

# Géométrie plane au collège.

Du contrôle des figures par les instruments au contrôle par des énoncés

Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Professeur émérite à l'université d'Artois

Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR)

Universités de Paris, Cergy, Créteil, Lille, Rouen



UNIVERSITÉ D'ARTOIS

**LDAR**



**LABORATOIRE  
DE DIDACTIQUE  
ANDRÉ REVUZ**

RECHERCHE  
EN DIDACTIQUE  
DES SCIENCES



UNIVERSITÉ  
PARIS-EST CRÉTEIL  
VAL DE MARNE



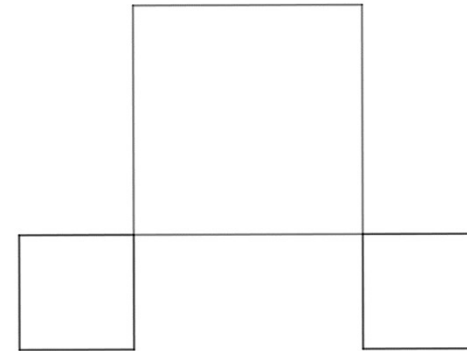
# Plan

- Une évaluation de début de 6ème
- Regarder un dessin comme une figure de géométrie en lien avec la démonstration
- La géométrie des tracés : lien entre les instruments pour tracer des figures et les concepts géométriques
- La restauration de figures, situation pour faire évoluer le regard sur les figures
- Le langage géométrique
- Des outils pour la démonstration au collège
- L'exemple de la symétrie orthogonale

# Une évaluation diagnostic en début de 6ème

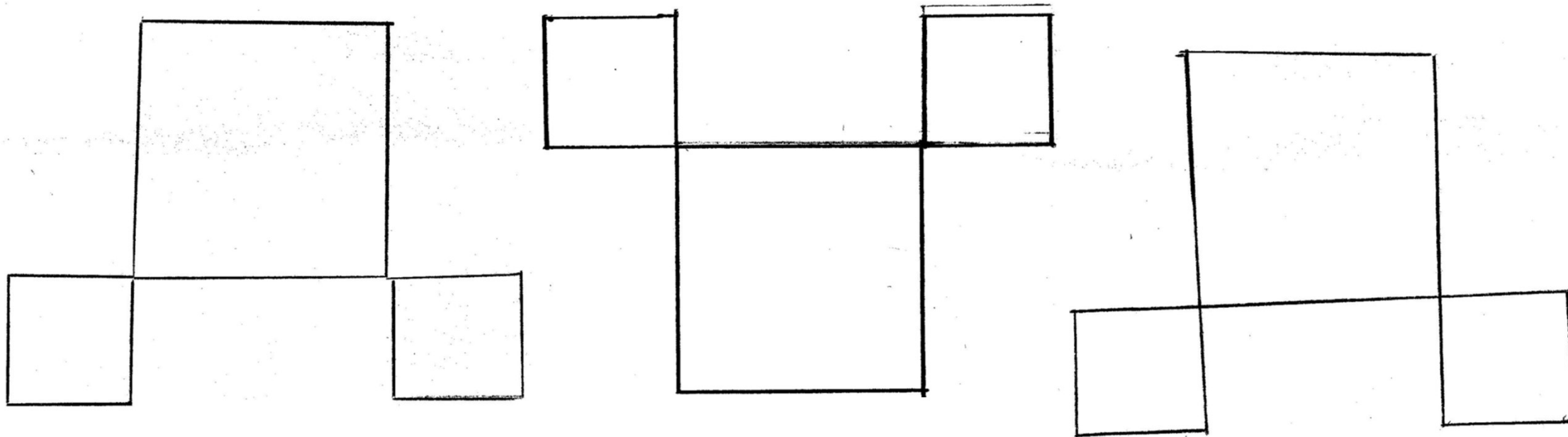
# Une évaluation en début de 6ème

- 1. Reproduis la figure suivante



# Que font les élèves à l'entrée en 6<sup>ème</sup> ?

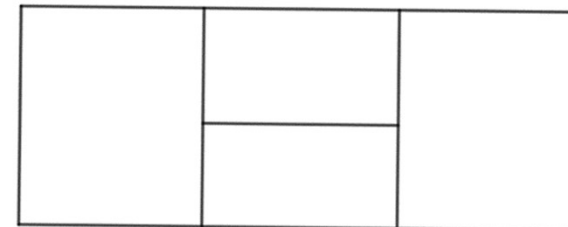
- **Exercice 1** : reproduction de 3 carrés ; respect des mesures mais pas de perception de l'alignement pour beaucoup d'élèves, pas toujours carré... **Sur 48, 13 Réussites, 11 à peu près**



# Une évaluation en début de 6ème

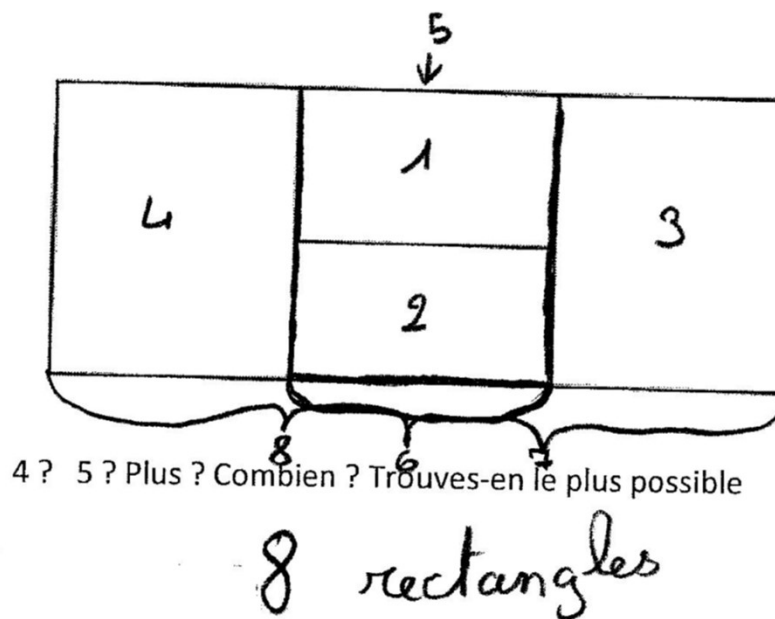
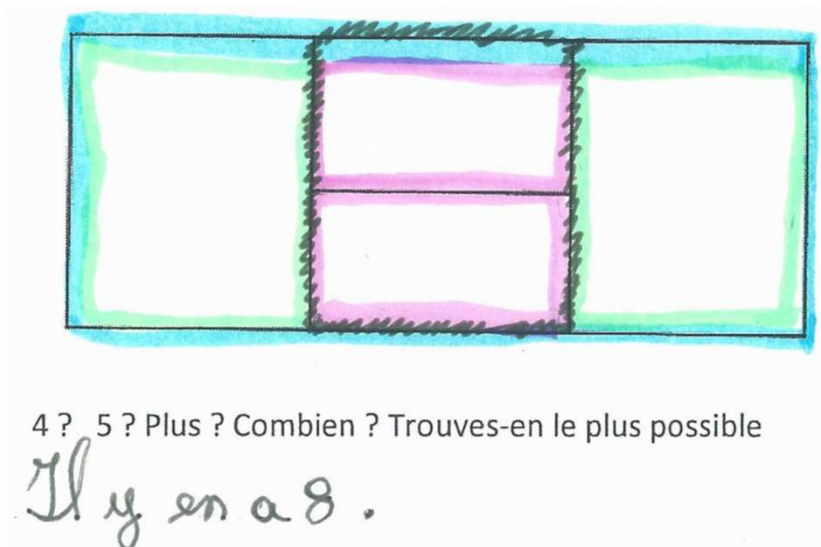
- 1. Reproduis la figure suivante

- 2. Combien de rectangles se cachent dans cette figure ?  
4 ? 5 ? Plus ? Combien ? Trouves-en le plus possible

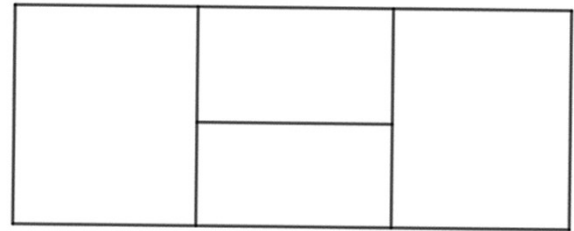


## Que font les élèves de 6ème ? Exercice 2

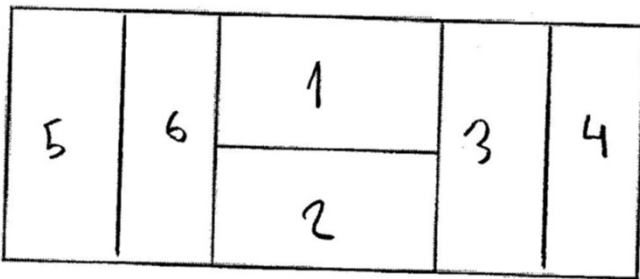
- Certains (très minoritaires) mettent en œuvre des procédures de dénombrement **8 réussites sur 48**



# Que font les élèves de 6<sup>ème</sup> ? Exercice 2

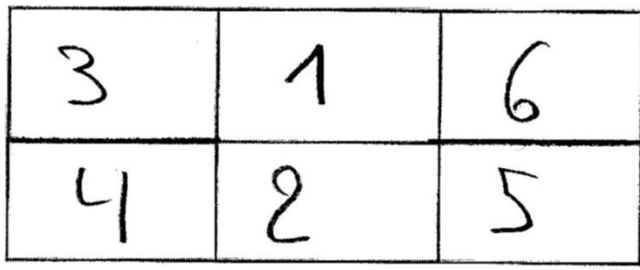


- Difficultés pour identifier des figures enchevêtrées
- Réponses variées à l'exercice 2 : de 4 à 12. Certains redécoupent le rectangle pour en trouver plus que 5 : **19 en voient 5 ou 6, 8 en voient 3 ou 4 et 2 en voient 10 ou 12 voire une infinité.**



4 ? 5 ? Plus ? Combien ? Trouves-en le plus possible

*Ilya 6 possible.*

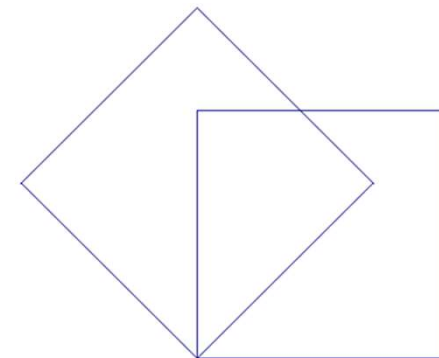


*6 rectangles*



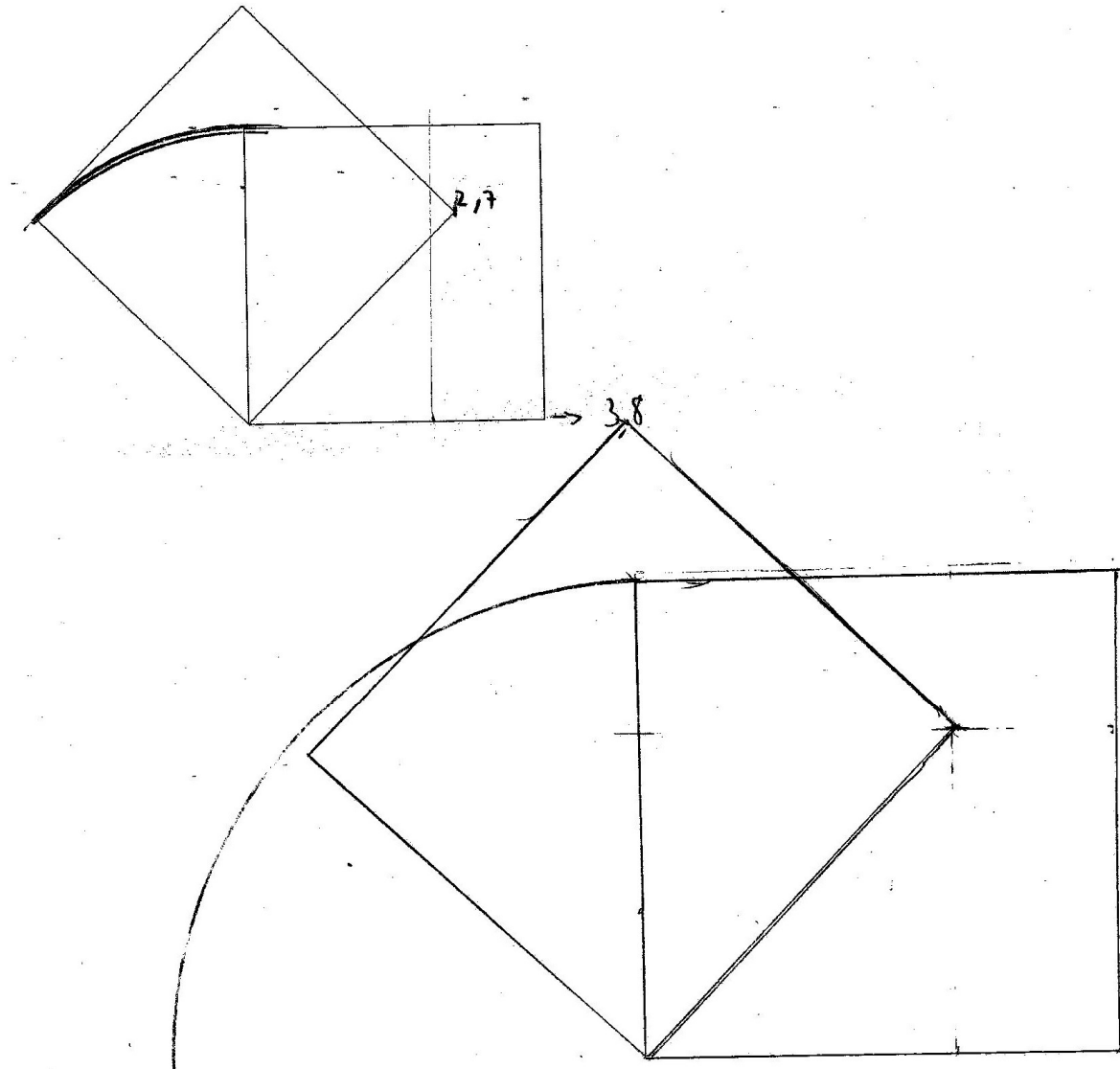
## Une évaluation en début de 6ème

- 3. Cette figure représente deux carrés. On veut la reproduire en plus grand : on a déjà tracé un côté du carré. Pour cela observe bien les propriétés de la figure (tu as le droit de dessiner sur le modèle).



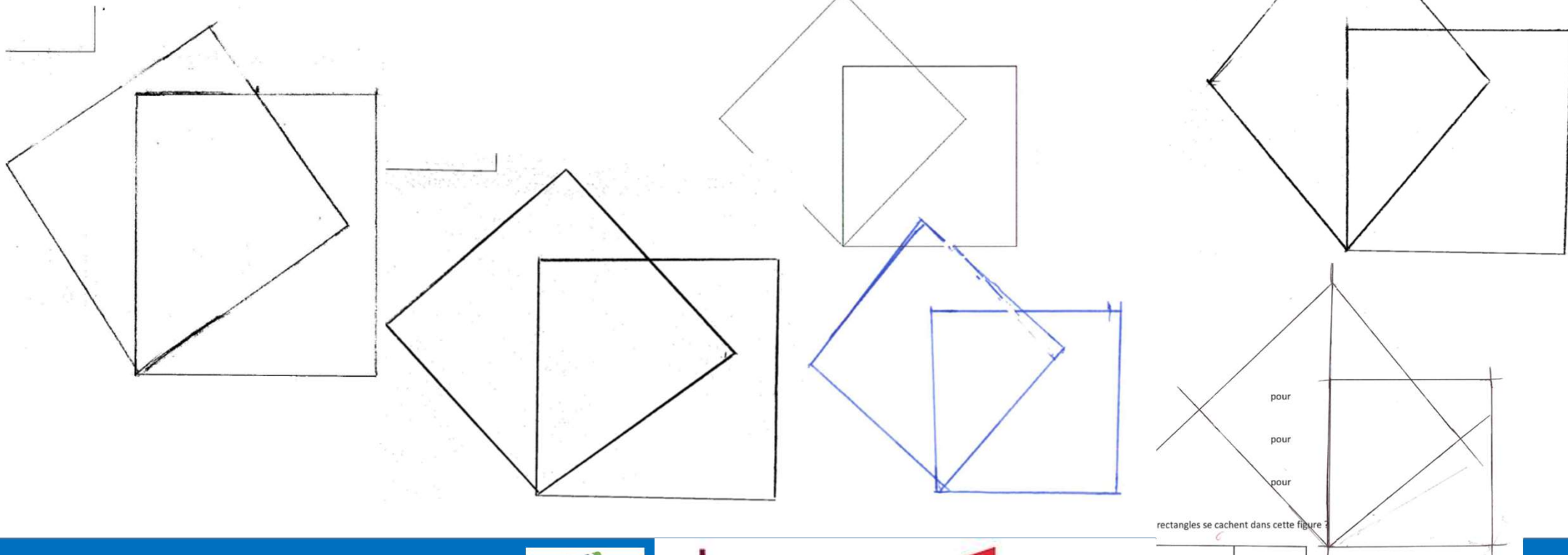
## Exercice 3

- 5 réussites, certaines avec mesures et repères ou en respectant la direction à vue ?
- Une élève réussit en prenant des repères numériques et en faisant des reports au compas. Elle trace sur le modèle



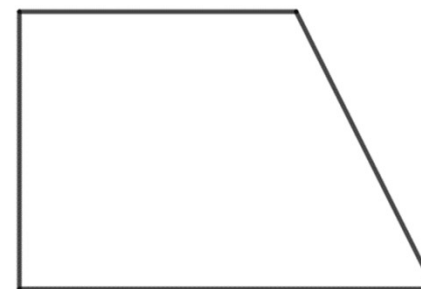
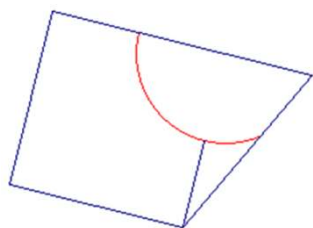
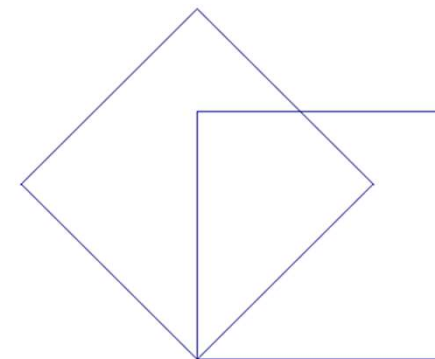
# Que font les élèves de 6ème ? Exercice 3

- La verticale est parfois respectée **2 élèves**. A côté du modèle 1 élève.
- Ils ne repèrent pas les alignements et certains ne font même pas des carrés. Ils ne tracent rien sur le modèle alors que cela leur est suggéré.



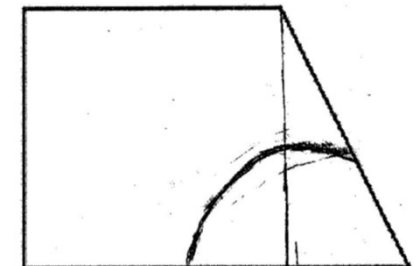
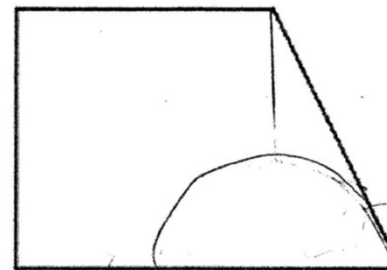
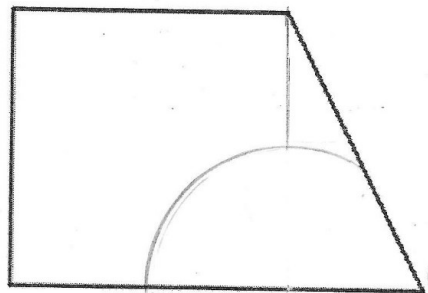
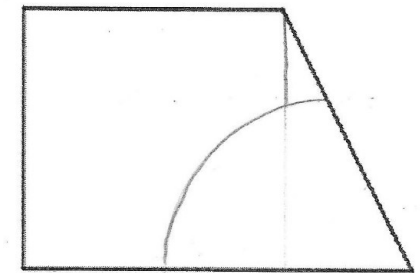
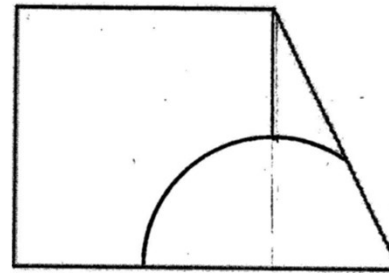
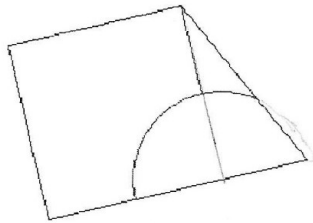
# Une évaluation en début de 6ème

- 3. Cette figure représente deux carrés. On veut la reproduire en plus grand : on a déjà tracé un côté du carré. Pour cela observe bien les propriétés de la figure (tu as le droit de dessiner sur le modèle).
- 4. Termine cette figure pour qu'elle soit comme le modèle. On a déjà dessiné le contour.



