



Prendre en compte la dialectique du générique et du singulier : enquête sur la Théorie Anthropologique du Didactique

Corine Castela

► To cite this version:

Corine Castela. Prendre en compte la dialectique du générique et du singulier : enquête sur la Théorie Anthropologique du Didactique. 2022. hal-04238607

HAL Id: hal-04238607

<https://hal.science/hal-04238607>

Preprint submitted on 12 Oct 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Prendre en compte la dialectique du générique et du singulier : enquête sur la Théorie Anthropologique du Didactique

Corine CASTELA

LDAR Université de Rouen, Université de Paris, Université Paris-Est Créteil, CY Cergy
Paris Université, Université de Lille
corine.castela@univ-rouen.fr

Résumé : Cet article restitue les principaux jalons d'un parcours d'étude suscité par la question : comment la Théorie Anthropologique du Didactique prend-elle en compte la dialectique généricité-singularité au sein des mathématiques ? Cette question étant née d'une rencontre avec la modélisation des mathématiques proposée par G. Sensevy, on commence par en donner une présentation détaillée. La suite du texte aborde les éléments de réponse à la question rencontrés par l'auteure dans son enquête. Aux côtés des contributions centrales d'Y. Chevallard que sont les organisations praxéologiques et la pédagogie de l'enquête, sont introduits des travaux moins connus sur la mémoire didactique et sur l'utilisation du modèle praxéologique dans l'EIAH. Un exemple de résolution d'une tâche géométrique nourrit les réflexions sur la singularité.

Mots-clés : Théorie Anthropologique du Didactique, modélisation des mathématiques, organisation praxéologique, résolution de problèmes

Titre en anglais (pour écrire le titre en anglais, il faut utiliser le style « Titre anglais »)

Abstract: This article presents the main milestones of a study path raised by the question: how does the Anthropological Theory of Didactics take into account the dialectic of genericity-singularity within mathematics? This question having arisen from an encounter with the modeling of mathematics proposed by G. Sensevy, we begin by giving a detailed presentation. The rest of the text deals with the elements of answer to the question encountered by the author in her investigation. Alongside the central contributions of Y. Chevallard, which are the praxeological organizations and the pedagogy of inquiry, lesser-known works on didactic memory and on the use of the

praxeological model in the TEL are introduced. An example of solving a geometric task feeds the reflections on singularity.

Keywords: Anthropological Theory of Didactics, modeling of mathematics, praxeological organization, problem solving

Introduction

Cet article a été initié par une invitation à participer au numéro spécial de la revue consacré à l'étude et la modélisation de l'activité mathématique de la personne apprenante. Or, la nature même de la didactique conduit à devoir d'abord modéliser les mathématiques. Une telle réflexion sur les mathématiques a été au cœur de mes premiers travaux, elle a fondé les recherches sur le travail personnel des élèves qui, sans doute, m'ont valu cette invitation à participer au numéro spécial (Castela, 2008b, 2009, 2011). Partant de mon expérience d'étudiante puis de chercheure en mathématiques, j'ai accordé un rôle primordial dans la résolution de problèmes à un corpus de savoirs construits dans la pratique mais non pris en compte par le savoir théorique. Cette approche met en avant les dimensions génériques de l'activité mathématique, c'est donc en toute cohérence que mon travail épistémologique, à partir de 2007, s'est inscrit dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), en accordant de manière constante un rôle central au modèle praxéologique appuyé sur la notion de type de tâches. J'ai saisi l'occasion offerte par la revue pour confronter cette approche à des développements théoriques plus récents, en comptant sur les perturbations induites pour avancer. Certains éléments de la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique (TACD) développée par G. Sensevy ont joué ce rôle. La modélisation proposée par Sensevy (2011), présentée dans la section 1.2, prend en compte à la fois les dimensions génériques et les dimensions singulières des activités mathématiques considérées comme jeux de savoir. Ceci me conduit donc à porter un regard nouveau sur la résolution de problèmes comme sur la TAD, avec le questionnement suivant : comment analyser les relations entre généricité et singularité au sein de la TAD ? La partie 2 est centrée sur la dimension « généricité » des tâches mathématiques et sur les constructions cognitives qu'elle permet. C'est l'occasion de revenir sur le modèle praxéologique de la TAD, sur les développements que j'en ai proposés (Castela, 2008a, 2011 ; Castela & Romo Vázquez, 2011) et enfin, en lien avec la notion d'affordance utilisée par Sensevy, sur le travail d'Y. Matheron et A. Arraya-Chacón consacré à la mémoire didactique. La suite du texte s'intéresse à la prise en compte de la singularité des tâches, en sollicitant notamment les recherches

d'H. Chaachoua et S. Jolivet dans le cadre de la théorie T4TEL¹. Nous terminons en revenant à la dialectique singularité-généricité dans le cadre de la pédagogie de l'enquête développée par la TAD.

