathématiques en Cycle 3. p. 112-121 <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PO/IPO18008/IPO18008.pdf>

Dans le même esprit

- Bulf, C., Mathé, A.C. & Mithalal, J. (2014). Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique. Spirale – Revue de Recherches en Éducation, 54, 29-48.
- Bulf C. & Celi V. (2015). Une étude diachronique de problèmes de reproduction de figures géométriques au cycle 3. Grand N, 96, 5-33.
- Bulf C. et Celi V. (2016). Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire. Une transition clé : du gabarit au compas. Grand N, 97, 21-58.
- Beuset R. et Duroisin N. (2021) Développement de la visualisation non iconique à l'école primaire : mise à l'épreuve d'un dispositif d'enseignement et d'apprentissage. Petit x n°115, p. 65-92.
- En 6ème : Brochure en cours de l'IREM de Bordeaux : <https://math-interactions.u-bordeaux.fr/IREM>
- La plupart des articles de Grand N, Petit x et Repères-IREM sont disponibles en ligne.

Plus spécifiquement sur le langage

- Mathé Anne-Cécile, Maillot Valérie, Ribennes Julien (2021). Enjeux langagiers, situations de formulation et de validation en géométrie. Un exemple de travail autour du cercle en CE2. Grand N n°108.
- Bulf C., Celi V. et al. (2021) Tracé du cercle et circulation des discours. Première partie : Approche didactiques des (inter)actions langagières et matérielles. Petit x n° 114, p. 3-37.
- Beaugrand C. Mendonça Dias C. et al. (2021). Tracé du cercle et circulation des discours. Deuxième partie : Approche linguistique des interactions verbales. Petit x n° 114, p. 39-67.
- Joris Mithalal-Doze (MCF Didactique des mathématiques-S2HEP-Université Lyon 1-INSPE de Lyon) et Denis Roche (Enseignant CM2-Référent mathématique de circonscription) - Les programmes de construction : conjuguer les aspects conceptuels, graphiques et langagiers en géométrie au cycle 3... Où l'on verra que les mathématiciens ne sont pas analphabètes ! Présentation à télécharger sur le site des mercredis de l'APMEP.
<https://www.apmep.fr/Les-mercredis-de-l-APMEP-Un-espace>

Merci de votre attention