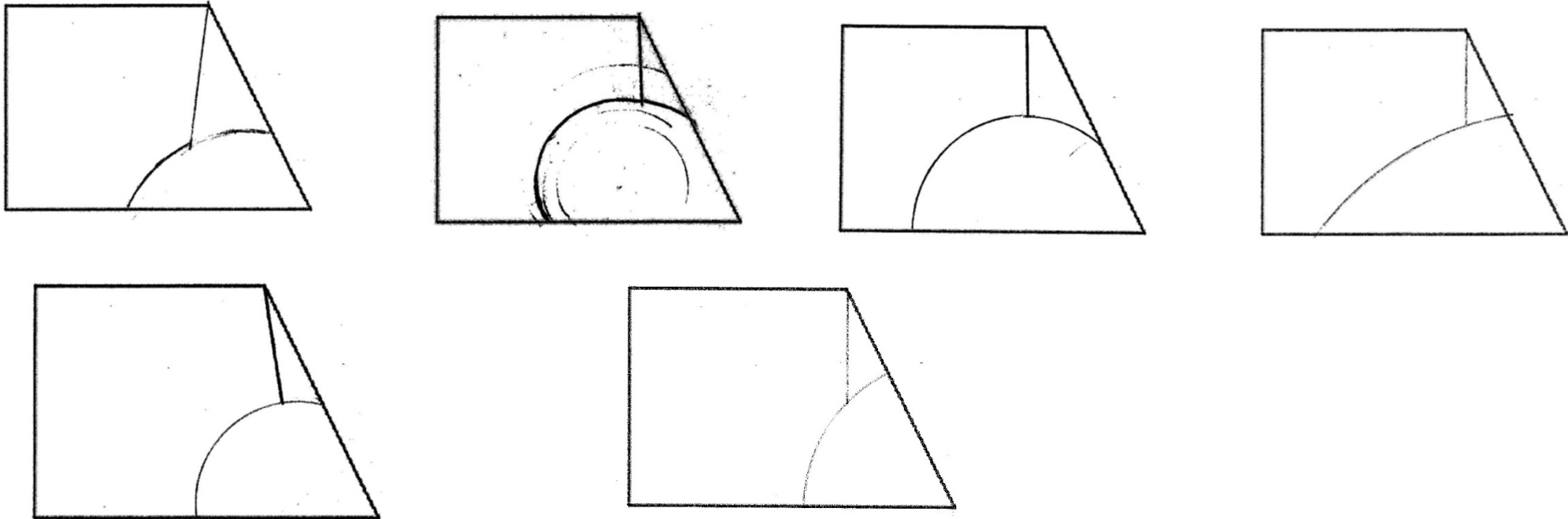
## Que font des élèves de début de 6<sup>ème</sup> ? Exercice 4

- Pratiquement pas réussi du tout (**3 réussites avec tracé du côté du carré sur l'amorce**). Pour une dizaine, c'est à peu près correct à l'œil mais on ne voit pas du tout comment ils ont pu faire. Prolonger le côté du carré ne suffit pas toujours pour identifier le centre du cercle.
- Certains ont complété le cercle à main levée.



## Que font des élèves de début de 6<sup>ème</sup> ? Exercice 4

- Pratiquement pas réussi du tout. Les élèves n'ont identifié ni le centre ni le rayon. Compas placé au jugé. Perpendicularité rarement respectée.



# Regarder un dessin comme une figure de géométrie

Une figure de géométrie est définie par un texte ou un procédé de construction avec des instruments.

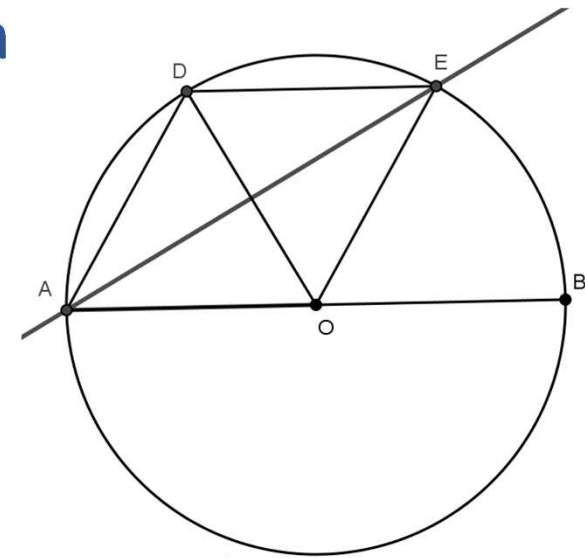
Articulation texte et figure, registre verbal et registre graphique

Lien entre instruments de tracé et propriétés géométriques dans le langage

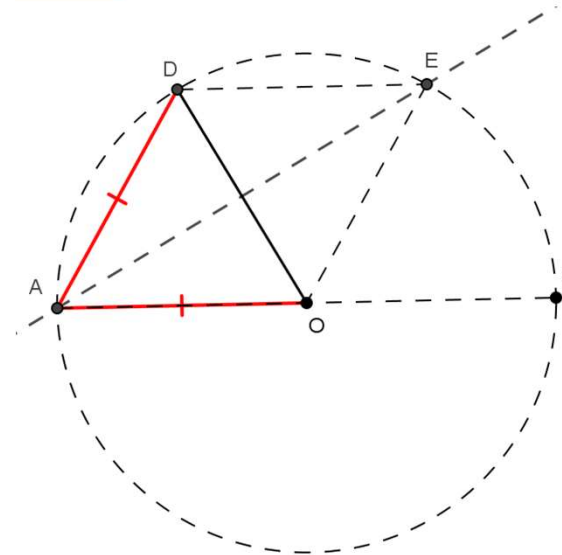
# Articulation texte et figure dans une démonstration

## Un exemple de problème de collège

- Soit  $C$  un cercle de centre  $O$  et de diamètre  $[AB]$  et un point  $D$  sur ce cercle, tel que  $AD = AO$ .
- La perpendiculaire à  $(DO)$  passant par  $A$  recoupe le cercle  $C$  au point  $E$ .
- Montrer que le quadrilatère  $ADEO$  est un losange.



- Exemple de démonstration (et regards sur la figure) :
  - $AD=AO$
  - donc  $A$  sur la médiatrice de  $[DO]$ .
  - Mais  $(AE)$  perpendiculaire à  $[DO]$



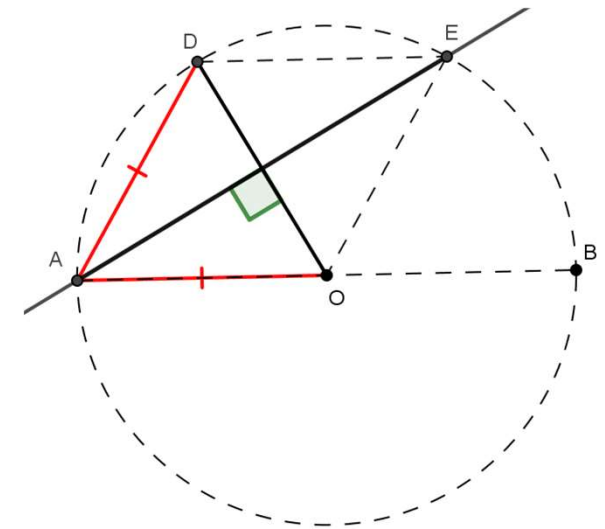
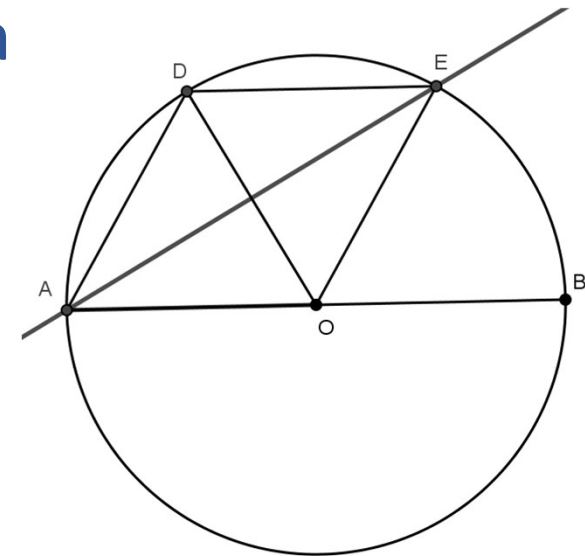


# Articulation texte et figure dans une démonstration

## Un exemple de problème de collège

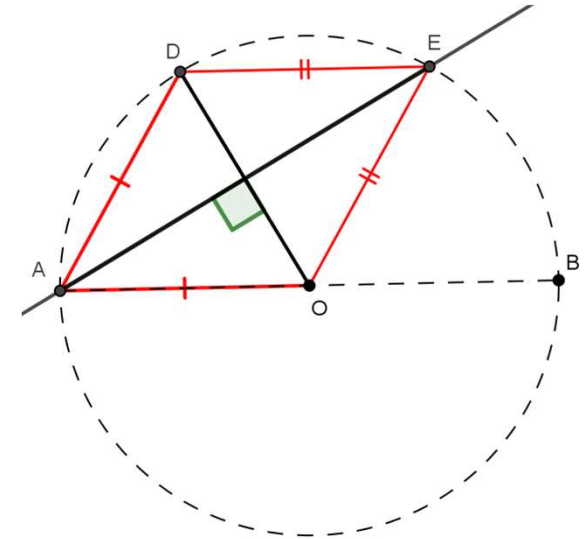
- Soit  $C$  un cercle de centre  $O$  et de diamètre  $[AB]$  et un point  $D$  sur ce cercle, tel que  $AD = AO$ .
- La perpendiculaire à  $(DO)$  passant par  $A$  recoupe le cercle  $C$  au point  $E$ .
- Montrer que le quadrilatère  $ADEO$  est un losange.

- Exemple de démonstration (et regards sur la figure) :
  - $AD=AO$
  - donc  $A$  sur la médiatrice de  $[DO]$ .
  - Mais  $(AE)$  perpendiculaire à  $[DO]$
  - Une seule perpendiculaire à  $[DO]$  passant par  $A$ .
  - Donc  $E$  sur la médiatrice de  $[DO]$



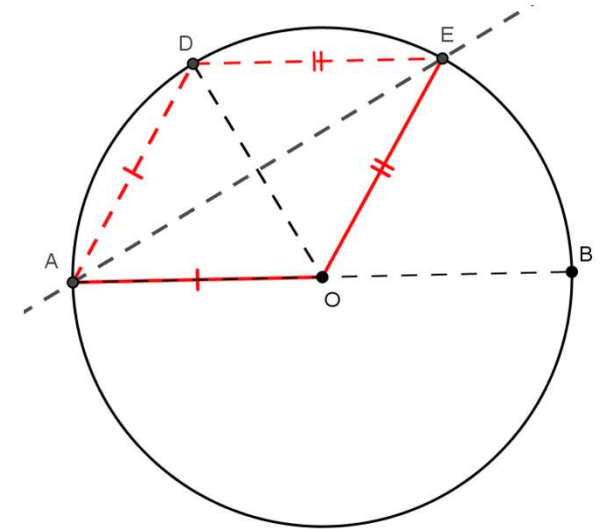
## Regards sur la figure pendant la démonstration

- E sur la médiatrice de [DO]
- Donc  $ED = EO$



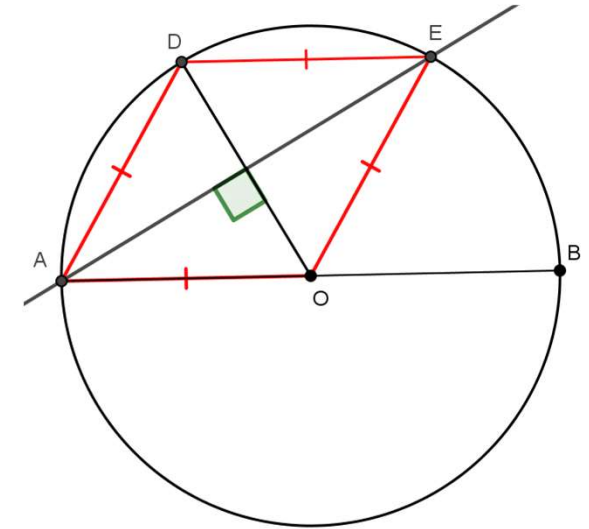
## Regards sur la figure pendant la démonstration

- E sur la médiatrice de [DO]
- Donc  $ED = EO$
- Mais A et E sont sur le cercle de centre O
- Donc OA et OE sont des rayons du même cercle et  $OA = OE$



## Regards sur la figure pendant la démonstration

- E sur la médiatrice de [DO]
- Donc  $ED = EO$
- Mais A et E sont sur le cercle de centre O
- Donc OA et OE sont des rayons du même cercle et  $OA = OE$
- Finalement  $AD = AO = OE = ED$
- Regard sur la figure guidé par le texte et les connaissances
- Figures superposées : triangle, losange, cercle définies par des lignes avec des points spécifiques à identifier.
- Relations entre points, droites, cercles, segments à isoler.  
Savoirs sur la médiatrice le cercle et le losange.



# Un groupe de recherche à l'IUFM Nord-Pas-de-Calais de 1999 à 2010

- Les membres du groupe

- Des formateurs de professeurs des écoles avec une grande expérience
- Des enseignants maîtres formateurs
- Une didacticienne des mathématiques (avec un renfort au fil des années)
- Un spécialiste de psychologie cognitive travaillant depuis longtemps avec des enseignants de mathématiques : Raymond Duval

- Le projet

- Réfléchir à l'enseignement de la géométrie sur toute la scolarité obligatoire, de 6 à 15 ans.
- Continuités possibles et gestion des ruptures entre l'école et le collège.
- Comment faire acquérir aux élèves la mobilité du regard sur les figures indispensable pour faire de la géométrie ?

# Regard sur la figure et langage en géométrie. Les travaux de Raymond Duval

- Deux références accessibles sur internet
  - Repères-IREM, N°17. p. 121-138 (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique.
  - Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Annales de didactique et de sciences cognitives n° 10, p. 5 – 53 (2005).
- Ce qu'il tend à montrer (extraits du résumé de l'article de 2005)
  - La géométrie est un domaine de connaissance qui exige l'articulation cognitive de deux registres de représentation très différents : la visualisation de formes pour représenter l'espace et le langage pour en énoncer des propriétés et pour en déduire de nouvelles.
  - Les difficultés d'apprentissage viennent d'abord de ce que ces deux registres sont utilisés d'une manière souvent contraire à leur fonctionnement cognitif normal en dehors des mathématiques.
  - La manière de voir des figures dépend de l'activité dans laquelle elle est mobilisée. On peut ainsi distinguer une manière de voir qui fonctionne de manière iconique et une manière de voir fonctionnant de manière non iconique.

# Regard sur la figure et langage en géométrie. Les travaux de Raymond Duval

- La visualisation iconique

- On reconnaît les formes et on identifie les objets en une seule opération : la forme discriminée par la vue ressemble à la forme typique d'un objet réel représenté.
- Il faut parfois un apport verbal d'informations complémentaires, une légende mais le mécanisme d'iconicité continue à s'imposer de manière autonome chaque fois que quelque chose est donné à voir.
- Difficulté pour l'apprentissage de la géométrie : la reconnaissance est centrée sur le contour de la forme ; les propriétés qui ne sont pas liées au contour (par exemple les diagonales d'un quadrilatère) sont plus difficilement mobilisables ; il y a une résistance à sortir du contour fermé de la forme ; les formes apparaissent stables ; il est difficile de les transformer en d'autres formes semblables (par exemple un carré sur la pointe vu comme un losange) ou, plus encore, différentes (par exemple transformer un triangle en un rectangle de même aire).

- La visualisation non iconique ou la déconstruction des formes

- Décomposition en unités figurales de même dimension ou de dimensions plus petites
- Imaginer des tracés supplémentaires

# Regard sur la figure et langage en géométrie. Les travaux de Raymond Duval

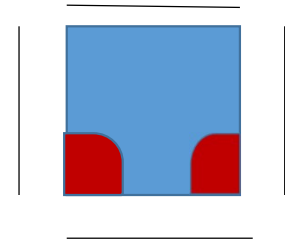
- La déconstruction dimensionnelle constitue le processus central de la visualisation géométrique.
- Pour analyser le rôle du langage en géométrie, il faut distinguer trois niveaux d'opérations discursives : la dénomination, l'énonciation de propriétés, la déduction. Cette distinction est essentielle car le rapport du langage à la visualisation change complètement d'un niveau à l'autre.
- Cependant, sous cette variation, se cache un phénomène cognitif fondamental : le hiatus dimensionnel. Les passages entre visualisation et discours impliquent en géométrie un changement du nombre de dimensions pour reconnaître les objets de connaissance visés dans chacun des deux registres.
- Par exemple, pour vérifier qu'on a un carré
  - D'un coup d'œil (vision iconique)





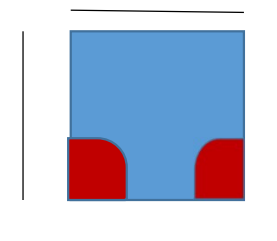
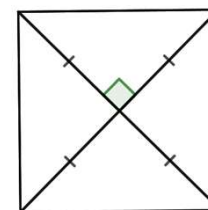
# Regard sur la figure et langage en géométrie. Les travaux de Raymond Duval

- La déconstruction dimensionnelle constitue le processus central de la visualisation géométrique.
- Pour analyser le rôle du langage en géométrie, il faut distinguer trois niveaux d'opérations discursives : la dénomination, l'énonciation de propriétés, la déduction. Cette distinction est essentielle car le rapport du langage à la visualisation change complètement d'un niveau à l'autre.
- Cependant, sous cette variation, se cache un phénomène cognitif fondamental : le hiatus dimensionnel. Les passages entre visualisation et discours impliquent en géométrie un changement du nombre de dimensions pour reconnaître les objets de connaissance visés dans chacun des deux registres.
- Par exemple, pour vérifier qu'on a un carré
  - D'un coup d'œil (vision iconique)
  - En recherchant des propriétés suffisantes pour assurer qu'il s'agit d'un carré.
  - Quadrilatère qui a 4 angles droits et 4 côtés de même longueur



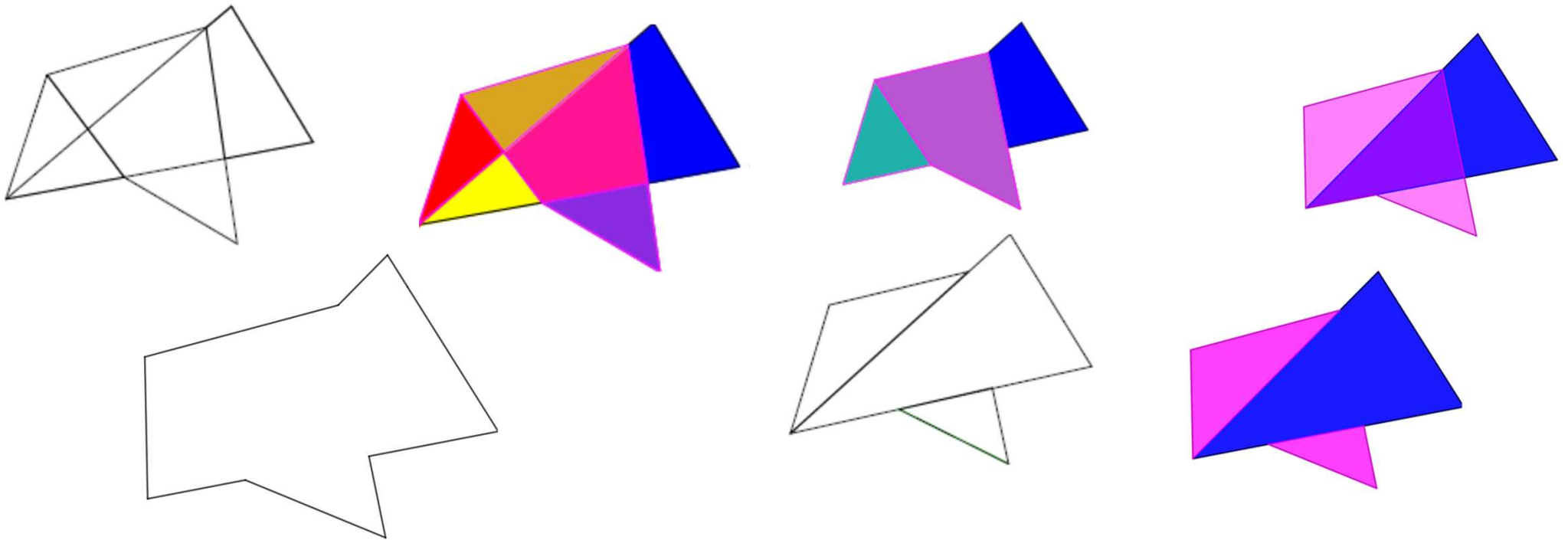
# Regard sur la figure et langage en géométrie. Les travaux de Raymond Duval

- La déconstruction dimensionnelle constitue le processus central de la visualisation géométrique.
- Pour analyser le rôle du langage en géométrie, il faut distinguer trois niveaux d'opérations discursives : la dénomination, l'énonciation de propriétés, la déduction. Cette distinction est essentielle car le rapport du langage à la visualisation change complètement d'un niveau à l'autre.
- Cependant, sous cette variation, se cache un phénomène cognitif fondamental : le hiatus dimensionnel. Les passages entre visualisation et discours impliquent en géométrie un changement du nombre de dimensions pour reconnaître les objets de connaissance visés dans chacun des deux registres.
- Par exemple, pour vérifier qu'on a un carré
  - D'un coup d'œil (vision iconique)
  - En recherchant des propriétés suffisantes pour assurer qu'il s'agit d'un carré.
- Quadrilatère qui a 4 angles droits et 4 côtés de même longueur
- Quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu, sont perpendiculaires et égales.