1. Modélisation des mathématiques

L'objectif de cette partie est de présenter la modélisation des mathématiques proposée par la TACD ; je citerai donc longuement dans la section 1.2 le livre *Le sens du savoir* de G. Sensevy (2011). Mais, la notion d'organisation praxéologique, centrale dans la TAD, étant un élément présent dans le travail de Sensevy, je commencerai par en rappeler la teneur.

1.1 Théorie Anthropologique du Didactique : organisations praxéologiques

Chronologiquement, le modèle praxéologique est la première modélisation des mathématiques proposée par la TAD. Elle repose sur deux points clés. D'une part, les mathématiques sont considérées comme un « travail, activité parmi d'autres qui se réalise par le moyen d'instruments ostensifs spécifiques et "sous des contraintes de signification" déterminées » (Bosch & Chevallard, 1999, p. 112). D'autre part, toute activité humaine régulièrement accomplie est considérée comme procédant d'une praxéologie :

En toute institution², l'activité des personnes occupant une position donnée se décline en différents *types de tâches* T , accomplis au moyen d'une certaine *manière de faire*, ou *technique*, τ . Le couple $[T, \tau]$ constitue par définition, un savoir-faire. Mais un tel savoir-faire ne saurait vivre à l'état isolé : il appelle un *environnement technologico-théorique* $[\theta/\Theta]$, θ , « discours » rationnel (*logos*) censé justifier et rendre intelligible la technique (*tekhnê*), et à son tour justifié et éclairé par une théorie, Θ , généralement évanouissante. Le système de ces quatre composantes, noté $[T, \tau, \theta, \Theta]$, constitue alors une *organisation praxéologique* ou *praxéologie* (Chevallard, 1997, p. 38).

À propos de la notion de technique, ajoutons deux précisions sur lesquelles nous reviendrons dans la suite :

une technique – une « manière de faire » – ne réussit que sur une partie $P(\tau)$ des tâches du type T auquel elle est relative, partie qu'on nomme portée de la technique. (Chevallard, 1999, p. 225)

¹ T4TEL : T4 renvoie au quadruplet praxéologique (Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie) et TEL pour Technology Enhanced Learning.

² Le modèle praxéologique est également considéré comme pertinent pour rendre compte de la science d'une pratique qu'une personne porte en elle (Chevallard, 2007, p.714)

Il faut entendre le terme de technique en un sens très large, comme une « manière de faire » particulière, et non selon l'acception courante de procédé structuré et méthodique, voire algorithmique. (Bosch & Chevallard, 1999, p. 84)

La citation de Chevallard (1997) définit une praxéologie ponctuelle, associée à un seul savoir-faire $[T, \tau]$. « L'amalgamation de plusieurs praxéologies ponctuelles créera une praxéologie *locale*, ou *régionale* ou *globale*, selon que l'élément amalgamant est, respectivement, la technologie, la théorie ou la position institutionnelle considérée » (Bosch & Chevallard, 1999, p.86). Dans le cas des mathématiques, un usage répandu est de parler d'Organisation Mathématique et d'utiliser la notation OM, déclinée en OMP, OML, etc.

Castela (2008a) propose une autre forme d'amalgame de façon à prendre en compte une réalité déjà présente dans le contexte scolaire du lycée français, a fortiori au sein des mathématiques académiques : plusieurs techniques τ_i peuvent être disponibles pour un type de tâches T . Les OMP $[T, \tau_i, \theta_i, \Theta_i]$, dites simples (OMPS) associées à chaque τ_i sont regroupées, formant une OMP complexe (OMPC) $[T, (\tau_i, \theta_i, \Theta_i)_i, \theta^T]$ où θ^T , la technologie associée à T , situe les techniques les unes par rapport aux autres et cerne leurs domaines d'efficacité.

En résumé, cette première modélisation des mathématiques en termes d'organisations praxéologiques globales confère aux savoir-faire $[T, \tau]$ qui y figurent une présence équivalente à celle qui est attribuée aux savoirs $[\theta/\Theta]$. Ceci souligne donc le rôle joué dans le développement des mathématiques par la recherche de généricité au sein des tâches problématiques singulières rencontrées et de leur traitement. Ce modèle ne dit rien du processus de résolution d'un problème nouveau.

1.2 Théorie de l'Action conjointe en Didactique : jeux épistémiques

Pour la TACD, « un savoir est une puissance d'agir, en situation » (Sensévy, 2011, p. 60), « "le savoir (que le professeur fait apprendre)" est modélisé en termes de jeu épistémique. » (*ibidem*, p. 123)

Décrire un savoir en termes de jeu (épistémique), c'est nécessairement le penser comme une pratique, certes non réductible à toutes les autres, mais partageant avec toutes les autres des caractéristiques spécifiques de la praxis. Au sein du paradigme didactique, le savoir peut ainsi être systématiquement décrit comme une praxéologie, qui tient dans une solidarité fondamentale, même si elle est empiriquement diversifiée, la pratique et le discours sur la pratique. (*ibidem*, pp.123- 124)

Avec la notion de jeu épistémique, qui modélise une pratique de savoir, la TACD [...] va donc entreprendre de voir tout savoir d'abord comme une pratique de savoir (premier mouvement praxéologique), puis comme un jeu (second mouvement praxéologique), avec ses enjeux, ses règles définitoires, ses règles stratégiques, ses stratégies, le gain qu'il permet d'atteindre, les profits symboliques qu'il permet d'obtenir, etc. (*ibidem*, p. 124)

On retrouve donc la modélisation en termes de praxéologie proposée par la TAD. Voyons ce qu'apporte la modélisation en termes de jeu.

L'étude des travaux de Wittgenstein et de Hintikka conduit Sensevy à postuler qu'il existe trois types d'entités permettant de décrire un jeu donné :

1. Des règles définitoires (constitutives). Par exemple, aux échecs le fait que le fou joue en diagonale. [...]
2. Des règles stratégiques qui peuvent s'exprimer, au moins jusqu'à un certain point, sous une forme propositionnelle, indépendamment du jeu effectivement joué. Par exemple, aux échecs, le fait qu'il est souvent judicieux de placer des tours sur des colonnes ouvertes [...]
3. Des stratégies, qui correspondent au fait que dans *l'hic et nunc* d'une situation, une ou plusieurs règles stratégiques vont être activées pour jouer – d'une manière qui peut d'ailleurs reconfigurer pour le futur la ou les règle(s) stratégique(s) utilisées ou donner naissance à une nouvelle règle stratégique. (*ibidem*, p. 41)

Pour éclairer les possibilités offertes par cette modélisation quant à la dialectique singularité-généricité, il est important de noter que le terme de « jeu » est ici utilisé pour désigner une partie (cf. la formulation « indépendamment du jeu effectivement joué »). Ceci n'est pas le sens utilisé quand on parle du « jeu d'échec », sens que j'utiliserai dans la suite en opposition au terme « partie ». Ceci étant précisé, on voit que les entités de type 1 et 2 se situent au niveau générique du jeu alors que celles de type 3 réfèrent à la singularité de la partie jouée. Le terme « stratégie » semble utilisé pour désigner la coordination de règles stratégiques adaptées à cette singularité.

J'ai distingué des règles définitoires, qui disent comment jouer au jeu, des règles stratégiques, qui disent comment gagner au jeu, et des stratégies, qui résultent de l'actualisation, de la concrétisation, des règles stratégiques dans un milieu donné. (Sensevy, 2011, p.202)

La distinction règles stratégiques/stratégies rend compte du fait que les premières sont

déformables, reconstruites en situation par les joueurs en analogie avec les situations précédemment rencontrées, dont on repère la forme/le modèle/le pattern/le

motif dans la situation actuelle, modèle auquel on *s'accroche* pour agir au sein d'un jeu auquel on est *attaché*. (*ibidem*, p. 39)

Parmi ces stratégies, il y en a de deux sortes :