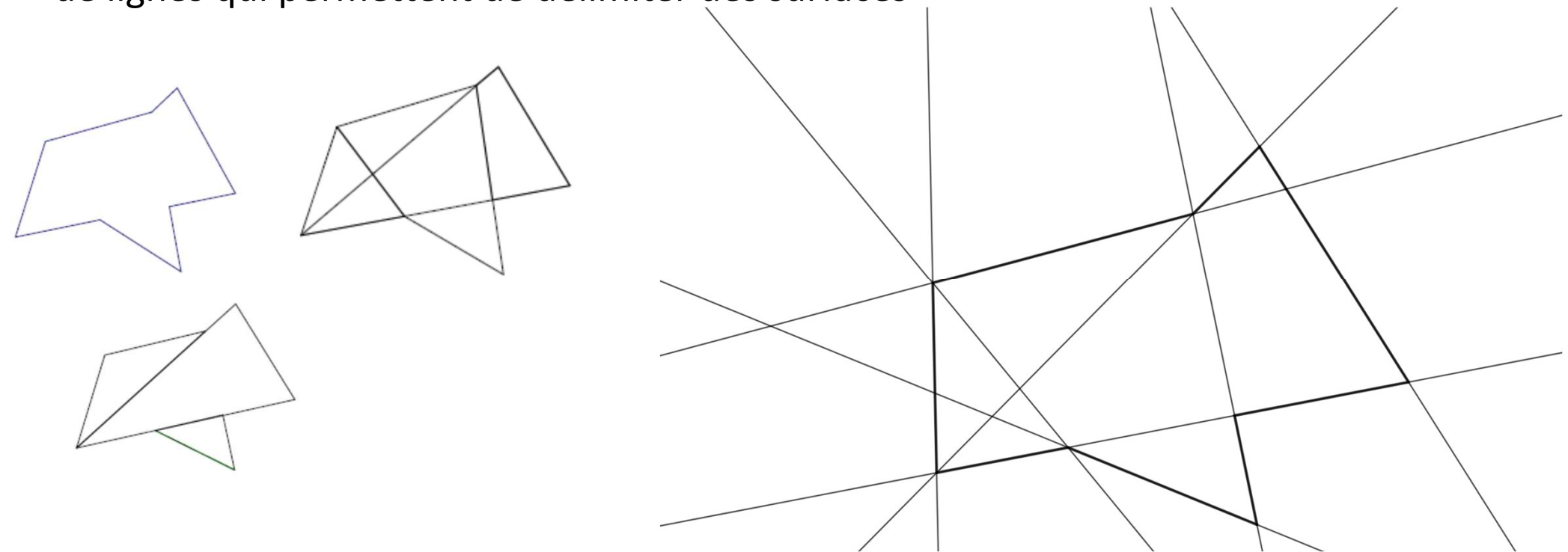
# Regard sur la figure. Une opérationnalisation pour l'enseignement

- Vision surface : figure vue comme un puzzle par juxtaposition ou superposition partielle de figures simples (contour de gabarit, dès la maternelle)



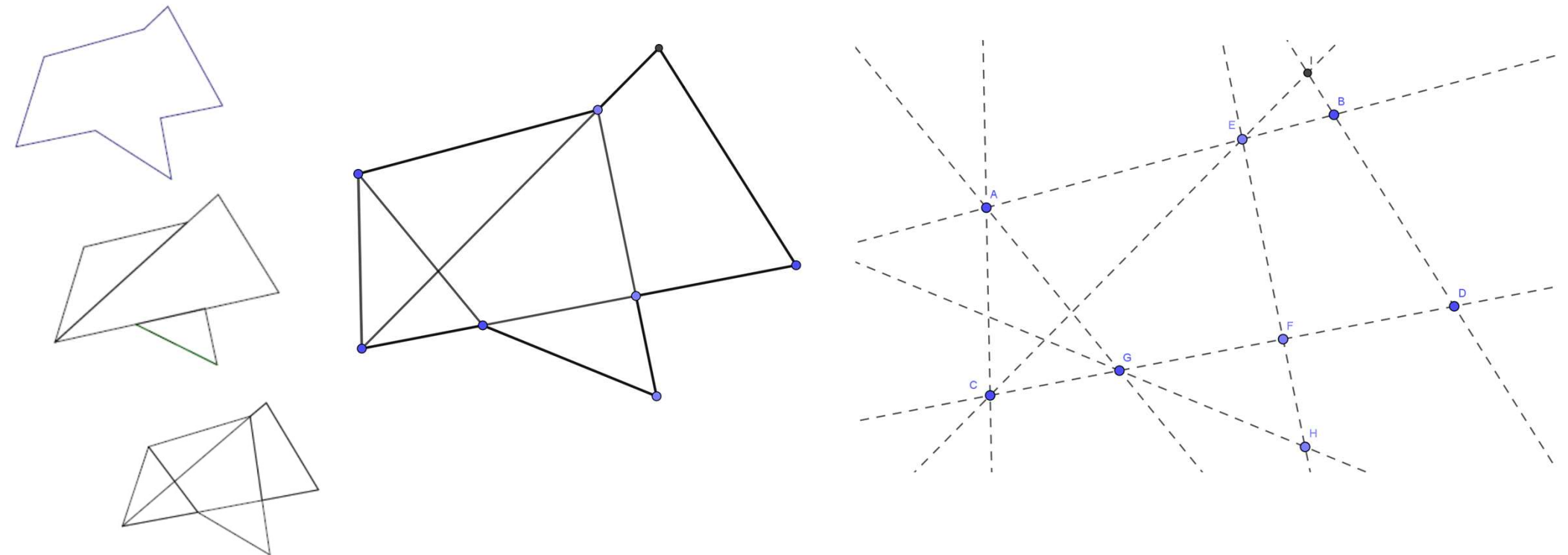
# Regard sur la figure. Une opérationnalisation pour l'enseignement

- Vision ligne : figure vue comme définie par un réseau de lignes qui permettent de délimiter des surfaces



# Regard sur la figure. Une opérationnalisation pour l'enseignement

- Vision points : figure vue comme définie par des points qui permettent de définir des lignes



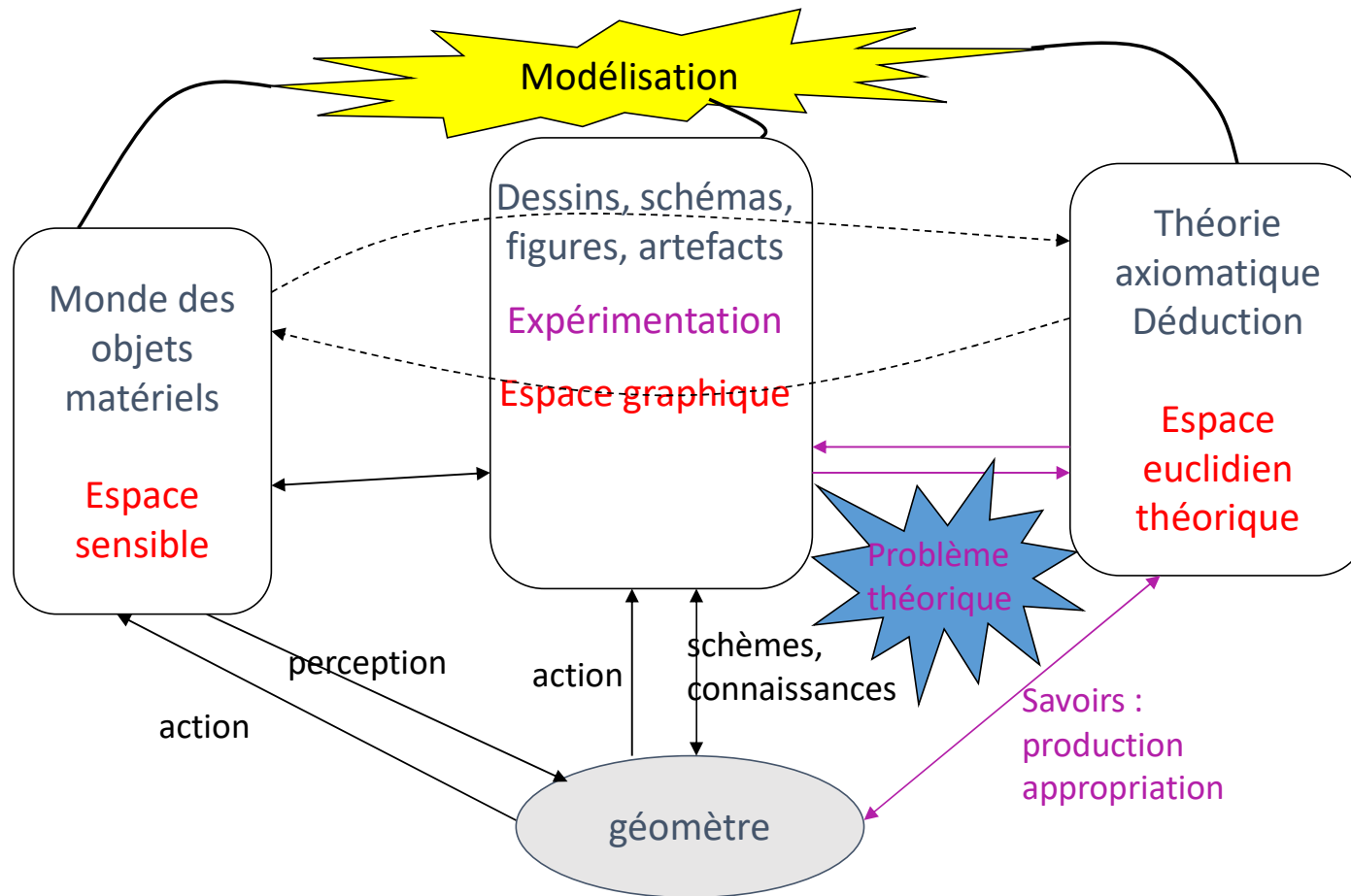
# Géométrie matérielle / géométrie théorique

- Rupture entre géométrie instrumentée et géométrie de la démonstration
- Nature des objets, mode de validation des énoncés
- Cependant les objets de la géométrie théorique ne sont pas sans rapport avec ceux de la géométrie physique.

# Géométrie matérielle / géométrie théorique

- Rupture entre géométrie instrumentée et géométrie de la démonstration
- Nature des objets, mode de validation des énoncés
- Cependant les objets de la géométrie théorique ne sont pas sans rapport avec ceux de la géométrie physique.
- Quels liens entretiennent objets et pratiques de chacun de ces rapports à la géométrie ?
- Comment penser une géométrie théorique au collège qui prenne appui sur la géométrie de l'école ?
- Comment traiter l'espace graphique des figures matérielles en dimension 2, interface entre la géométrie physique et l'espace géométrique théorique ? Source de malentendus mais espace d'expérimentation pour la géométrie théorique.

# Les trois espaces de la géométrie





# Géométrie matérielle / géométrie théorique

- Rupture entre géométrie instrumentée et géométrie de la démonstration
- Nature des objets, mode de validation des énoncés
- Cependant les objets de la géométrie théorique ne sont pas sans rapport avec ceux de la géométrie physique.
- Quels liens entretiennent objets et pratiques de chacun de ces rapports à la géométrie ?
- Comment penser une géométrie théorique au collège qui prenne appui sur la géométrie de l'école ?
- Comment traiter l'espace graphique des figures matérielles en dimension 2, interface entre la géométrie physique et l'espace géométrique théorique ? Source de malentendus mais espace d'expérimentation pour la géométrie théorique.
- L'outillage des élèves en théorèmes et définitions n'est pas neutre relativement aux capacités cognitives nécessaires pour analyser les figures.
- Prendre la question de la continuité des apprentissages géométriques sur la scolarité obligatoire par les deux bouts.
- Deux suites de travail sur la géométrie des années 2000
  - LéA (Lieu d'éducation Associé à l'Ifé) production de ressources pour le cycle 3 : 2014-2020
  - Groupe IREM cycle 4 : depuis 2017.

# Géométrie des tracés

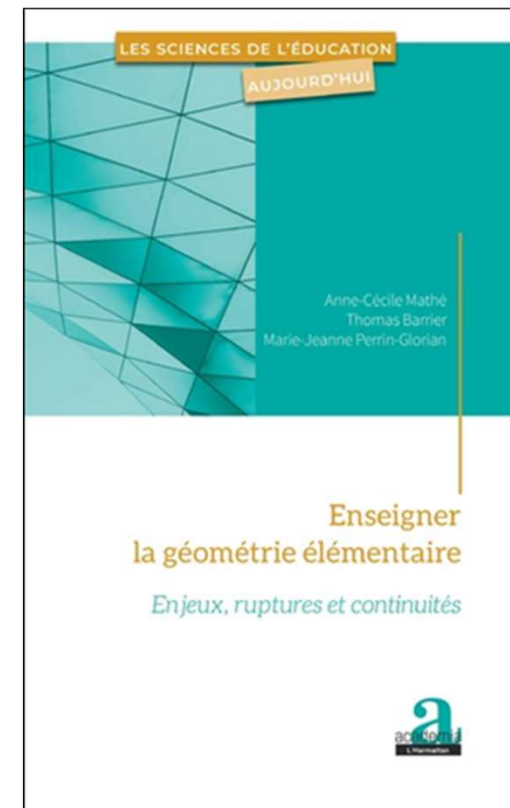
Un moyen de travailler dans la géométrie matérielle avec en perspective la géométrie théorique.

Mathé, Barrier et Perrin-Glorian (2020).  
Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités.

Tracés matériels dans des reproductions et construction de figures.  
Les objets géométriques en construction.

Reports de longueurs et d'angles sans mesure.

## Instruments de tracé



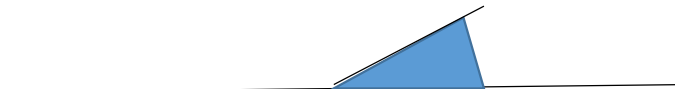
# Les instruments de la géométrie des tracés

- Les gabarits et pochoirs sont considérés comme des instruments de tracé pour tracer une figure simple (contour de gabarit).
  - Ce sont des instruments qui gardent une trace de la forme de la figure ou une partie de cette forme. Ils sont spécifiques de cette figure simple.
  - Une première étape au cours du cycle 2 est de passer de ces instruments spécifiques à des instruments universels qui ont chacun une fonction différente :
    - La règle pour tracer des traits droits
    - Le reporteur de longueur : reporter une longueur sur une droite qu'on a déjà
    - Le médiateur de longueur : partager une longueur en deux
    - Le gabarit d'angle : reporter un angle sur une demi-droite
- Le gabarit d'angle est un gabarit de surface déchiré ; il porte une partie de l'information sur la surface. On va donner une place particulière au gabarit d'angle droit qu'on va appeler équerre.
- Le compas comme traceur de cercles.
  - Au cycle 3, le compas qui servait uniquement à tracer des cercles va devenir reporteur de longueur dans le plan : tous les points pris sur le cercle sont à la même distance du centre.
  - Différence entre reporteur de longueur et compas.

# Géométrie des tracés et règles d'usage géométrique des instruments

36

- Une axiomatique pratique sur des instruments de tracé théoriques (non limités)
  - pour poser la règle, il faut disposer de deux points ou d'un segment déjà tracé
  - pour reporter une longueur, il faut une droite déjà tracée et un point sur cette droite, la longueur se reporte sur la droite d'un côté ou de l'autre de ce point
  - le médiateur de segment permet de prendre la moitié d'une longueur
  - pour reporter un angle, il faut une droite et un point sur cette droite (ou une demi-droite) : le sommet du gabarit se pose sur le point et un côté du gabarit se pose sur la droite, l'angle se reporte d'un côté ou de l'autre (4 positions si on a une droite, 2 positions si on a une demi-droite)
  - pour tracer un cercle, il faut un point où poser la pointe du compas (le centre du cercle) et un point où poser la mine (un point du cercle) ou une longueur qui donne l'écartement du compas
  - en faisant glisser un côté d'un gabarit d'angle sur une droite, on trace des traits droits parallèles sur l'autre côté.



# Géométrie des tracés et règles d'usage géométrique des instruments

37

- Une axiomatique pratique sur des instruments de tracé théoriques (non limités)
  - pour poser la règle, il faut disposer de deux points ou d'un segment déjà tracé
  - pour reporter une longueur, il faut une droite déjà tracée et un point sur cette droite, la longueur se reporte sur la droite d'un côté ou de l'autre de ce point
  - le médiateur de segment permet de prendre la moitié d'une longueur
  - pour reporter un angle, il faut une droite et un point sur cette droite (ou une demi-droite) : le sommet du gabarit se pose sur le point et un côté du gabarit se pose sur la droite, l'angle se reporte d'un côté ou de l'autre (4 positions si on a une droite, 2 positions si on a une demi-droite)
  - pour tracer un cercle, il faut un point où poser la pointe du compas (le centre du cercle) et un point où poser la mine (un point du cercle) ou une longueur qui donne l'écartement du compas
  - en faisant glisser un côté d'un gabarit d'angle sur une droite, on trace des traits droits parallèles sur l'autre côté.



# Restauration (ou reconstruction) de figures

Reproduction de figure : figure  $\rightarrow$  figure

Construction de figure : texte  $\rightarrow$  figure

Description de figure : figure  $\rightarrow$  texte

Programme de construction : figure  $\rightarrow$  texte qui permet de construire

Restauration (ou reconstruction) de figure : figure modèle et amorce à compléter

# Qu'est-ce qu'une restauration de figure ?

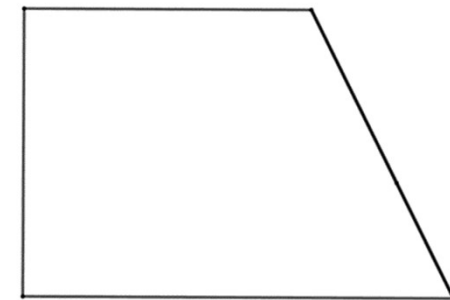
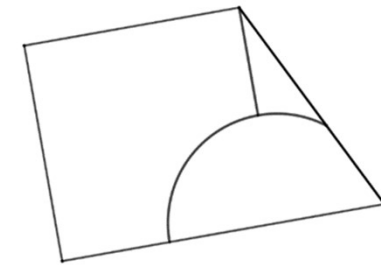
## Un exemple

- Une restauration de figure est une reproduction de figure. On a
  - Un modèle
  - Une amorce (ici à une taille et dans une orientation différentes de celles du modèle)
  - Des instruments de tracé (mais pas de mesure) avec éventuellement un coût pour leur usage.

Un point important : de quels instruments dispose-t-on ?

Ici je vais supposer que j'ai règle non graduée, équerre, compas, reporteur de longueur, médiateur de longueur.

La règle est non graduée. Un autre instrument permet de reporter des longueurs. L'équerre est non graduée : c'est un gabarit d'angle droit. Le compas sert à tracer des cercles (ou des arcs de cercles).



# Qu'est-ce qu'une restauration de figure ?

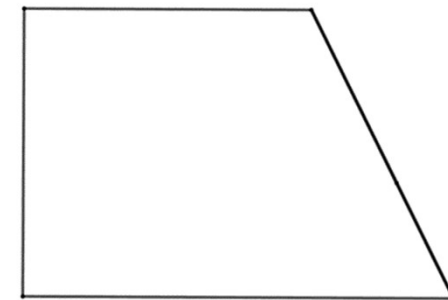
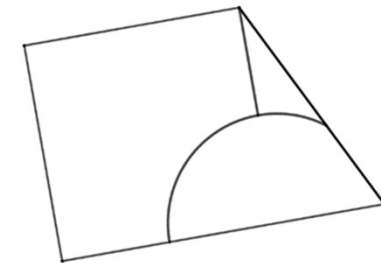
## Un exemple

- Une restauration de figure est une reproduction de figure. On a
  - Un modèle
  - Une amorce (ici à une taille et dans une orientation différentes de celles du modèle)
  - Des instruments de tracé (mais pas de mesure) avec éventuellement un coût pour leur usage.

Un point important : de quels instruments dispose-t-on ?

Ici je vais supposer que j'ai règle non graduée, équerre, compas, reporteur de longueur.

La règle est non graduée. Un autre instrument permet de reporter des longueurs. L'équerre est non graduée : c'est un gabarit d'angle droit. Le compas sert à tracer des cercles (ou des arcs de cercles).



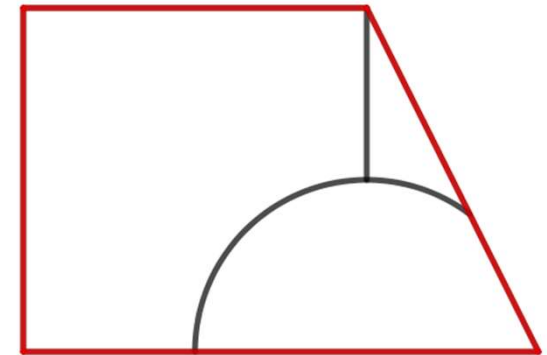
Situation d'action. Importance du choix des variables didactiques. [Validation par un calque](#).