- des techniques qui permettent de résoudre d'habitude des problèmes précis [en note : On peut penser ces techniques comme s'étageant sur un gradient qui va d'un pôle « algorithmique » à un pôle « technique ouverte » ;
- des heuristiques, qui sont des manières d'avancer vers la solution d'un problème pour lequel on ignore la ou les techniques précises qui permettent de le régler. (*ibidem*, p.109)

Je m'interroge sur le classement des techniques parmi les stratégies telles qu'envisagées par Sensevy. Au sens de la TAD, les techniques relèvent plutôt des règles stratégiques. Selon moi, il en est de même des heuristiques (voir par exemple, Schoenfeld, 1985). Les techniques mentionnées par Sensevy ci-dessus seraient donc l'instanciation dans une partie donnée de techniques au sens de la TAD, sens que je conserverai dans la suite. De même pour les heuristiques. Les stratégies peuvent être un mixte technique et heuristique, notamment du fait que la plupart des techniques ne sont pas des algorithmes (voir section 3.4) et que leur portée reste non caractérisée ; leur mise en œuvre pour une partie donnée (une tâche pour la TAD) conserve donc une part d'incertitude. Sensevy (2011, p. 97) souligne d'ailleurs :

Les jeux institutionnels, *au sein* des institutions, et eux-mêmes *en tant* qu'institutions, confrontent les joueurs à des *situations*³ -c'est-à-dire à des problèmes-caractérisés par l'incertitude sur l'action (là où l'institution est une machine à prévision, une machine à éliminer l'incertitude) et par la rupture de l'équilibre institutionnel.

Par-delà les difficultés posées par le choix de vocabulaire de Sensevy, on voit que la trilogie introduite enrichit la modélisation praxéologique proposée par la TAD car elle prend en compte la question de l'adaptation des techniques génériques à la singularité des tâches. Une approche sémiotique permet de préciser les choses.

On peut *jouer une situation adéquatement* lorsqu'on est capable de participer adéquatement à la production et à la reconnaissance de signes que ce jeu (cette pratique en tant que *situation agie*) demande, lorsqu'on entre adéquatement dans un processus de sémiotique spécifique. (*ibidem*, p.45)

³ Une note (*ibidem*, p. 97) précise qu'« il faut entendre 'situation' en anglais, langue pour laquelle un des sens du mot est : celui-ci : "*a critical, problematic, or striking set of circumstances*" ».

Un jeu de langage/forme de vie, lorsqu'il est pratiquement maîtrisé, constitue un système de signes directement perçu, qui certes peut être très souvent rationnellement explicité du dehors, voire par l'agent lui-même, mais dont une caractéristique foncière est qu'il est perçu [...] comme un icône⁴. (*ibidem*, p.45)

Savoir jouer le jeu, c'est donc, dans une situation donnée, reconnaître les signes pertinents à partir desquels on oriente sa conduite. On sait jouer (dans une situation donnée) parce qu'on reconnaît dans cette situation des complexes de signes qu'on pense avoir déjà rencontrés dans la fréquentation de situations qu'on va considérer comme analogues à celle dans laquelle on se trouve plongée. (Sensevy, 2011, p. 46)

Parmi les éléments qui orientent la conduite, sont mis en avant les affordances et saillances⁵ présentes dans la partie. Je propose une réflexion sur la première de ces notions dans la section 2.2.

Quelle que soit leur nature, les stratégies (dont le système peut être mixte -techniques et heuristiques) sont des réponses à des saillances du milieu, des manières articulées de traiter les affordances de ce milieu, de l'état du monde auquel on se trouve confronté dans le jeu. (*ibidem*, p.109)

2. Prise en compte des dimensions génériques des activités mathématiques par la TAD

Nous revenons dans cette partie à la TAD à la lumière des éléments apportés par la TACD.

2.1 Concevoir le savoir comme une pratique, quelles conséquences sur la composante technologique du modèle praxéologique ?

Pour prolonger la réflexion, je m'appuie dans cette section sur une intervention de M.-J. Perrin-Glorian au deuxième congrès de la TACD en juin 2021.

Perrin-Glorian perçoit un certain nombre de différences entre les points de vue de la TACD et de la TS (Théorie des Situations), dont certaines lui posent problème. Je n'évoquerai ici que ce qui concerne la distinction connaissance-savoir.

Il me semble que, en pensant le savoir comme une pratique [...], la TACD s'intéresse plus à des connaissances qu'à des savoirs. (Perrin-Glorian, 2021, p. 197)

⁴ Ceci renvoie au triplet icône-indice-symbole de la sémiotique de Peirce.

⁵ La saillance (de l'anglais *salience*, construit sur *salient*, du français saillant, lui-même du latin *saliens*, « qui saute ») d'une chose quelconque est le fait qu'elle attire l'attention ; plus précisément, la mesure dans laquelle elle retient l'attention par rapport aux autres choses présentes dans son environnement.

Pour ma part si, selon la TS, je modélise l'élève comme un système de connaissances qui agit sur un milieu dans un contrat, je ne peux pas mettre toutes les connaissances dans le contrat⁶. Parmi les connaissances, je distingue celles qui correspondent à des savoirs institutionnalisés et celles qui correspondent à la reconnaissance de ces savoirs par des indices sémiotiques (discours ou signes) et à l'usage de ces savoirs pour traiter des problèmes. Pour moi, il y a une différence fondamentale entre ces deux types de connaissances : les deuxièmes sont liées à la situation et restent au niveau personnel, de la seule responsabilité de l'élève qui les utilise ; les premières ont une formulation sous forme de savoir, reconnue par l'institution scolaire et qui restera valable dans toutes les situations jusqu'à nouvel ordre. Par exemple, dans la recherche d'une relation liant les longueurs des côtés d'un triangle d'or, reconnaître des triangles semblables sur la figure et savoir que cela devrait permettre de trouver une relation entre les longueurs des côtés relève de ce deuxième type de connaissances. Celles-ci sont liées à la pratique des mathématiques mais ne sont pas des savoirs mathématiques. Elles ne s'acquièrent pas par confrontation à un milieu adidactique mais par la pratique. (*ibidem*, pp. 202-203)

On voit resurgir dans cette citation un débat ancien opposant G. Brousseau à A. Robert et son groupe sur l'enseignement de méthodes et le méta. Contrairement aux propositions de Sensevy, Perrin-Glorian pose des frontières entre les différentes connaissances utiles aux pratiques mathématiques : celles qui correspondent à des savoirs institutionnalisés et celles qui correspondent à la reconnaissance de ces savoirs grâce à des indices sémiotiques et sont relatives à l'usage de ces savoirs dans la pratique. Selon elle, les connaissances de second type ne sont pas des savoirs mathématiques parce qu'ils s'acquièrent par la pratique, ils doivent demeurer au niveau personnel c'est-à-dire ne peuvent être reconnus, décontextualisés et encore moins institutionnalisés dans la classe. Dans ce cas, revient à l'élève la responsabilité de réfléchir sur la situation vécue, de percevoir une généralité potentielle de certaines actions réalisées dans la situation et converties en connaissances reconnues possiblement utiles, méritant d'être au moins provisoirement retenues jusqu'à ce que des emplois efficaces ultérieurs rendent légitime de les instituer à titre personnel ; de même, cette responsabilité est à la charge du mathématicien qui tire les leçons de ses expériences. Il s'agit alors du développement de la praxéologie personnelle du mathématicien ou de l'élève. Notons que ce développement suppose que la

⁶ Pour Sensevy (2011, p. 110), « le contrat didactique propre à un savoir donné, dans un jeu didactique spécifique à ce savoir, constitue un système stratégique [déjà-là] disponible au moyen duquel le professeur et les élèves vont jouer ce jeu. »

personne dont il est question regarde son activité passée comme source de ressources pour des activités futures. Or, de nombreux travaux sociologiques et didactiques (de Certeau, 1980 ; Bautier & Rochex, 1998, 2004 ; Butlen & Pezard, 2003 ; Perrin-Glorian-Glorian, 1993 ; Castela, 2008b) ont montré que cette posture de « secondarisation » de l'activité n'est pas spontanément adoptée par tous les élèves, ce qui contribue à l'échec scolaire des enfants d'origine populaire. Avec l'objectif de réaliser la dévolution à tous les élèves de la posture de secondarisation, j'ai plaidé pour la présence explicite dans l'enseignement des mathématiques de moments de construction de certains savoirs pratiques. Ce projet prend appui sur l'hypothèse suivante que j'ai défendue dans mes premiers travaux, à la suite du groupe « méta » : certaines des connaissances pratiques, désignées dans (Castela, 2000) par l'expression « savoirs sur le fonctionnement mathématique », émergent sous forme explicite dans la communauté mathématique et ont donc toute légitimité à être intégrées au modèle praxéologique des pratiques mathématiques savantes. Ce que j'ai fait en distinguant, au sein des praxéologies personnelles autant qu'institutionnelles, une composante pratique de la technologie, développée par les utilisateurs de la technique et visant à en favoriser l'emploi (Castela, 2008a). Quels savoirs contient cette composante ? Quelles fonctions peuvent-ils remplir ? Castela et Romo Vázquez (2011) distinguent et illustrent 6 fonctions : Décrire, Valider, Faciliter, Expliquer, Motiver et Évaluer. Nous y reviendrons succinctement dans les parties 3 et 4.