# Qu'est-ce qu'une restauration de figure ?

## Un exemple

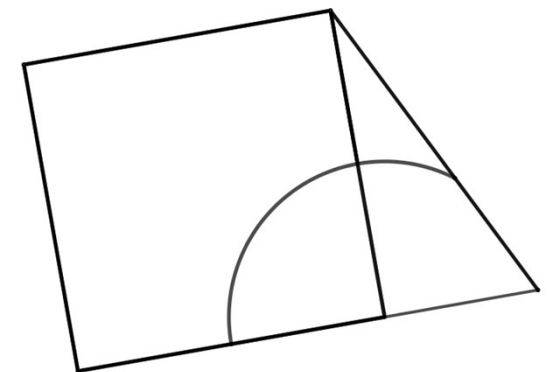
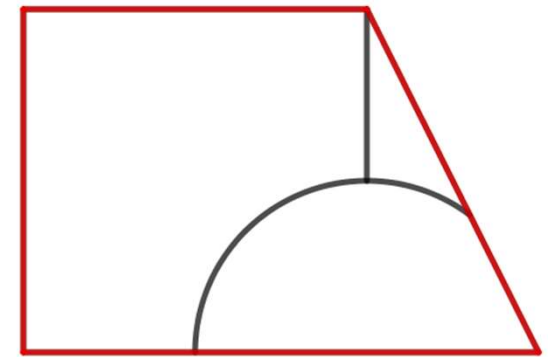
- Comment faire ?
- D'abord retrouver l'amorce sur le modèle (ici coloriée en rouge) et identifier ce qui manque
- Chercher à relier ce qui manque à ce qui est déjà tracé.



# Qu'est-ce qu'une restauration de figure ?

## Un exemple

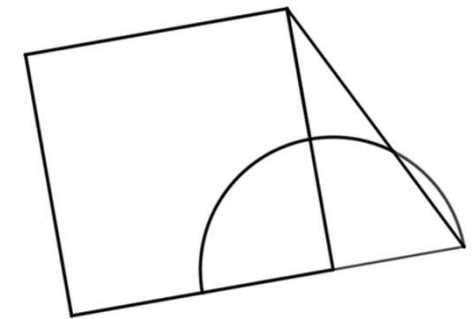
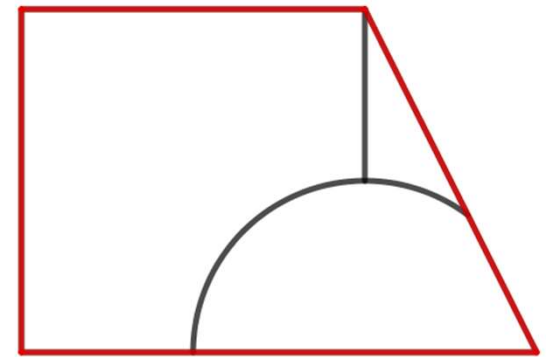
- Comment faire ?
- D'abord retrouver l'amorce sur le modèle et identifier ce qui manque
- Chercher à relier ce qui manque à ce qui est déjà tracé.
- En prolongeant le segment on peut voir apparaître un carré, vérifier les angles droits et l'égalité des côtés avec les instruments.
- On peut aussi faire l'hypothèse que l'arc de cercle est centré au sommet du carré qu'on vient de créer. On peut vérifier avec le compas sur le modèle.



# Qu'est-ce qu'une restauration de figure ?

## Un exemple

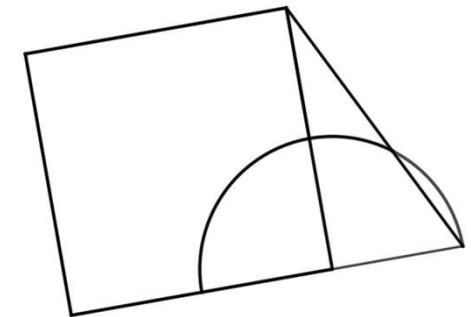
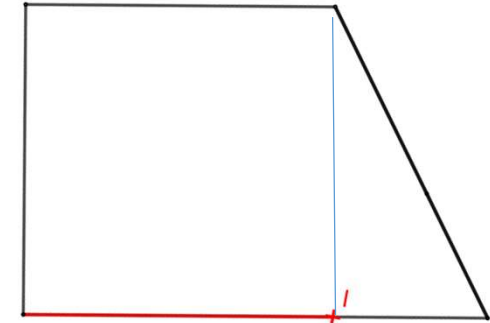
- Comment faire ?
- D'abord retrouver l'amorce sur le modèle et identifier ce qui manque
- Chercher à relier ce qui manque à ce qui est déjà tracé.
- En prolongeant le segment on peut voir apparaître un carré, vérifier les angles droits et l'égalité des côtés avec les instruments.
- On peut aussi faire l'hypothèse que l'arc de cercle est centré au sommet du carré qu'on vient de créer. On peut vérifier avec le compas sur le modèle.
- Reste à trouver le rayon ou un point du cercle.



# Qu'est-ce qu'une restauration de figure ?

## Un exemple. Restauration proprement dite.

- Pour terminer le carré
  - procédure 1 : à l'équerre, identification du sommet supérieur droit du trapèze comme sommet du carré.
  - Procédure 2 : avec un report de longueur, identification du côté du carré et des 3 sommets déjà là.
- Pour l'arc de cercle
  - Centre et un point : identification d'un sommet du trapèze comme extrémité de l'arc complété.
  - Centre et rayon : si on n'a pas de médiateur de longueur, il faut prendre le rayon sur le petit côté du triangle rectangle, ce qui revient à centre et point.

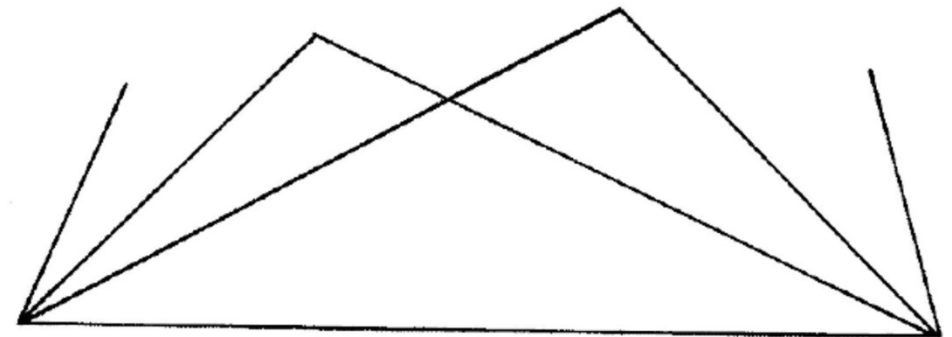
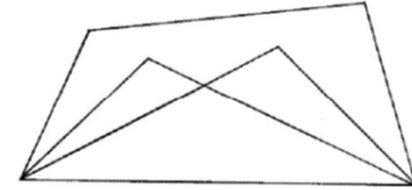


## Validation par un calque

# Restauration de figure

Un autre exemple extrait de la ressource du LÉA  
<https://lea-geometrie.etab.ac-lille.fr/> |

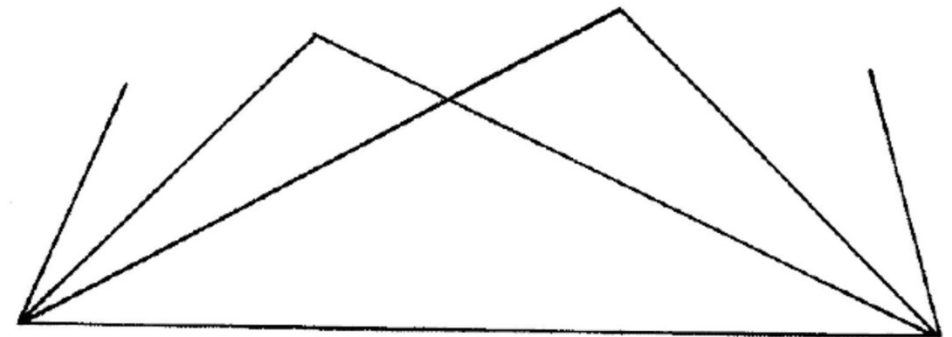
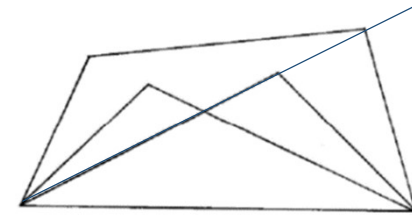
- Il manque un côté du quadrilatère
- Il manque deux sommets
- Un point peut s'obtenir par l'intersection de deux lignes.



## Restauration de figure

Un autre exemple extrait de la ressource du LÉA  
<https://lea-geometrie.etab.ac-lille.fr/>

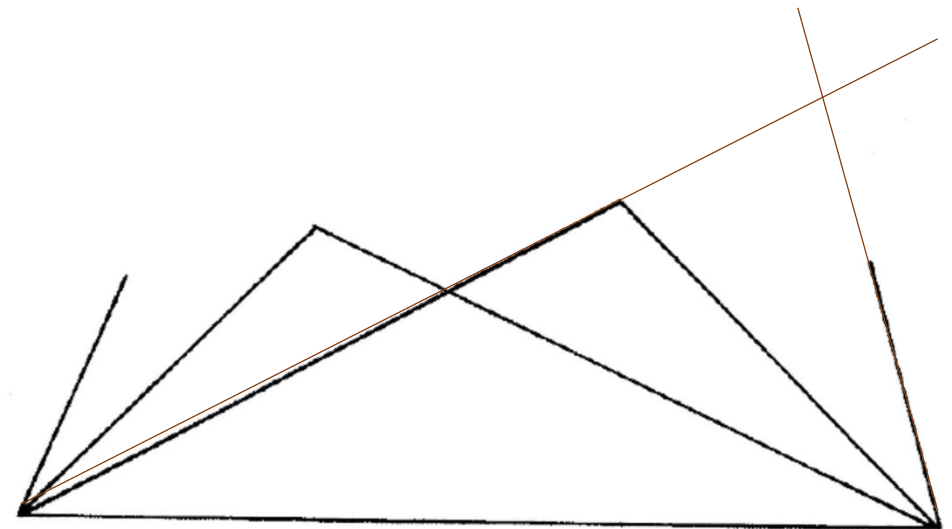
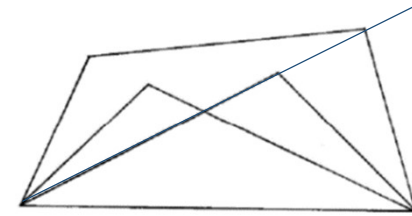
- Il manque un côté du quadrilatère
- Il manque deux sommets
- Un point peut s'obtenir par l'intersection de deux lignes
- On a une des lignes qui passe par le point
- Peut-on trouver sur le modèle une autre ligne qui passe par le point manquant et qu'on pourra construire sur l'amorce ?



# Restauration de figure

Un autre exemple extrait de la ressource du LÉA  
<https://lea-geometrie.etab.ac-lille.fr/>

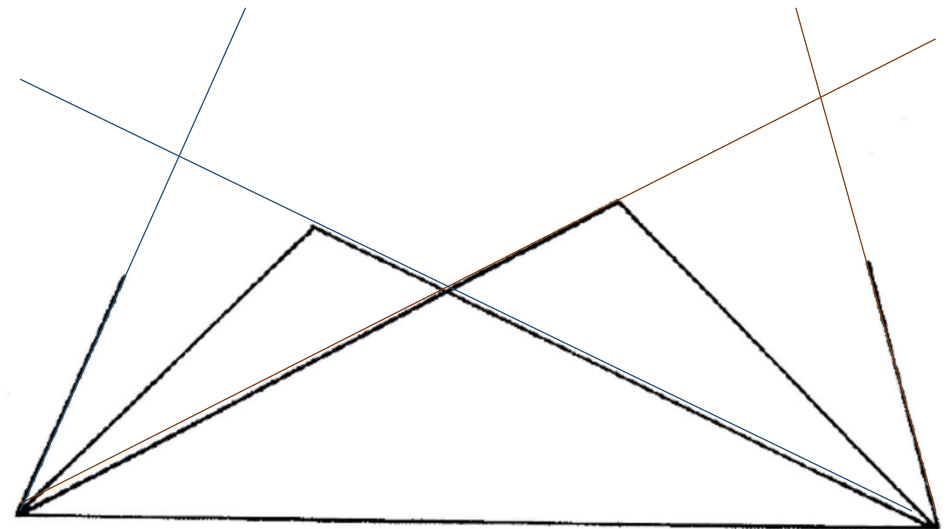
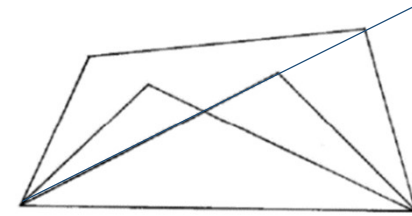
- Il manque un côté du quadrilatère
- Il manque deux sommets
- Un point peut s'obtenir par l'intersection de deux lignes
- On a une des lignes qui passe par le point
- Peut-on trouver sur le modèle une autre ligne qui passe par le point manquant et qu'on pourra construire sur l'amorce ?



# Restauration de figure

Un autre exemple extrait de la ressource du LéA  
<https://lea-geometrie.etab.ac-lille.fr/>

- Il manque un côté du quadrilatère
- Il manque deux sommets
- Un point peut s'obtenir par l'intersection de deux lignes
- On a une des lignes qui passe par le point
- Peut-on trouver sur le modèle une autre ligne qui passe par le point manquant et qu'on pourra construire sur l'amorce ?

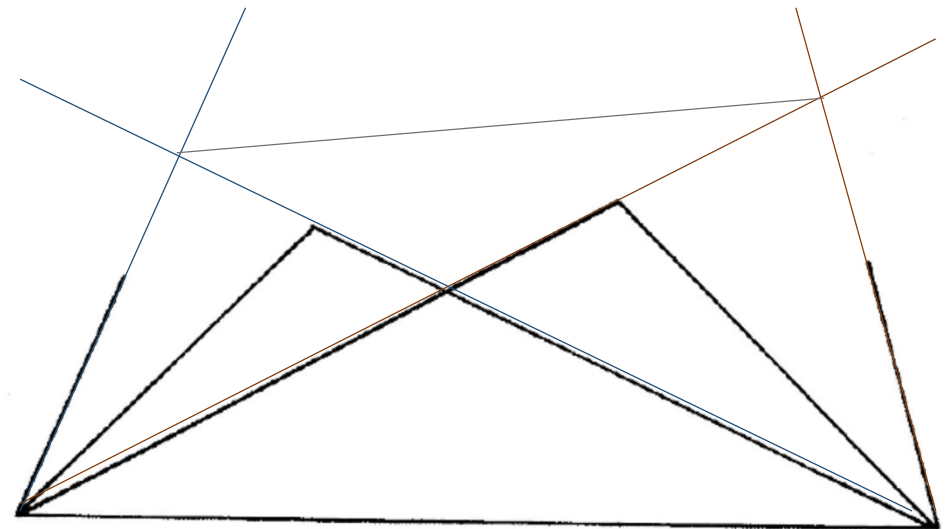
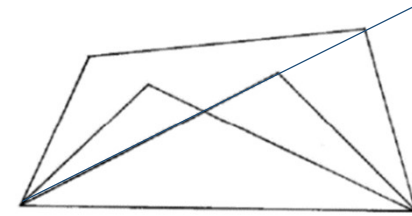




# Restauration de figure

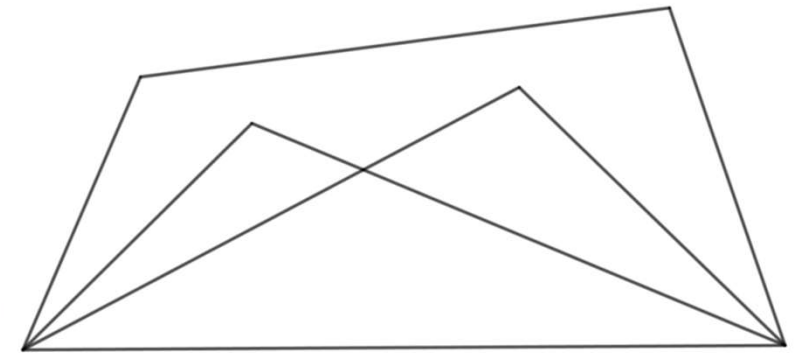
Un autre exemple extrait de la ressource du LÉA  
<https://lea-geometrie.etab.ac-lille.fr/>

- Il manque un côté du quadrilatère
- Il manque deux sommets
- Un point peut s'obtenir par l'intersection de deux lignes
- On a une des lignes qui passe par le point
- Peut-on trouver sur le modèle une autre ligne qui passe par le point manquant et qu'on pourra construire sur l'amorce ?

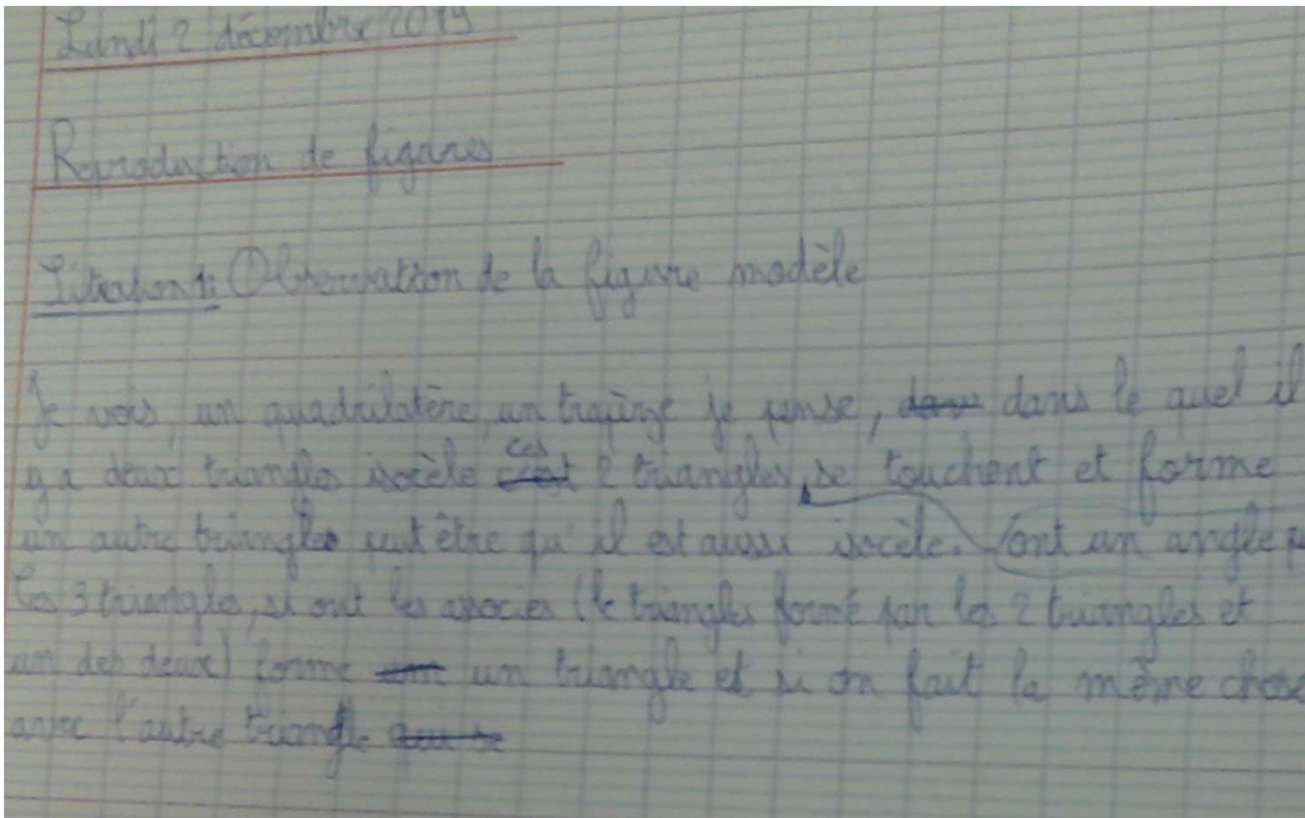


## Variante utilisée en 6ème

- **Phase 1.** Décrire la figure. On a obtenu des productions variées et inattendues (orthographe respectée) ...



Je vois un quadrilatère, un trapèze je pense, dans lequel il y a deux triangles isocèle ; ces deux triangles ont un angle qui se touchent et forme un autre triangle peut-être qu'il est aussi isocèle. Ces trois triangles si on les associe (le triangle formé par les deux triangles et un des deux) forme un triangle et si on fait la même chose avec l'autre triangle.



Sur la figure je vois au milieu une figure qui se croise avec et qui non pas le même angle. La figure n'est pas droit car je crois que ses un polygone. On dirait un neu papillon. Cette figure na pas d'angle droit.

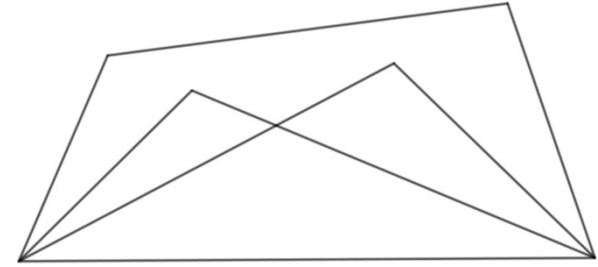
Sur la figure je vois au milieu une figure qui se croise et qui non pas le même angle. La figure n'est pas droit car je crois que ses un polygone. On dirait un neu papillon. Cette figure na pas d'angle droit.

Je vois une sorte de rectangle avec des cônes à l'intérieur ; les pointes des cônes se touche ; il y a un cône plus maigre que l'autre ; entre les deux pointes de cônes au milieu ça forme un triangle.