2.2 Affordance, de quoi s'agit-il ? Lien avec les travaux de Y. Matheron sur la mémoire didactique

Le concept d'affordance est issu du champ de la psychologie. Il est aujourd'hui utilisé en ergonomie cognitive et psychologie du travail et dans le domaine du design, pour élaborer des modèles de l'usager. Ce néologisme a été proposé par Gibson dans le cadre de sa théorie écologique de la perception.

Gibson propose ainsi d'étudier la perception en tant que moyen d'adaptation pour l'animal. La perception [...] s'inscrit avant tout dans l'interaction entre l'organisme et sa niche écologique et dans les apports mutuels entre la perception et l'action. (Luya & Regia-Corte, 2009, p.301).

Dans ce cadre, la notion d'affordance rend compte de la faculté qu'ont les animaux à adapter leurs comportements à ce qu'ils perçoivent de leur environnement.

L'affordance peut se définir comme une opportunité d'action. Par rapport aux propres dimensions corporelles et par rapport aussi aux buts, aux intentions de l'agent, l'affordance est une opportunité pour l'action pour un animal donné. Cette

opportunité d'action ne peut être perçue que si l'agent par son expérience, par son exploration, a sélectionné les actions opportunes de celles qui ne le sont pas ou moins. (Luya & Regia-Corte, 2009, p.310)

Ces affordances sont-elles des propriétés de l'environnement ? Cette question fait débat parmi les utilisateurs de la notion. Pour Stoffregen (2003), l'affordance n'est une propriété d'aucune des deux composantes prise isolément mais du système agent-environnement. C'est la conception que je retiendrai ici. L'affordance lie certaines ressources matérielles présentes dans l'environnement et certaines capacités de l'agent. Cette mise en relation est construite par l'agent à travers un processus d'exploration qui lui permet de déterminer progressivement quelles actions sont opportunes ou inopportunes pour lui dans un environnement donné⁷. On peut considérer que le processus de constitution d'une affordance s'accompagne d'une dynamique sémiotique, et donc cognitive, puisque certains systèmes d'objets perçus dans l'environnement se voient dotés d'une signification en termes de potentialité d'action.

Comme l'ont montré les citations de Luya et Regia-Corte, le concept d'affordance a pour objectif de rendre compte de phénomènes intrinsèquement liés au corps, associant perception et action opportune en situation. Il ne fait pas de différence entre animal et humain et désigne des constructions individuelles. L'usage qu'en fait Sensévy l'étend aux mathématiques, c'est-à-dire à un monde de savoirs et pratiques de savoir socialement construit auxquels les individus n'ont pas d'accès qui ne soit médié par des institutions. Apprentissage, enseignement, production ou utilisation des mathématiques, toutes ces pratiques sont encadrées par un contrat institutionnel, qui constitue donc une composante sociale de leur environnement. La constitution d'une affordance par et pour un individu correspond donc au repérage par celui-ci d'un système de conditions (ou ressources) lui offrant une opportunité d'action dans le cadre d'une institution dont il est le sujet dans une position donnée, ce qui assujettit ses actions aux contraintes du contrat institutionnel. Conditions et contraintes, ces termes sont utilisés ici à dessein, en référence à l'approche écologique développée au sein de la TAD. Une affordance est une construction sous un contrat donné.