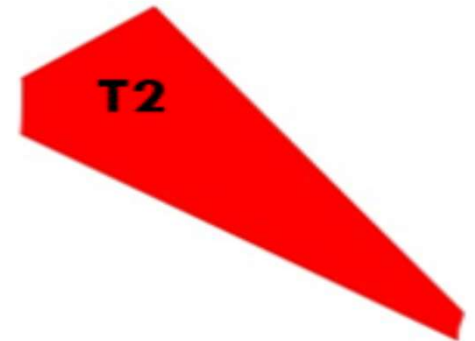
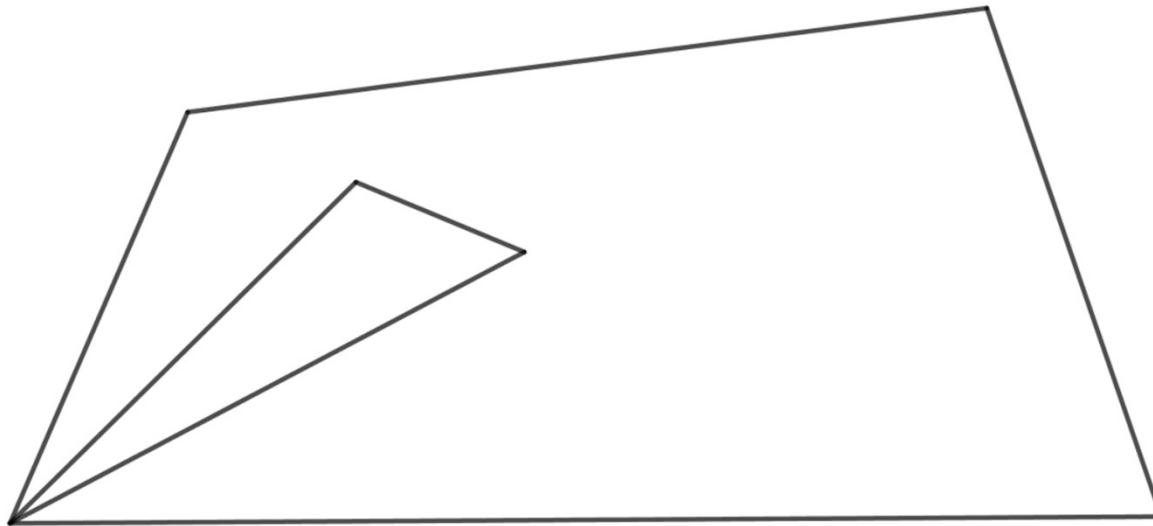
Je vois une sorte de rectangle avec des cônes à l'intérieur. Les pointes des cônes se touchent et il y a un cône plus maigre que l'autre. Entre les deux pointes de cônes au milieu ça forme un triangle.

## Phase 2

Compléter la figure ci-dessous pour reconstituer la figure modèle.  
Matériel : règle non graduée, gabarit de l'autre triangle avec les coins coupés.



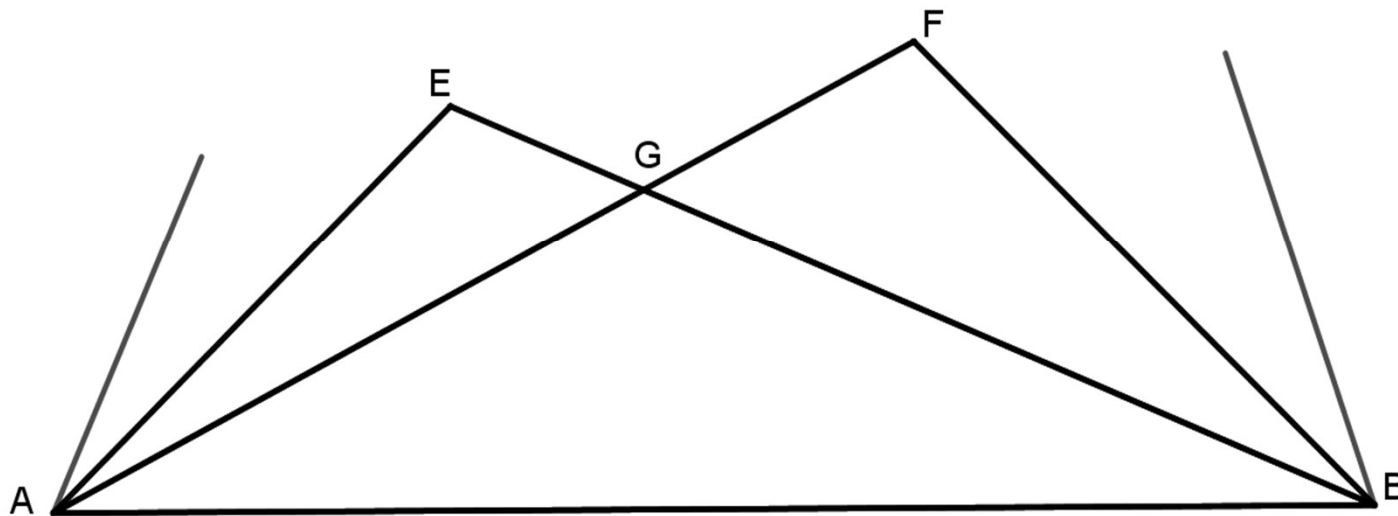
On peut profiter de la mise en commun pour remarquer que donner des noms faciliterait la communication et voir que nommer les sommets permet aussi de nommer les segments et les droites (objectif de 6ème).



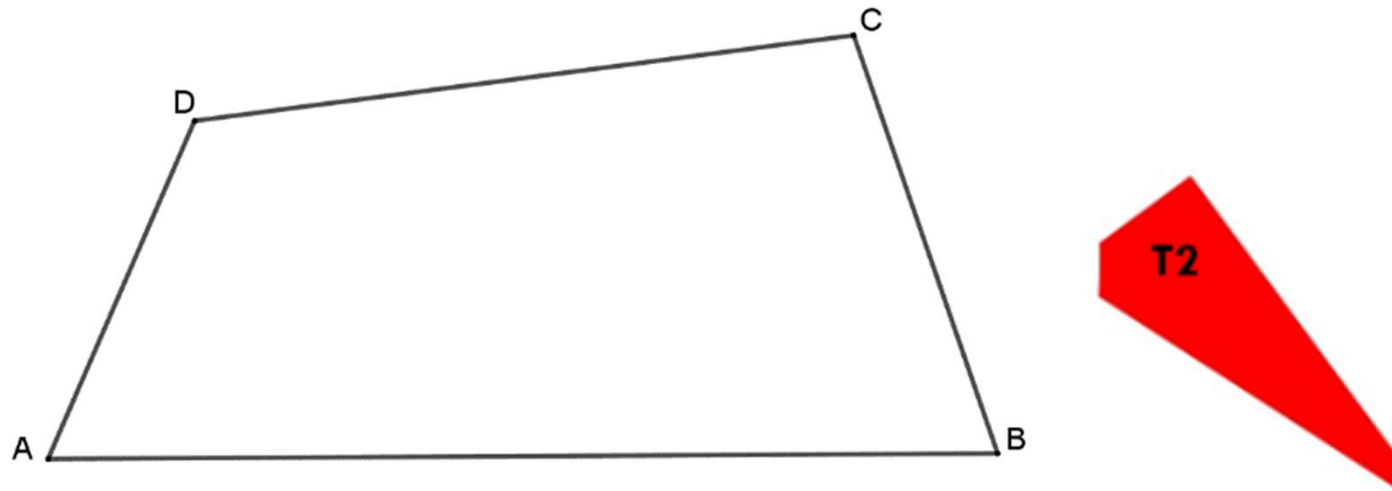
# Phase 3

Reproduction à une taille plus grande que le modèle

Si on a introduit des notations à la phase 2, on peut les utiliser à la phase 3 sur l'amorce pour que tout le monde ait les mêmes.

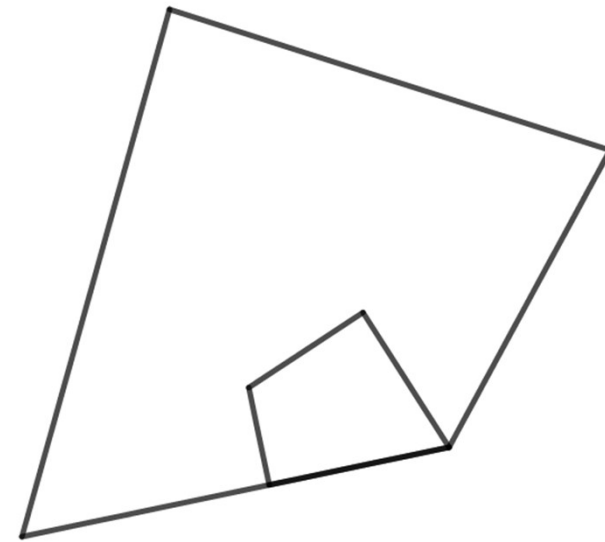
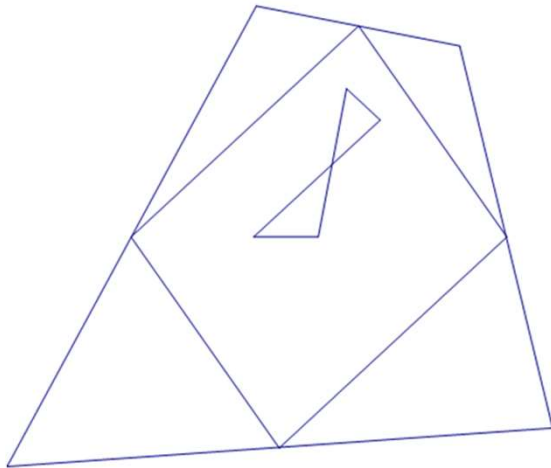


## Variante possible pour la phase 4 : réinvestissement des diagonales et report de longueur pour T1 (modèle à la même taille)



Cette variante pour la 6ème a été conçue pour limiter le travail matériel de l'enseignant : on n'a qu'un gabarit à fabriquer.

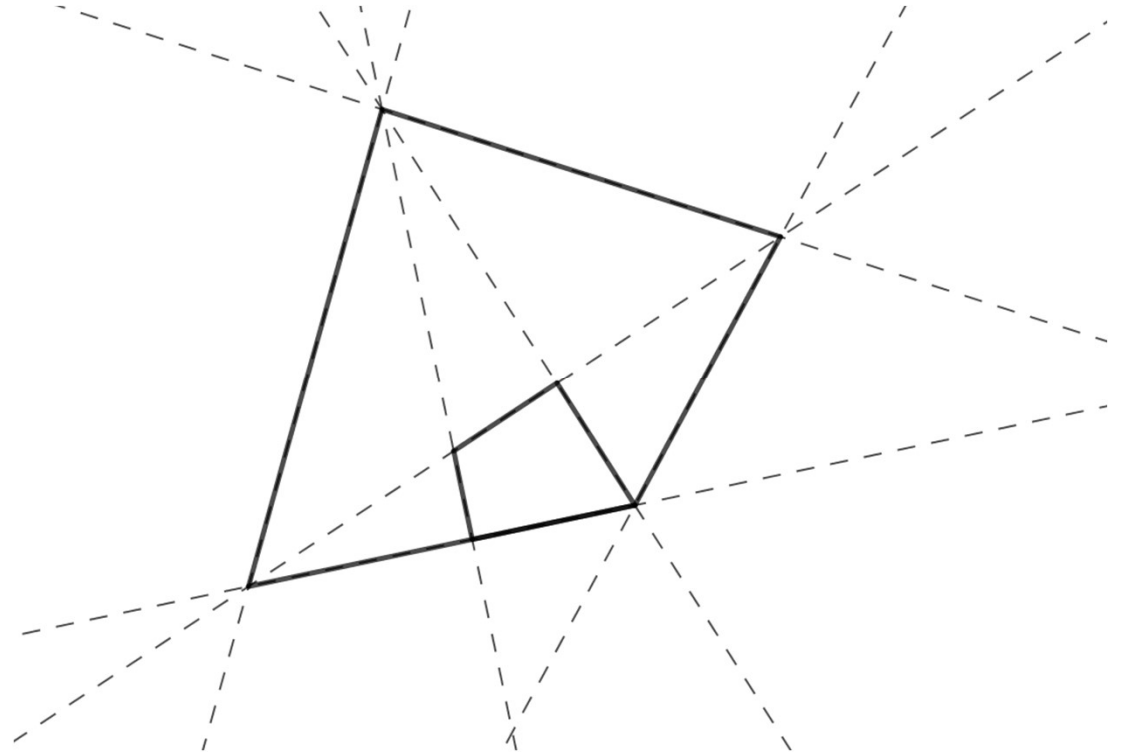
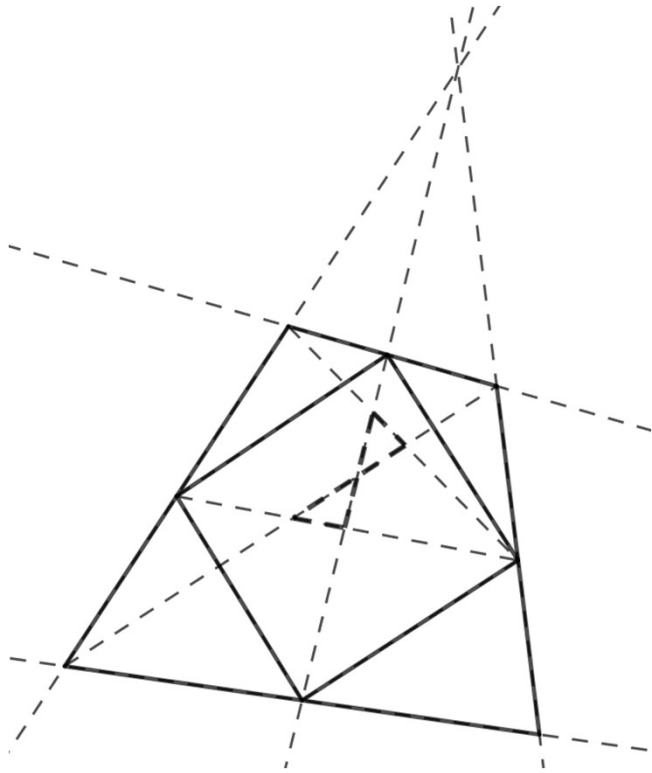
## Autres exemples



- Intersections et milieux

Diagonales et perpendiculaires

# Le réseau des droites





# Le langage

Les mots pour le dire

La désignation

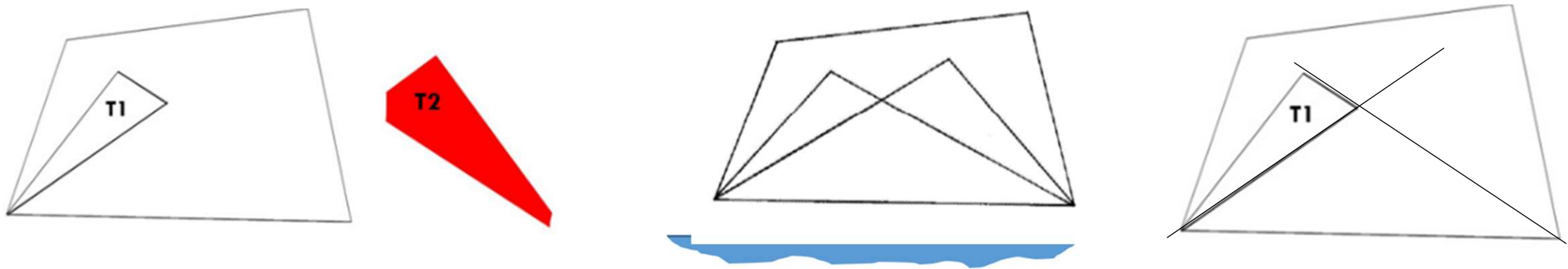
Les notations

La syntaxe

# Les mots pour le dire

- Introduire les mots en contexte dans une situation où les élèves ressentent le besoin d'exprimer leurs idées, leurs questions
  - Pendant une situation de recherche, pour formuler ce que les élèves connaissent déjà, identifier le problème
  - Dans les mises en commun (partielles ou finale) d'une situation de recherche
- Appropriation par les élèves et affinement dans des situations de communication orale ou communication écrite entre élèves.

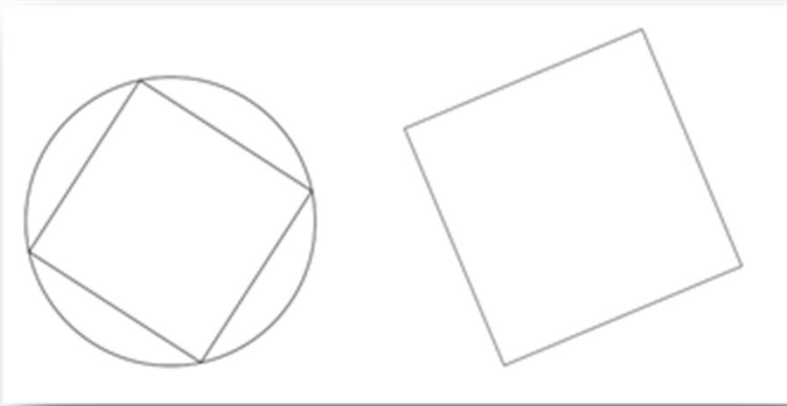
## Exemple : la mise en commun dans la phase 2 de la ressource du LÉA



- Identifier sur le modèle que les côtés des triangles sont alignés.
- Importance de formuler cet alignement (alignés, prolongement).
- Pour poser le gabarit de T2 il faut prolonger les côtés de T1. Il faut poser deux côtés du triangle.
- Ce sont les côtés de l'angle du triangle dont le sommet manque.
- Le vocabulaire est introduit ou précisé par l'enseignant au cours des mises en commun. Il sera repris par les élèves dans des situations de communication orales puis écrites.

• Un exemple de situation de formulation verbale écrite

Extrait de Mathé et al. (2021) Grand N n° 108



Message

Pour retrouver la figure complète, tu devras :

---

---

Commentaires

---

Consigne : « Vous allez commencer par reproduire la figure modèle, en complétant l’amorce qui vous est donnée. Pour ce faire, vous avez le droit d’utiliser votre compas, une règle (non graduée) . Vous devez ensuite rédiger un message qui devra permettre à quelqu’un qui n’a pas vu votre figure modèle de reproduire cette figure. Ce binôme disposera des mêmes instruments que vous et d’une amorce semblable. Attention, l’amorce ne sera peut-être pas à la même échelle ni disposée selon la même orientation que la vôtre. »

# Un exemple de situation de formulation verbale écrite

Extrait de Mathé et al. (2021) Grand N n° 108

<b>Langage technique</b> <i>Comment je trace</i>	<b>Langage géométrique</b> <i>Ce que je dois tracer</i>
<p>Avec le compas, je mets la pointe sur le centre ... j'écarte le compas pour que la distance entre la pointe et la mine soit [le rayon]</p>	<p>Un cercle de centre ... et de rayon ... (une longueur)</p>
<p>Avec le compas, je mets la pointe sur le centre j'écarte le compas pour que la pointe et la mine soient placées aux deux extrémités du rayon</p>	<p>ou Un cercle de centre ... (un point) et de rayon ... (un segment)</p>
<p>Avec le compas, je mets la pointe sur le centre j'écarte le compas placer la mine sur le point du cercle donné.</p>	<p>ou Un cercle de centre... (un point) et passant par ... (un point)</p>

# Ecrire un programme de construction

- Identifier les objets géométriques
- Identifier des relations entre des objets géométriques
- Distinguer ce qui est défini de ce qui ne l'est pas encore et qu'il faut définir à partir de ce que l'on a.
- Changer de point de vue sur les objets.

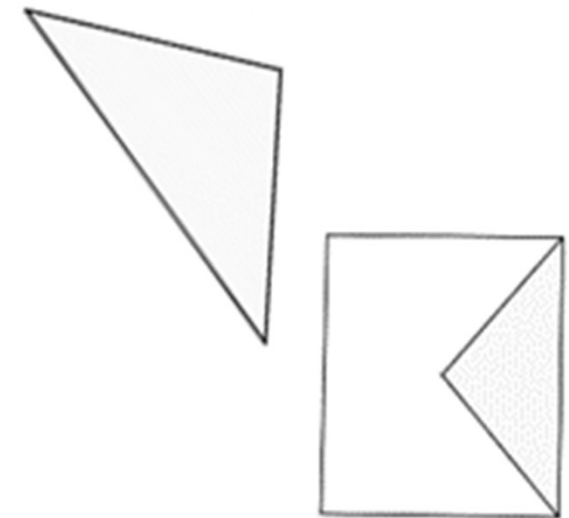
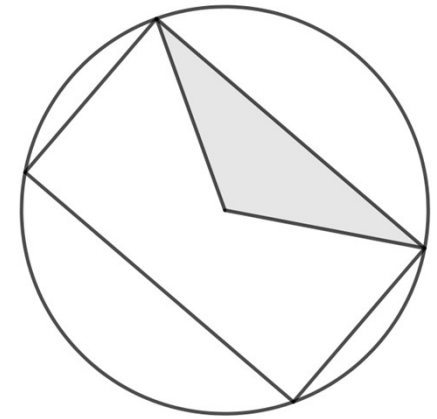
# Ecrire un programme de construction

## Instruments disponibles

- règle et compas, éventuellement reporteur de longueur

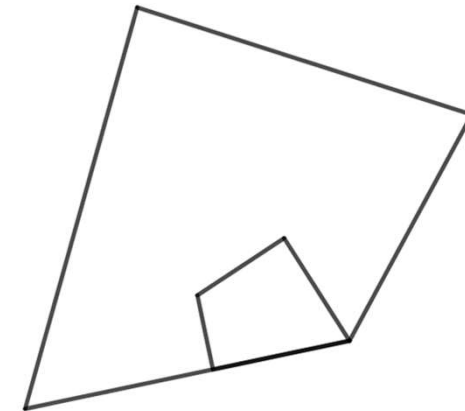
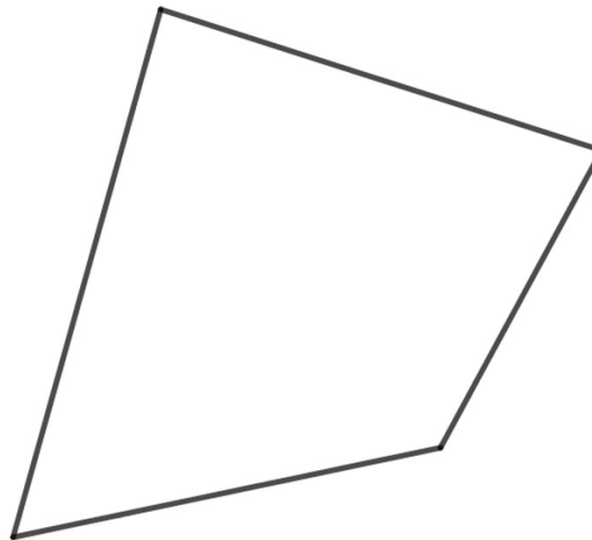
Pour restaurer puis écrire un programme de construction, il faut

- Voir la base du triangle isocèle comme côté du rectangle, les côtés égaux du triangle comme partie des diagonales,
- Identifier les sommets manquants du rectangle comme extrémités des diagonales du rectangle en les traçant sur le modèle.
- Voir le centre du cercle comme intersection des diagonales ou sommet principal du triangle isocèle.
- On peut reconstruire le rectangle d'abord
  - Construire les diagonales sur l'amorce comme prolongement d'une égale longueur au-delà du sommet des côtés égaux du triangle isocèle. **Deux reports de longueurs.**
  - Tracer le cercle centré à l'intersection des diagonales et passant par les sommets.
- Ou bien le cercle d'abord
  - Identifier le sommet principal du triangle isocèle comme centre du cercle et les autres sommets comme points du cercle.
  - Trouver les autres sommets du rectangle comme intersections du cercle et des prolongements des côtés égaux du triangle. **Pas besoin de report de longueur.**
- **Un même point, un même segment sont vus avec des significations différentes. Il faut changer de point de vue.**



# Ecrire un programme de construction

- Identifier les diagonales
  - Perpendiculaire à un segment passant par un point
- Relation ternaire





# Ecrire un programme de construction

- Problème de construction : Soit ABCD un rectangle. Construire un losange AFCE tel que le point E soit sur [CD] et le point F sur [AB].



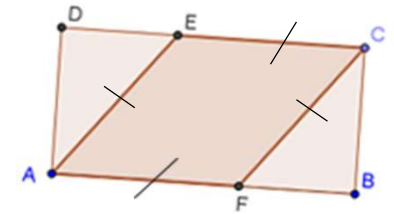
# Ecrire un programme de construction

- Problème de construction : Soit ABCD un rectangle. Construire un losange AFCE tel que le point E soit sur [CD] et le point F sur [AB].
- Pour des 6ème ou des 5ème, quand on a travaillé le losange

Reproduire la figure suivante.  
On a déjà tracé le rectangle.

Coût des instruments :

- Règle : gratuit
- Equerre : 2 points
- Report d'angle : 10 points



# Ecrire un programme de construction

- Problème de construction : Soit ABCD un rectangle. Construire un losange AFCE tel que le point E soit sur [CD] et le point F sur [AB].
- Pour des 6ème ou des 5ème, quand on a travaillé le losange

Reproduire la figure suivante.  
On a déjà tracé le rectangle.

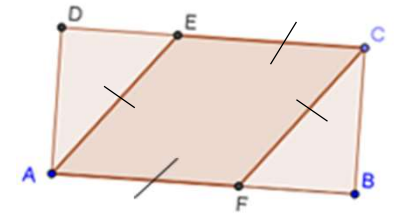
Coût des instruments :

- Règle : gratuit
- Equerre : 2 points
- Report d'angle : 10 points

En situation de communication

Ecrire un message pour que le récepteur puisse reproduire la figure. On ne connaît pas le rectangle du récepteur mais on veut que le losange soit disposé de la même manière par rapport au rectangle.

Identifier le centre du losange comme le centre du rectangle.  
Savoir que les diagonales du losange sont perpendiculaires.



# Géométrie matérielle / géométrie théorique

- Rupture entre géométrie instrumentée et géométrie de la démonstration
- Nature des objets, mode de validation des énoncés
- Cependant les objets de la géométrie théorique ne sont pas sans rapport avec ceux de la géométrie physique.
- Quels liens entretiennent objets et pratiques de chacun de ces rapports à la géométrie ?
- Comment penser une géométrie théorique au collège qui prenne appui sur la géométrie de l'école ?
- Comment traiter l'espace graphique des figures matérielles en dimension 2, interface entre la géométrie physique et l'espace géométrique théorique ? Source de malentendus mais espace d'expérimentation pour la géométrie théorique.
- **L'outillage des élèves en théorèmes et définitions n'est pas neutre relativement aux capacités cognitives nécessaires pour analyser les figures.**
- Prendre la question de la continuité des apprentissages géométriques sur la scolarité obligatoire par les deux bouts.
- Deux suites de travail sur la géométrie des années 2000
  - LÉA production de ressources pour le cycle 3 : 2014-2020
  - **Groupe IREM cycle 4 : depuis 2017.**

# Quels outils de démonstration pour la géométrie au collège ?

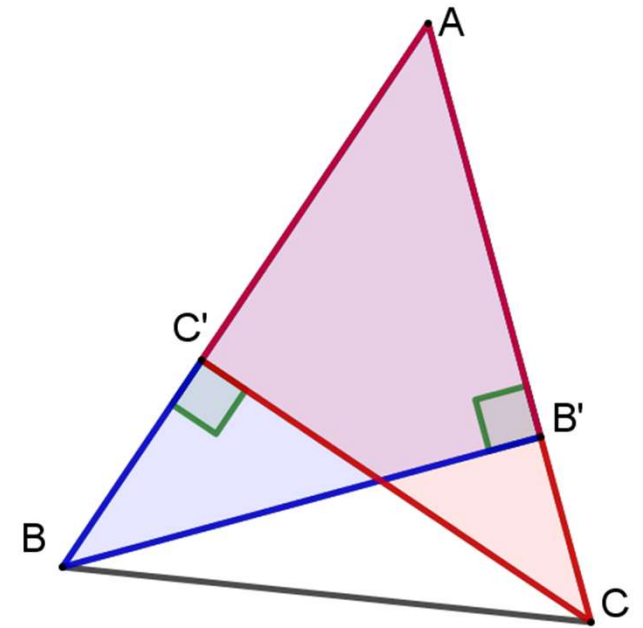
- Si l'on excepte la période 1969-1985, deux grandes axiomatiques ont fondé l'enseignement secondaire
  - Axiomatique d'Euclide revue notamment par Legendre et Lacroix, jusqu'au début du 20ème siècle
  - Une axiomatique appuyée sur les transformations en admettant les propriétés de la symétrie orthogonale, explicitée par Cousin-Fauconnet en 1995

# Quels outils de démonstration pour la géométrie au collège ?

- Si l'on excepte la période 1969-1985, deux grandes axiomatiques ont fondé l'enseignement secondaire
  - Axiomatique d'Euclide revue jusqu'au début du 20ème siècle notamment par Legendre et Lacroix
  - Une axiomatique appuyée sur les transformations en admettant les propriétés de la symétrie orthogonale, explicitée par Cousin-Fauconnet en 1995
- Le niveau de conceptualisation des objets géométriques et d'analyse des figures exigé par une démonstration varie suivant l'appareillage théorique dont on dispose.
  - Un exemple : Que peut-on dire d'un triangle dont deux hauteurs sont égales ?
  - Pas facile de faire une figure avant d'avoir résolu le problème

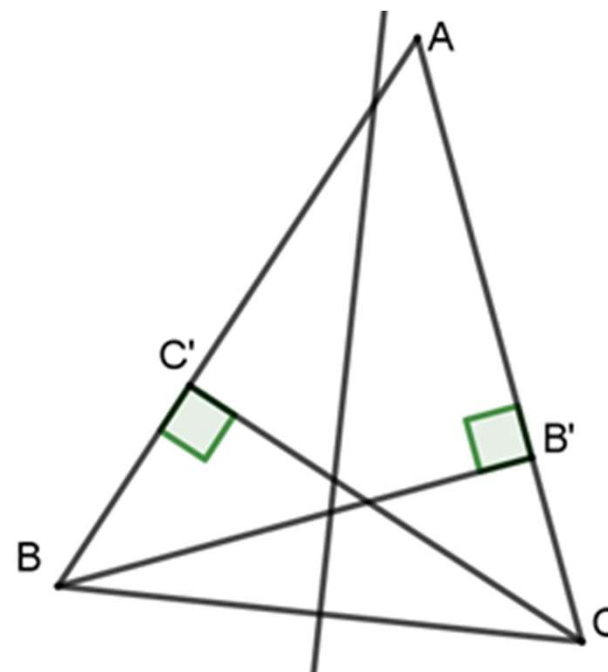
# Un exemple : triangle dont deux hauteurs sont égales

- Démonstrations avec les cas d'égalité
  - Triangles  $ABB'$  et  $ACC'$  : cas ACA conclusion  $AB = AC$ .
  - Triangles  $BCC'$  et  $BCB'$  : cas spécifique au triangle rectangle.  
Conclusion : égalité des angles en B et C.
- Difficultés de visualisation des objets :
  - triangles qui se chevauchent mais
  - compatible avec une vision surface : les côtés sont des bords de la surface et les angles des coins
  - Pas d'élément à ajouter à la figure



## Un exemple : triangle dont deux hauteurs sont égales

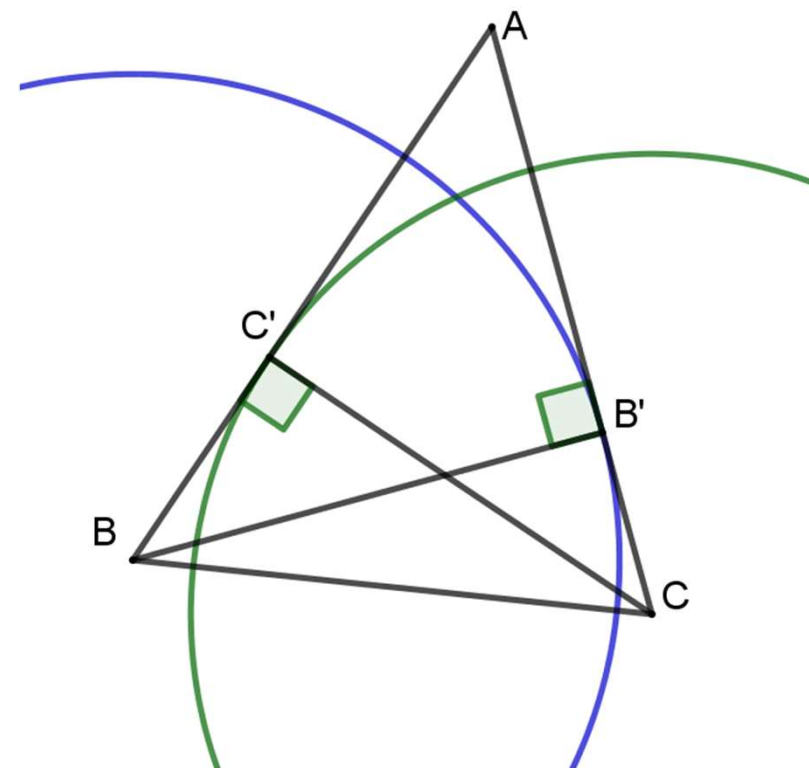
- Démonstration par la symétrie axiale
  - la médiatrice (d) de [BC] est axe de symétrie de la figure.
  - Il faut montrer que  $B'$  et  $C'$  sont symétriques par rapport à (d) et que  $A \in (d)$ .
- On a intérêt à faire une figure fautive !





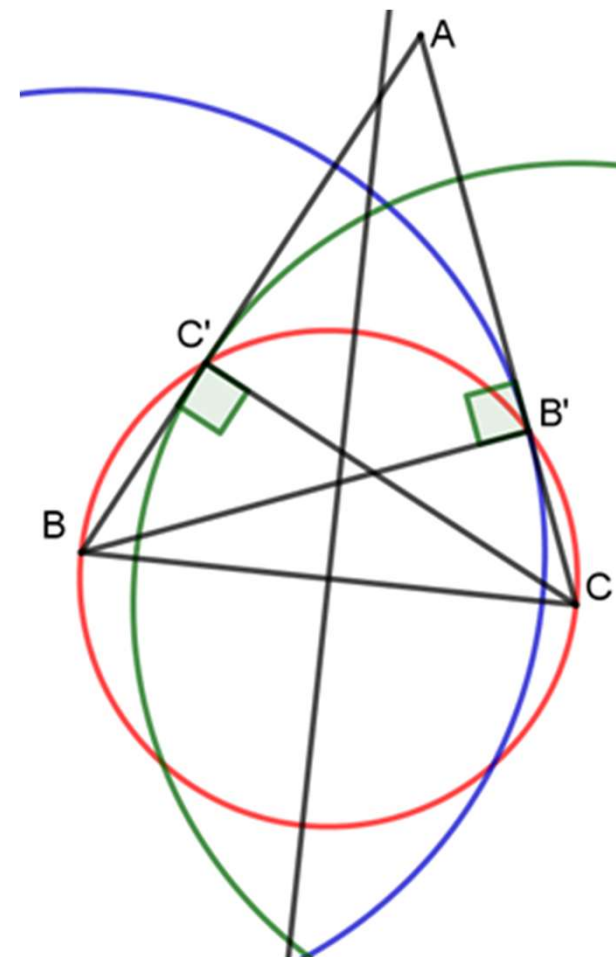
# Un exemple : triangle dont deux hauteurs sont égales

- Démonstration par la symétrie axiale
  - la médiatrice (d) de [BC] est axe de symétrie de la figure.
  - Il faut montrer que  $B'$  et  $C'$  sont symétriques par rapport à (d) sans utiliser que  $A \in (d)$ .
  - Voir  $B'$  et  $C'$  comme intersections de deux lignes autres que les côtés
  - Comment trouver ces lignes ?
  - Les hauteurs sont égales donc  $B'$  et  $C'$  sont respectivement sur un cercle bleu centré en B ou vert centré en C de même rayon.
  - Le cercle bleu centré en B a pour image le cercle vert centré en C et réciproquement.



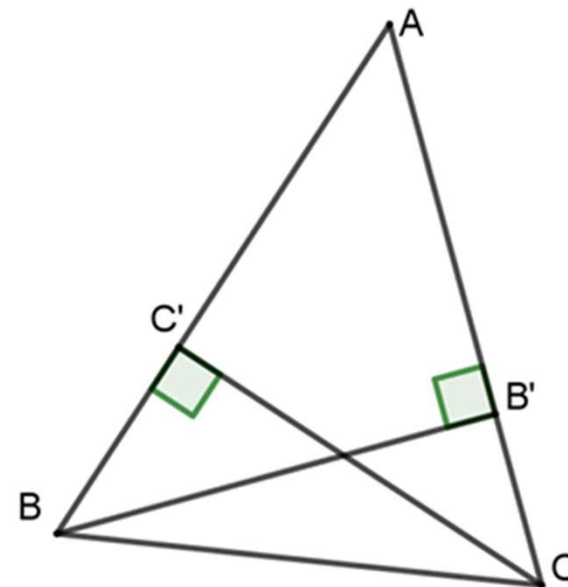
# Un exemple : triangle dont deux hauteurs sont égales

- Démonstration par la symétrie axiale
  - la médiatrice (d) de [BC] est axe de symétrie de la figure.
  - Il faut montrer que  $B'$  et  $C'$  sont symétriques par rapport à (d) sans utiliser que  $A \in (d)$ .
  - Voir  $B'$  et  $C'$  comme intersection de deux lignes autres que les côtés.
  - Comment trouver ces lignes ?
  - Les hauteurs sont égales donc  $B'$  et  $C'$  sont respectivement sur un cercle bleu centré en B ou vert centré en C de même rayon.
  - Le cercle bleu centré en B a pour image le cercle vert centré en C et réciproquement.
  - $B'$  et  $C'$  sont tous les deux sur le cercle rouge de diamètre [BC].
  - Le cercle de diamètre BC est invariant dans la symétrie.



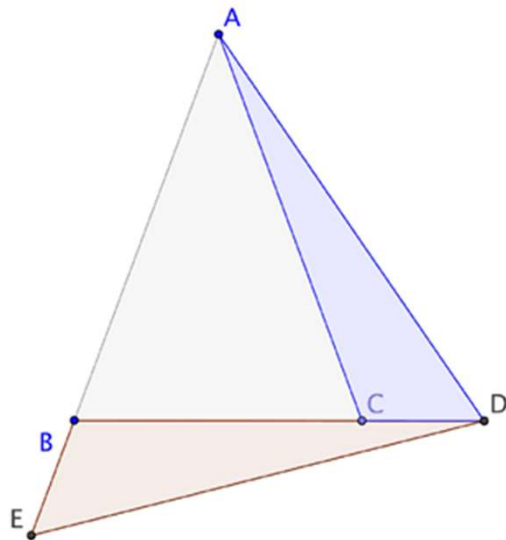
## Un exemple : triangle dont deux hauteurs sont égales

- Une autre démonstration très simple !
- Le calcul de l'aire de  $ABC$  de deux manières !
- $BB' \times AC = CC' \times AB$



# Recherche d'une progression cohérente

- Actuellement des îlots de démonstration autour d'un thème mais sans souci d'une cohérence d'ensemble
- Groupe géométrie de l'IREM de Paris : construction d'une progression de la géométrie au collège appuyée sur les cas d'égalité des triangles avec, sous-jacente, l'axiomatique d'Euclide un peu adaptée (Brochure n°100)
- <http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS20011.pdf>



# Quelques réflexions autour de la symétrie orthogonale

Figure symétrique et figures symétriques par rapport à un axe

Vérifier qu'une figure est symétrique et trouver son axe de symétrie

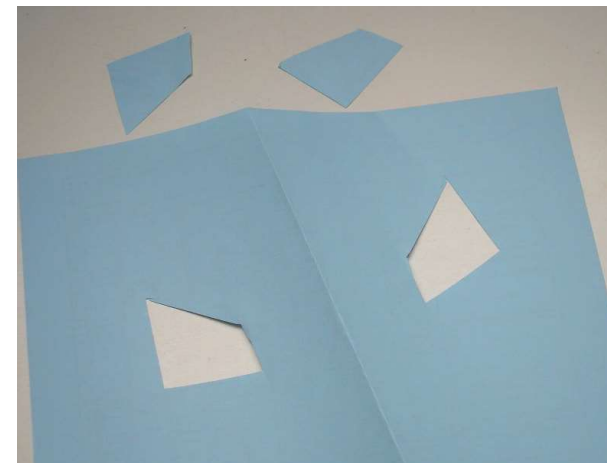
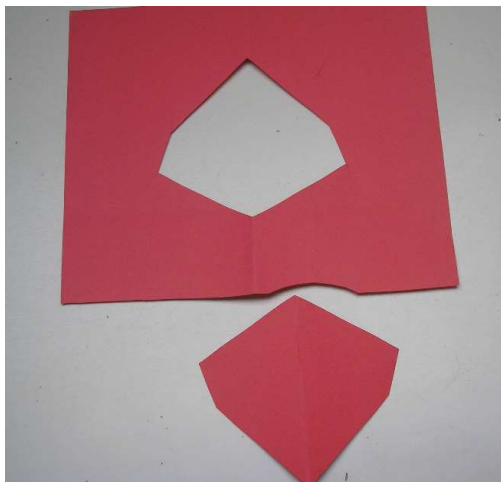
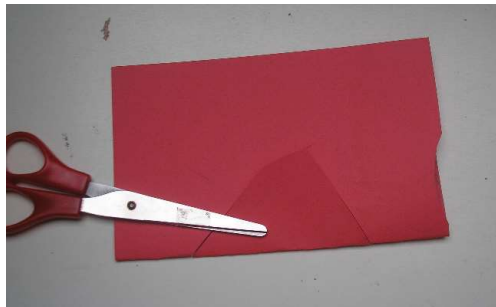
Symétrie orthogonale et pliage

Importance de la notion de points homologues

Introduire la symétrie orthogonale en sixième par une restauration de figure

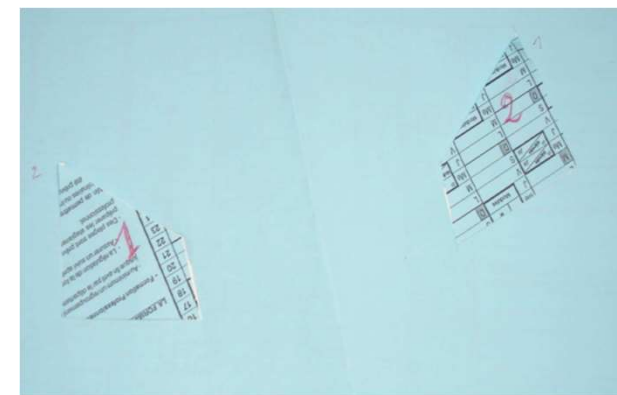
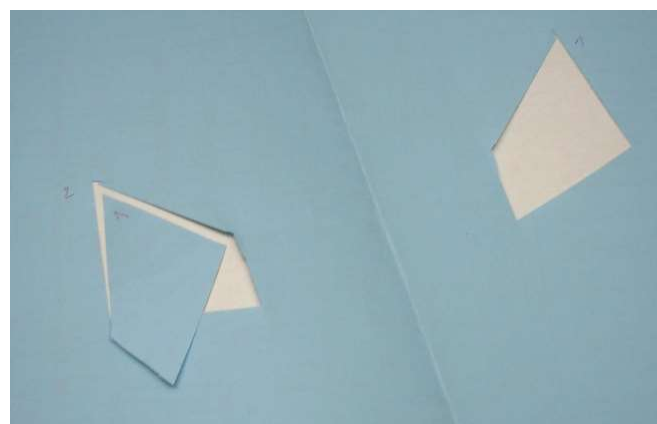
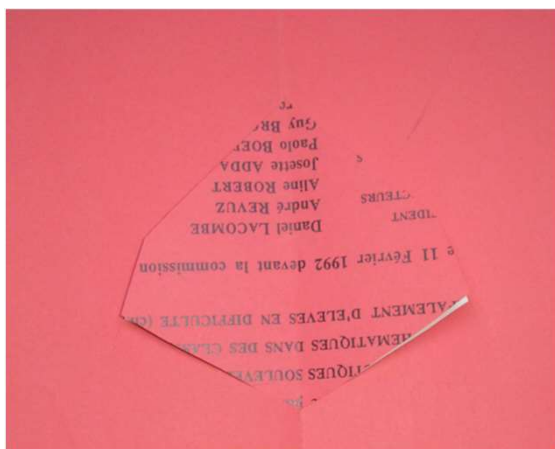
# La symétrie sur des objets plats de l'espace

- Une expérience cruciale avec du papier biface : on plie une feuille et on découpe un polygone à travers les deux épaisseurs. Suivant l'endroit où on coupe, on obtient un morceau ou deux morceaux : Si on coupe le pli, on a un morceau ; si on ne le coupe pas, on a deux morceaux.
- Chacun des morceaux revient dans son empreinte.
- Que se passe-t-il quand on retourne les morceaux ?