Par ailleurs, les objets du monde mathématique ne sont qu'indirectement accessibles aux sens via les systèmes d'ostensifs auxquels ils sont associés par des relations sémiotiques. La sémiose de l'environnement qui accompagne la

⁷ Citons un exemple relevant d'un domaine de recherche très actuel : une icône de l'interface d'un Smartphone peut être constituée en affordances par certains usagers et pas par d'autres moins familiers de l'utilisation de ces outils numériques (voir Morgagni, 2011).

constitution d'affordance porte sur des instruments (de tracé, de calcul, etc.) mais aussi sur des ostensifs qui sont également des instruments de la partie perceptible des actions mathématiques. En reprenant un concept introduit par Matheron (2010) et Arraya-Chacón & Matheron (2015) dans le cadre de recherches sur le travail de la mémoire en didactique, le système de signes ainsi constitué fonctionne comme un ostensif déclencheur :

L'ostensif désigné peut réactiver, avec un certain degré d'« automaticité », un non-ostensif. ...De telles ostensifs jouent en quelque sorte le rôle du parfum de la madeleine de Proust. (Arraya-Chacón & Matheron, 2015, pp. 59-60)

Dans le cas de l'affordance, la perception de l'ostensif replace l'agent dans la position et sous le contrat institutionnel de construction de l'affordance. Elle déclenche la remémoration de situations antérieurement vécues par l'agent et d'actions déjà réalisées, en même temps qu'elle mobilise les non-ostensifs qu'il associe à ces différents éléments, ostensifs, situations et techniques. On peut supposer qu'au niveau individuel, l'existence d'affordances est sous-jacente à ce que l'on décrit souvent comme l'intuition d'un résolveur de problèmes.

Jusqu'à présent, les affordances relèvent du deuxième type de connaissances envisagé par Perrin-Glorian. Pour rejoindre totalement le travail de Matheron (2010), qui repose sur les concepts de « mémoire collective » et de « cadres sociaux de la mémoire » empruntés au sociologue Halbwachs (1994)⁸, il nous faut envisager que des affordances puissent être aussi des construits collectifs, collectifs des chercheurs d'un laboratoire, des spécialistes d'un domaine de mathématiques, d'un professeur et de ses élèves, etc. Nous revenons sur ce point dans la section 3.3.

3. Du type de tâches à la tâche, de la technique à sa mise en œuvre, comment analyser les relations entre généricité et singularité à partir du modèle praxéologique ?

Cette partie s'appuie sur les travaux de l'équipe MeTAH (Modèles et Technologies pour l'Apprentissage Humain) qui associe didacticiens et informaticiens dans des recherches consacrées aux Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (EIAH).

⁸ « Du point de vue de l'auteur [Halbwachs], la mémoire est à la fois un fait et un processus collectif, aussi bien au niveau du stockage - d'expériences, de connaissances, etc.- qu'au niveau de l'évocation des événements du passé. Ainsi existe-t-il des ensembles de points de référence, les cadres, de nature sociale et qui forment un système global de repérage du passé, en permettant la remémoration individuelle et collective. » (Arraya-Chacón & Matheron, 2015, p. 46)

Il en découle nécessairement un travail de modélisation informatique des objets de savoir à enseigner, des connaissances d'un sujet, et des propositions pour doter les environnements informatiques d'outils de calcul afin de produire des diagnostics, des rétroactions vers l'élève ou le professeur... (Chaachoua & Bessot, 2019 p. 235)

3.1 Types, variables et sous-types de tâches

Dans la perspective définie ci-dessus, Chaachoua a développé au sein de l'approche praxéologique de la TAD, un cadre de référence spécifique, désigné par l'acronyme T4TEL⁹ (voir Chaachoua, 2020). Une attention toute particulière y est prêtée à la définition de la notion de type de tâches :

Un type de tâches T est décrit par un verbe d'action et un complément que nous représentons par $T = (\text{Verbe d'action}, \text{Complément})$. Le verbe d'action caractérise le genre de tâches, comme « Calculer » ou « Intégrer ». Le complément peut être défini selon différents niveaux de granularité, du spécifique au générique et, pour prendre en compte ces relations entre le générique et le spécifique, nous avons introduit les notions de système de variables et de générateur de types de tâches (Chaachoua & Bessot, 2019, p.238).

Les notions évoquées ne visent pas à décrire la singularité des tâches relevant d'un même type T ; néanmoins, elles permettent de distinguer au sein de T des sous-types de tâches différenciés par les valeurs qu'y prennent certaines variables. Dans la dualité générique-singulier, elles introduisent le niveau intermédiaire du spécifique. Ainsi pour le type « Ajouter deux entiers naturels », les deux variables correspondant au nombre de chiffres de chacun des entiers différencient des sous-types dont on sait bien la pertinence didactique au début du Primaire. Dans la section 3.3, nous analysons un exemple lié à l'OMPC associée au type de tâches T_{al} « Montrer que trois points distincts sont alignés » qui illustrera l'intérêt mathématique du repérage de sous-types de tâches spécifiques.