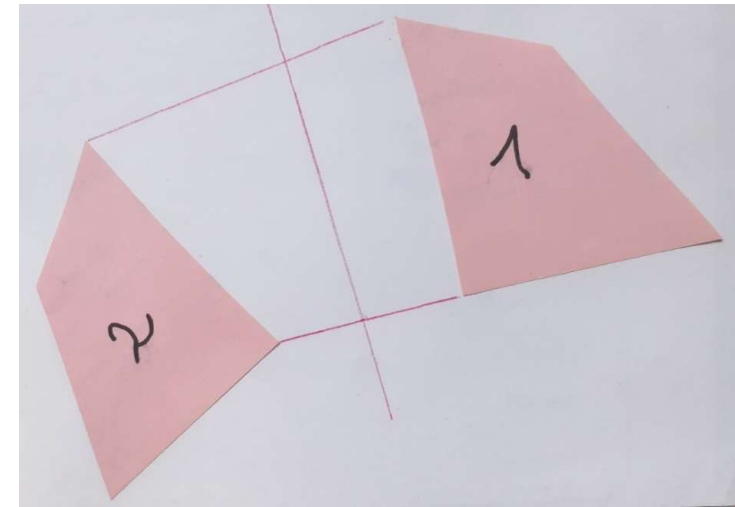
# La symétrie comme propriété d'un objet aplati de l'espace ou relation entre deux objets de l'espace

- Le morceau rouge rentre dans son empreinte à l'endroit et à l'envers.
- Chaque morceau bleu rentre dans une seule empreinte à l'endroit ; il rentre dans l'autre empreinte à l'envers.
- Le morceau 2 se superpose avec le morceau 1 après retournement mais ce sont deux objets de l'espace différents (ce n'est pas la même face qui est imprimée).
- Peut-on dire que le morceau 2 est symétrique du morceau 1 ?



# La symétrie comme propriété d'un objet aplati de l'espace ou relation entre deux objets de l'espace

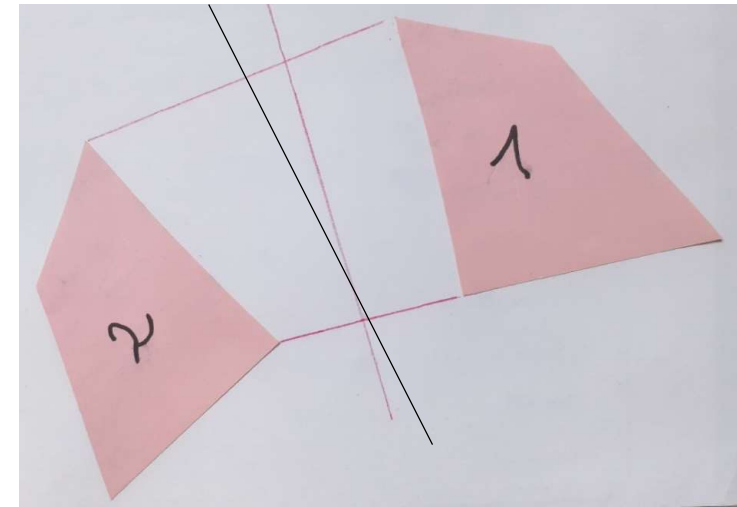
- Si on les recolle n'importe comment sur une feuille, en général il n'a pas de symétrie qui les échange. La transformation qui fait passer de l'une à l'autre est une symétrie glissée.





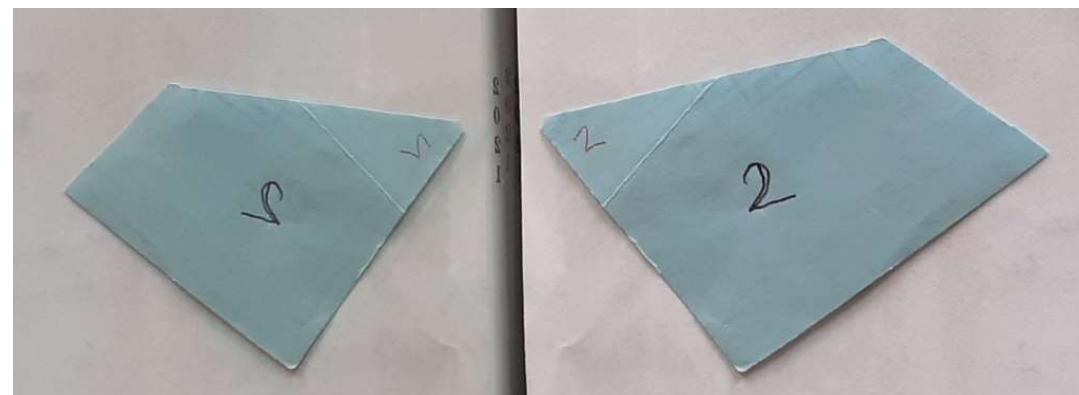
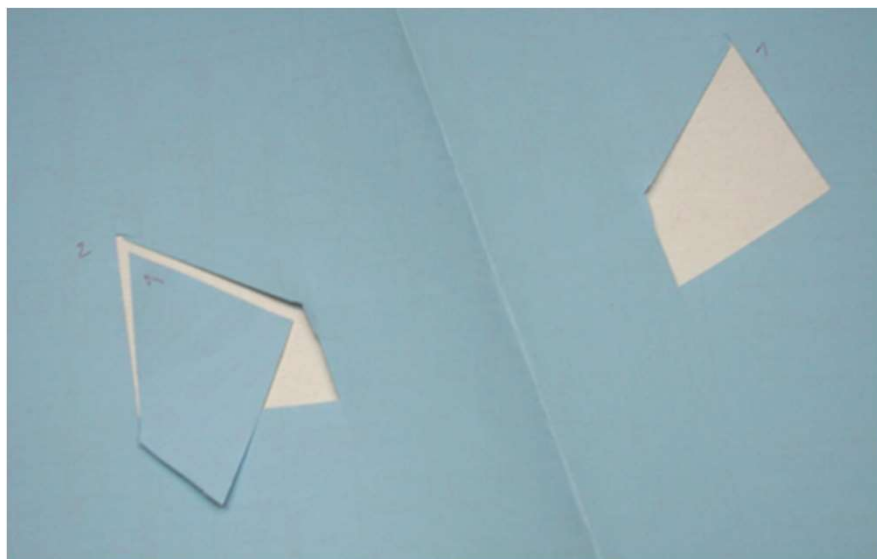
## La symétrie comme propriété d'un objet aplati de l'espace ou relation entre deux objets de l'espace

- Si on les recolle n'importe comment sur une feuille, en général il n'a pas de symétrie qui les échange. La transformation qui fait passer de l'une à l'autre est une symétrie glissée.
- La figure découpée dans la feuille rouge est symétrique (comme objet plat ou comme forme évidée dans la feuille)
- Les figures représentées par les formes évidées dans la feuille bleue sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe de pliage mais on ne peut pas dire que les deux formes bleues sont symétriques l'une de l'autre, seulement que chacune des figures tracées avec une des formes est la retournée de celle tracée avec l'autre.



On peut parler d'une figure symétrique sans spécifier l'axe mais dire que deux figures sont symétriques l'une de l'autre n'a un sens que quand on a spécifié l'axe.

## Symétrie par rapport à un plan ou déplacement dans l'espace ?



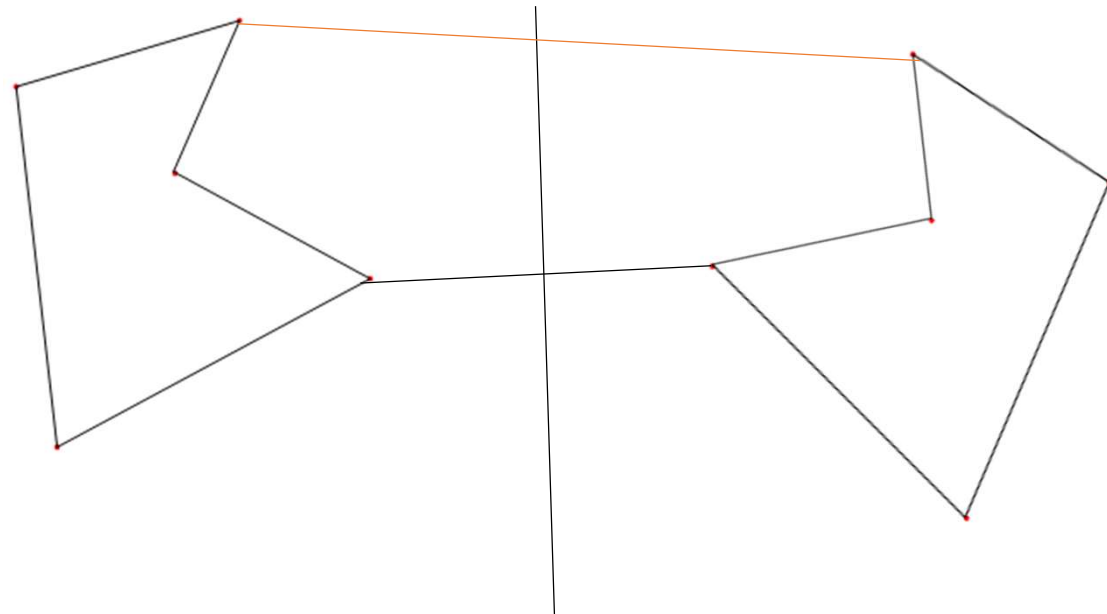
A droite le morceau 2 et son reflet dans le miroir, trace d'une symétrie par rapport à un plan  
A gauche le pli amène le contour du morceau 1 sur le contour du morceau 2, trace d'une rotation autour d'un axe dans l'espace mais c'est l'envers de la feuille qui est visible. Les morceaux 1 et 2 sont deux objets différents. Pour avoir la symétrie plane comme modèle du pliage, il faut considérer que les deux côtés de la feuille n'en font qu'un.

# Vérifier une symétrie dans la géométrie matérielle quand l'axe n'est pas donné et éventuellement le trouver

- Méthode 1 : on décalque la figure, on retourne le calque et on cherche à faire coïncider la figure retournée avec la figure initiale. (exemple sur transparent)
  - Il faut trouver des éléments homologues : repérage des sommets, des angles, des longueurs.
- Définition : une figure symétrique est égale à sa retournée. On n'identifie pas nécessairement l'axe.
- Méthode 2 : on identifie dans la figure deux parties qui pourraient se superposer après un pliage du calque. Comment plier ?
  - En faisant coïncider deux points : tout le reste doit se superposer.
  - Le pli définit l'axe.
  - Trouver des points homologues par repérage d'angles, de longueurs égales.
- Définition : une figure admet un axe de symétrie (est symétrique par rapport à un axe) si elle se décompose en deux parties telles qu'en pliant selon cet axe, les deux parties se superposent.

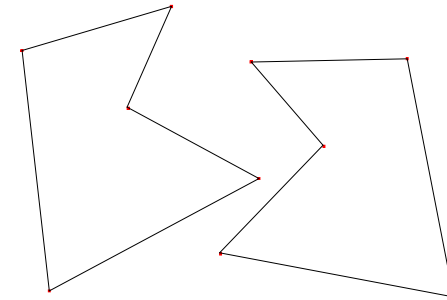
# Vérifier une symétrie dans la géométrie matérielle

- Plus difficile quand la réponse est négative.



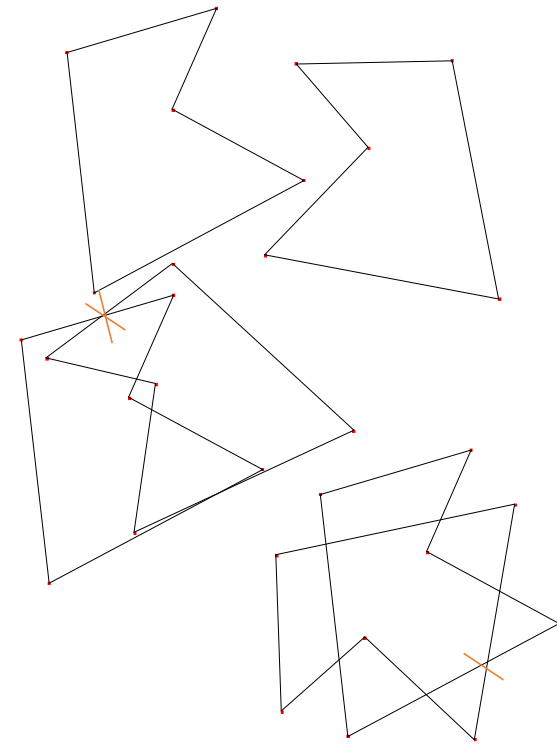
# Produire une figure symétrique ou comment reposer le morceau bleu découpé ?

- Avec un calque qu'on retourne : où placer la retournée pour obtenir une figure symétrique ?  
Si on place n'importe où, on n'a pas symétrie.



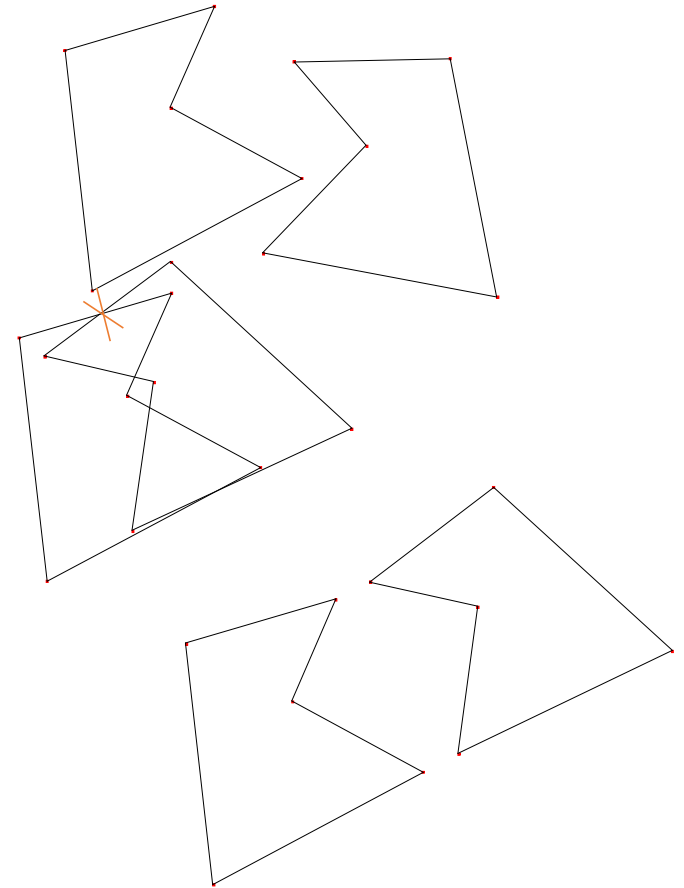
# Produire une figure symétrique ou comment reposer le morceau bleu découpé ?

- Avec un calque qu'on retourne : où placer la retournée pour obtenir une figure symétrique ? Si on place n'importe où, on n'a pas symétrie.
- Il faut ajouter un point sur la figure qu'on fait coïncider avec le point correspondant de la retournée (point sur les figures ou extérieur)
- Un point suffit parce qu'une symétrie glissée qui a un point fixe est une symétrie.



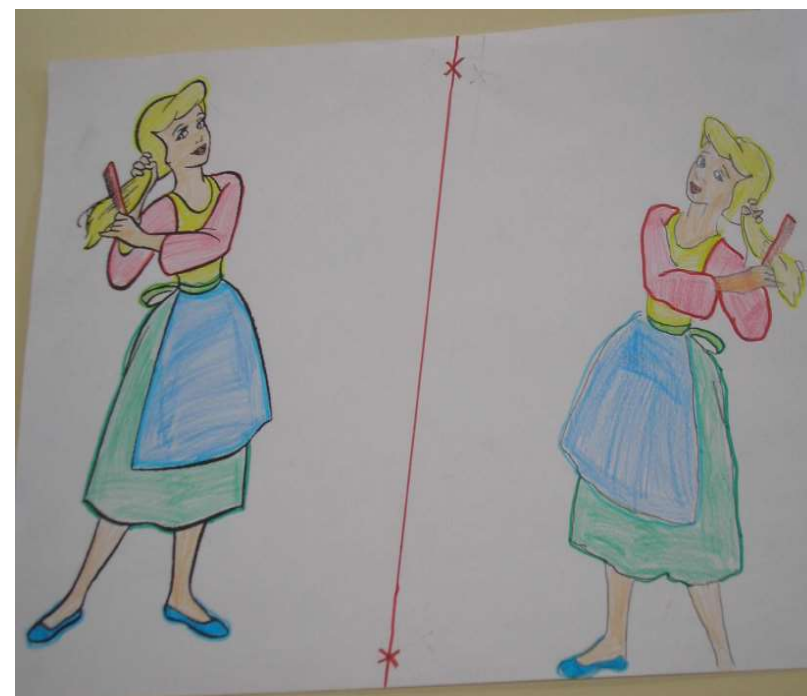
# Produire une figure symétrique ou comment reposer le morceau bleu découpé ?

- Avec un calque qu'on retourne : où placer la retournée pour obtenir une figure symétrique ? Si on place n'importe où, on n'a pas symétrie.
- Il faut ajouter un point sur la figure qu'on fait coïncider avec le point correspondant de la retournée (point sur les figures ou extérieur)
- Un point suffit parce qu'une symétrie glissée qui a un point fixe est une symétrie.
- On a une figure symétrique mais pas forcément celle dont on était parti.
- Si on veut reproduire une figure symétrique, il faut la moitié de la figure et deux couples de points qui se correspondent.



# Produire une figure symétrique

- Produire la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à un axe donné avec un calque  
Problème du positionnement du calque : il faut plier sans bouger le calque ou il faut décalquer l'axe et prendre un repère sur l'axe.





# L'usage géométrique du papier calque comme instrument

La notion géométrique qui modélise la superposabilité avec le papier calque est celle d'isométrie : positive (translation, rotation) si on superpose sans retourner le calque, négative (symétrie, symétrie glissée) s'il y a retournement du calque avant de superposer.

Pour réaliser la superposition des figures, on est amené à identifier des éléments D1 et D2 des figures et mettre en œuvre des propriétés fondamentales :

- Si on fait coïncider deux segments qui se correspondent, les figures doivent se superposer entièrement (deux points extrémités d'un segment et leurs images, extrémités d'un segment de même longueur, déterminent exactement une isométrie positive et une isométrie négative).
- S'il y a symétrie axiale, deux points qui se correspondent déterminent l'axe, si on plie en les faisant coïncider, tout le reste doit se superposer.
- Si on a pu superposer une figure sur elle-même en retournant le calque, il y a symétrie axiale ; si on a seulement décalqué la moitié de la figure, il faut avoir repéré deux points fixes ou deux couples de points qui se correspondent pour reposer le calque.
- Langage géométrique (point, segment) mais aussi langage technique sur le matériel pour faire de la géométrie (superposer, faire coïncider)...

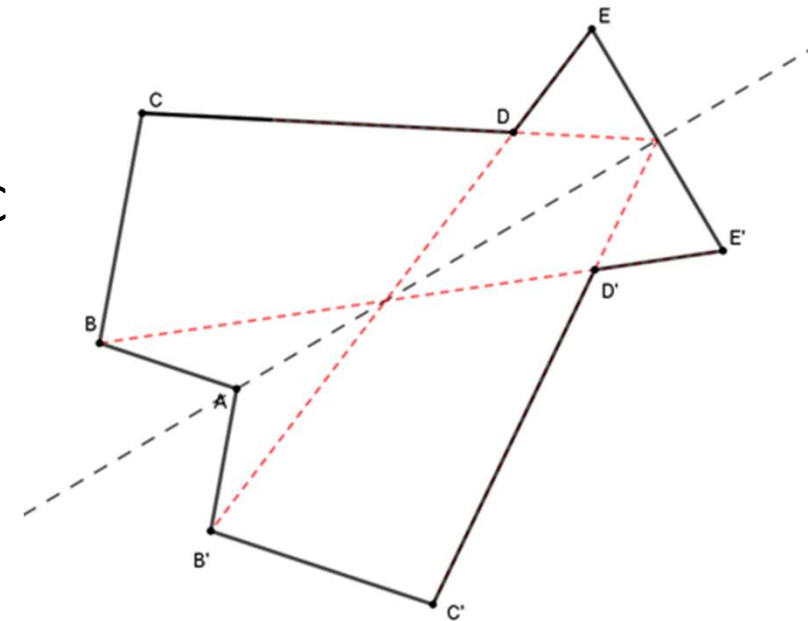
# Des jalons pour une progression sur la symétrie orthogonale

1. La symétrie comme propriété d'un objet plus ou moins aplati de l'espace (dès la maternelle).  
Deux conceptions :
  - Retournement et retour dans l'empreinte : Le recto et le verso sont « pareils » (espace assumé) ; variable didactique : objets bifaces.
  - Pliage (peinture ou découpages) : On a deux moitiés qu'on peut superposer (faire coïncider) espace caché dans le mouvement
2. Reconnaître, compléter, produire une figure symétrique tracée sur papier uni, par pliage ou retournement avec calque.
3. Émergence de l'axe de symétrie et prise en compte de l'aspect transformation.
4. Vérifier ou produire une symétrie sans sortir du plan de la feuille.
  - Avec un quadrillage
  - Avec des instruments

Ne pas sortir du plan de la feuille demande une déconstruction dimensionnelle des figures symétriques pour expliciter des relations entre des éléments de dimension 1 ou 0.

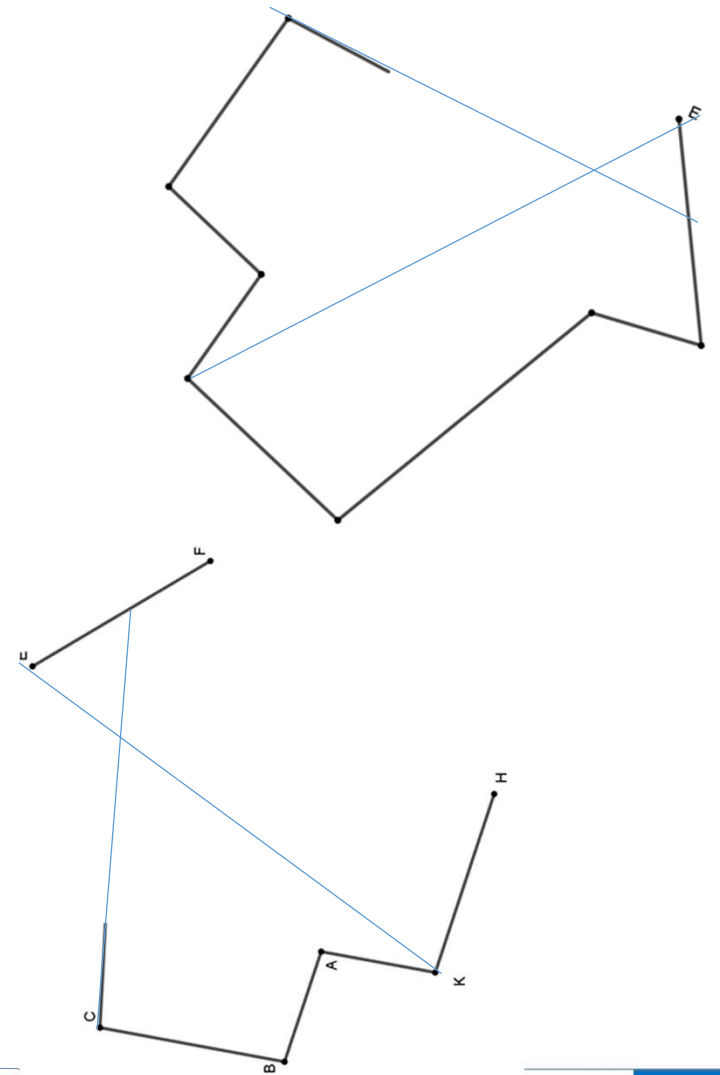
# Introduire la symétrie orthogonale par restauration de figure. Choix de la figure. Phase 1

- En plus de l'axe de symétrie, la figure vérifie les relations suivantes :  $[ED]$  aligné avec  $B'$  et  $[CD]$  aligné avec le milieu  $I$  de  $[EE']$ . En revanche  $A$  n'est pas aligné avec  $C$  et  $B'$  ni avec  $C$  et  $C'$ .
- Phase 1. Décrire la figure et repérer des propriétés.
  - Attendus : polygone, symétrie
  - Demander de rechercher l'axe de symétrie
  - $A$  attendu et le milieu de  $[EF]$
  - Comment trouver le milieu de  $[EF]$  ... sans plier et sans mesurer ?
  - Demander de rechercher des alignements de sommets
  - Nommer le milieu
  - Confirmer les propriétés mises dans la construction



## Phase 2 - Phase 3

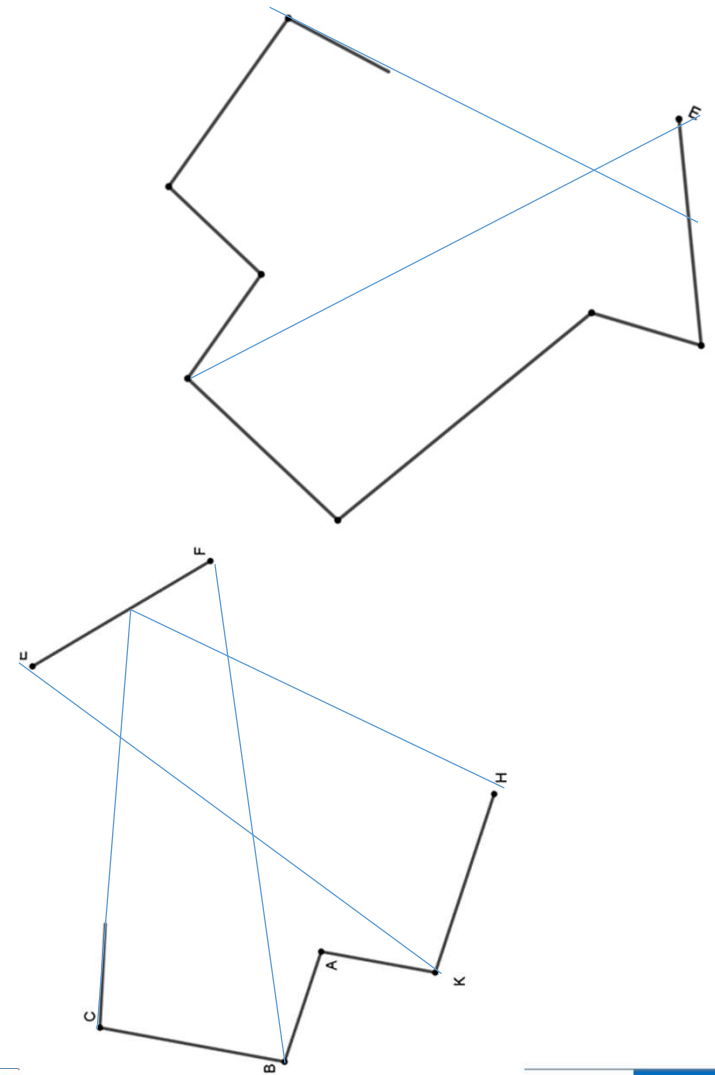
- Utiliser les alignements et les connaissances spatiales des élèves sur la symétrie pour restaurer la figure.
- Phase 2 : E nommé pour indiquer que le segment [EF] est entier. Nommer les autres points pour que les élèves fassent la relation entre le modèle et la figure à restaurer (sommets présents ou non).



## Phase 2 - Phase 3

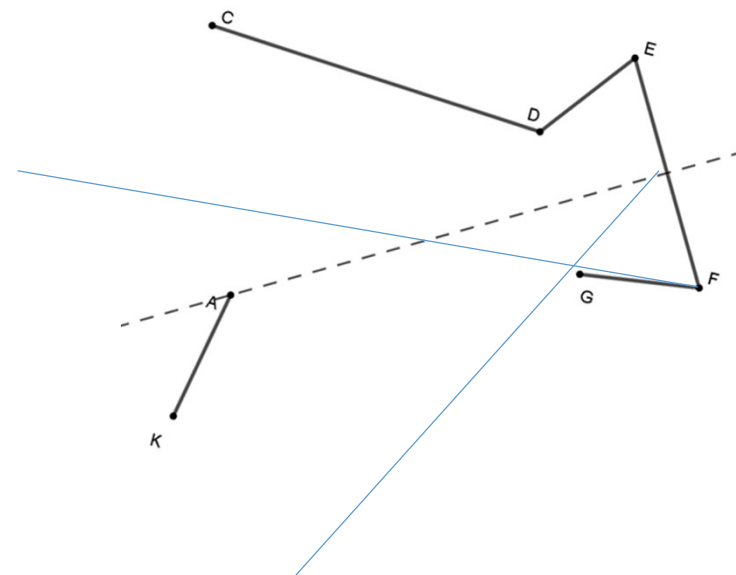
- Utiliser les alignements et les connaissances spatiales des élèves sur la symétrie pour restaurer la figure.
- Phase 2 : E nommé pour indiquer que le segment [EF] est entier. Nommer les autres points pour que les élèves fassent la relation entre le modèle et la figure à restaurer (sommets présents ou non).
- Possibilité de trouver I par prolongement
- Dégager la relation entre des droites symétriques
- Conclusion des deux phases

Des droites symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe se coupent sur l'axe. Les segments symétriques ont la même longueur



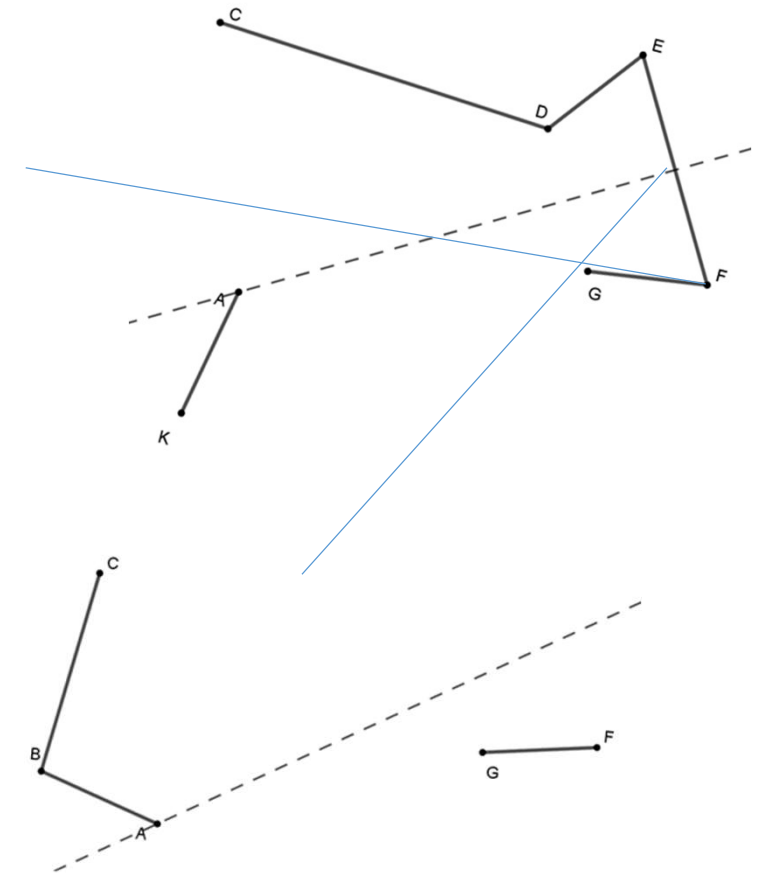
## Phase 4 – Phase 5

- On a laissé des segments entiers.
- Phase 4 : Il ne nous manque que les points B et H pour compléter la figure.
- Si les élèves disposent du compas, ils peuvent se servir des longueurs des côtés : prendre B à l'intersection de (FG) et du cercle de centre A et passant par K (ils se servent alors de  $AB = AK$ ). Pour H un report de longueur sur [IG) peut suffire.



## Phase 4 – Phase 5

- On a laissé des segments entiers.
- Phase 4 : Il ne nous manque que les points B et H pour compléter la figure.
- Si les élèves disposent du compas, ils peuvent se servir des longueurs des côtés : prendre B à l'intersection de (FG) et du cercle de centre A et passant par K (ils se servent alors de  $AB = AK$ ). Pour H un report de longueur sur [IG) peut suffire.
- Phase 5 : on n'a que la moitié des sommets, on ne peut plus s'en tirer avec les alignements et les longueurs des côtés. Il faut au moins le symétrique d'un point à moins de reporter des angles.



# Des jalons pour une progression sur la symétrie orthogonale

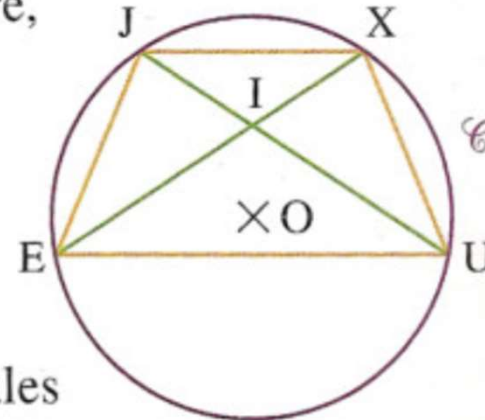
5. Transformation d'objets du plan sans sortir du plan.
6. La symétrie comme transformation ponctuelle du plan. Figure symétrique comme globalement invariante.
7. La symétrie axiale, transformation du plan parmi d'autres, et outil de démonstration



# La symétrie orthogonale comme outil de démonstration

- Petit manuel Hatier 3ème 2003
- Ici on utilise les angles entre sécantes et parallèles et les angles inscrits puis les triangles isocèles. On ne dit pas que le trapèze est isocèle.
- La symétrie serait un outil plus adapté :
  - La médiatrice d'une corde est un diamètre
  - Les bases parallèles ont la même médiatrice
  - Un diamètre est axe de symétrie d'un cercle.

**60** Sur la figure ci-contre, les points J, E, U, X sont sur le cercle  $\mathcal{C}$  de centre O tels que JEUX soit un trapèze de bases [EU] et [JX]. I est le point d'intersection des diagonales de ce trapèze.



- Démontrer que  $\widehat{JXE} = \widehat{JUE} = \widehat{XJU} = \widehat{XEU}$ .
- Quelle est la nature des triangles JIX et EIU ?
- Démontrer que  $JU = EX$ .

# Raisons de cette progression sur la symétrie orthogonale

- Deux dimensions pour construire la progression :
  - Objets et actions sur ces objets :
    - 1. Objets matériels qu'on déplace
    - 2. tracés avec calques ou pliage (instruments qui gardent la forme et actions dans l'espace)
    - 3. tracés sans sortir du plan avec quadrillage (vision contour) ou
    - 4. avec instruments classiques : déconstruction dimensionnelle, droites cercles et points.
    - 5. travail sur des objets géométriques théoriques
  - Propriété / transformation d'une figure :
    - 1. Figure symétrique (axe non nécessairement identifié) ;
    - 2. axe de symétrie d'une figure (objet matériel, pliage) ;
    - 3. symétrie d'une figure par rapport à un axe (transformation) ;
    - 4. points invariants ;
    - 5. axe de symétrie d'une figure (figure globalement invariante).
- Deux variables présentes à chaque étape
  - Types de tâche : vérifier une symétrie, restaurer une symétrie, produire une symétrie
  - Axe absent (non nécessairement identifié) ; axe donné ; axe à déterminer

# Bibliographie

**Ouvrage** : Mathé, A.C., Barrier, T. & Perrin-Glorian, M.J. (2020). Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités. Bruxelles : Academia. Version papier ou électronique. <https://www.editions-academia.be/livre-enseigner-la-geometrie-elementaire-enjeux-ruptures-et-continuites-anne-cecile-mathe-thomas-barrier-marie-jeanne-perrin-glorian-9782806105004-65039.html>

**La ressource du LéA Valenciennes Denain** : <https://lea-geometrie.etab.ac-lille.fr/>

**La brochure de l'IREM de Paris** : Enseigner la géométrie au cycle 4. Comparer des triangles pour démontrer. <http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS20011.pdf>

## Chapitre d'ouvrage à venir

- Mathé A.-C. et Perrin-Glorian M.-J. (à paraître dans un ouvrage chez ISTE) La géométrie des tracés, lien possible entre le dessin géométrique et la géométrie d'Euclide ?

## Des articles de Duval

- Duval R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. Repères-IREM, N°17. p. 121-138.
- Duval R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Annales de didactique et de sciences cognitives n° 10, p. 5 – 53.

## Des articles issus du travail du « groupe de Lille » consultables en ligne (ordre chronologique)

- Duval R. et Godin M. (2005) : Les changements de regard nécessaires sur les figures, Grand N n°76, 7-27.
- Offre, B., Perrin-Glorian, M.J. & Verbaere O. (2006) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, Grand N n°77, 7-34, et Petit x n°72, 6-39.
- Keskesa, B., Perrin-Glorian M.J. & Delplace J.R. (2007) Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. Grand N, n°79, 33-60.
- Godin M., Perrin M.-J. (2009). De la restauration de figure à la rédaction d'un programme de construction. Le problème de l'élève, le problème du maître. *Actes du 35ème colloque la Copirelem, Bordeaux – Bombannes, 2008.*
- **Perrin-Glorian M.J. (2012).** Vers une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie plane du CP à la fin du collège ? L'exemple de la symétrie axiale. Bulletin de l'APMEP, 499, 325-332, disponible en version plus complète sur [http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Perrin\\_Glorian\\_2.pdf](http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Perrin_Glorian_2.pdf)
- **Perrin-Glorian M.J., Mathé A.-C., Leclercq R. (2013).** Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. Repères-IREM, 90, 5-41.
- Mangiante-Orsola, C., & Perrin-Glorian, M.-J. (2014). Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des maîtres. Grand N, 94, 47–79.
- Perrin-Glorian, M.-J., & Godin, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. Math-École, 222, 26–36. [https://www.revue-mathematiques.ch/files/4014/6288/8780/ME222\\_PerrinGlorian.pdf](https://www.revue-mathematiques.ch/files/4014/6288/8780/ME222_PerrinGlorian.pdf)
- **Perrin-Glorian M.-J. (2018).** Géométrie au cycle 3 : de la reproduction de figures avec des gabarits aux constructions à la règle et au compas. Colloque de Poitiers Mathématiques en Cycle 3. p. 112-121 <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PO/IPO18008/IPO18008.pdf>

## Dans le même esprit

- Bulf, C., Mathé, A.C. & Mithalal, J. (2014). Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique. Spirale – Revue de Recherches en Éducation, 54, 29-48.
- Bulf C. & Celi V. (2015). Une étude diachronique de problèmes de reproduction de figures géométriques au cycle 3. Grand N, 96, 5-33.
- Bulf C. et Celi V. (2016). Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire. Une transition clé : du gabarit au compas. Grand N, 97, 21-58.
- Beuset R. et Duroisin N. (2021) Développement de la visualisation non iconique à l'école primaire : mise à l'épreuve d'un dispositif d'enseignement et d'apprentissage. Petit x n°115, p. 65-92.
- En 6ème : Brochure en cours de l'IREM de Bordeaux : <https://math-interactions.u-bordeaux.fr/IREM>
- La plupart des articles de Grand N, Petit x et Repères-IREM sont disponibles en ligne.

## Plus spécifiquement sur le langage

- Mathé Anne-Cécile, Maillot Valérie, Ribennes Julien (2021). Enjeux langagiers, situations de formulation et de validation en géométrie. Un exemple de travail autour du cercle en CE2. Grand N n°108.
- Bulf C., Celi V. et al. (2021) Tracé du cercle et circulation des discours. Première partie : Approche didactiques des (inter)actions langagières et matérielles. Petit x n° 114, p. 3-37.
- Beaugrand C. Mendonça Dias C. et al. (2021). Tracé du cercle et circulation des discours. Deuxième partie : Approche linguistique des interactions verbales. Petit x n° 114, p. 39-67.
- Joris Mithalal-Doze (MCF Didactique des mathématiques-S2HEP-Université Lyon 1-INSPE de Lyon) et Denis Roche (Enseignant CM2-Référent mathématique de circonscription) - Les programmes de construction : conjuguer les aspects conceptuels, graphiques et langagiers en géométrie au cycle 3... Où l'on verra que les mathématiciens ne sont pas analphabètes ! Présentation à télécharger sur le site des mercredis de l'APMEP.  
<https://www.apmep.fr/Les-mercredis-de-l-APMEP-Un-espace>

Merci de votre attention