3.2 Tâche, contexte définitoire

Les outils précédents ne nous permettent pas de prendre en compte la singularité d'une tâche, *l'hic et nunc* d'une partie. Pour cela, il nous faut explorer plus avant les travaux de MeTAH. La thèse de S. Jolivet (2018) vise à indexer les énoncés de tâches prescrites en vue d'automatiser l'analyse des énoncés proposés par des manuels. Il propose la définition suivante :

Une tâche est définie par un triplet :

⁹ Cf. note 1

{Action à réaliser ; compléments définitoires ; compléments facultatifs}

Action à réaliser : elle est le plus souvent définie par un verbe d'action mais peut aussi être matérialisée par d'autres objets ostensifs, soit pour des raisons de langue (par exemple « donner un développement de » relève du même objet non ostensif que « développer ») soit parce que des effets de contrat didactique amènent à l'interprétation d'un objet ostensif (symbole du type « ? » par exemple) comme associé à une action à réaliser.

Compléments définitoires : il s'agit du ou des objets sur lesquels l'action porte. En leur absence la tâche n'existe plus. Ils sont matérialisés par des objets ostensifs.

Compléments facultatifs : il s'agit d'objets ostensifs complémentaires dont la présence n'est pas nécessaire à l'existence de la tâche. En leur absence, une tâche est toujours définie. Ils ont diverses fonctions possibles (orienter vers le choix d'une technique ; ingrédient d'une technique ; répondre à une attente institutionnelle...). (Jolivet, 2018, p. 119)

On notera que, l'objectif étant d'analyser des énoncés d'origine scolaire, la définition proposée intègre dans les compléments facultatifs des éléments à visée didactique. Chaachoua (2010, p.8) propose d'associer

« à une tâche prescrite dans [une institution] / une tâche mathématique. Elle correspond au problème mathématique sans aucune indication sur la technique possible ou attendue et avec une formulation qui reste la plus neutre possible vis-à-vis de la technique. L'énoncé est une mise en texte de la tâche mathématique en ajoutant éventuellement des indications ou des questions qui prennent en charge partiellement ou complètement les étapes de la technique attendue » (Chaachoua, 2010, p. 8).

Mon but étant de travailler sur les pratiques de savoir des mathématiciens ou du moins sur un modèle praxéologique de ces pratiques qui puisse servir de référence pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, je me restreindrai à une réflexion sur les tâches mathématiques. Je retiendrai de la définition de Jolivet l'idée que pour définir une tâche relevant d'un type de tâches défini par un couple (Verbe d'action, Complément), il faut définir tous les objets figurant dans le complément. Dans le cas de la somme de deux entiers, il suffira de choisir les deux entiers à sommer. Qu'en est-il du type de tâches T_{al} ? Pour définir une tâche de ce type, il faut définir les trois points, ce qui ne peut se faire sans introduire un ensemble d'objets initiaux (les données) et un processus de construction des trois points, lequel sera balisé par la production d'objets intermédiaires.

Exemple : Une tâche t d'alignement.

A, B et C sont trois points alignés distincts. Par ces trois points, on mène trois droites distinctes D , D' et D'' parallèles entre elles. Soit M un point de D' , distinct de B . La parallèle à (MC) (resp. (MA)) passant par B coupe D (resp. D'') en I (resp. J). Montrer que M , I et J sont alignés.

Ces objets mathématiques, nécessairement définis par un ensemble d'ostensifs et généralement intégrés dans un texte permettent de définir une tâche à partir du type de tâches. Il s'agit de ce que je nommerai *le contexte définitoire de la tâche*, par analogie au sens attribué au terme 'contexte' en linguistique¹⁰. Ajoutons que l'environnement de la tâche peut contenir des objets complémentaires, non impliqués dans la définition des objets de l'action. Par exemple, lorsque la tâche est insérée dans un problème plus vaste¹¹.

Le contexte définitoire et les savoirs mathématiques relatifs aux objets qui y figurent caractérisent la singularité mathématique de la tâche, ils conditionnent la mise en œuvre et le succès d'une technique associée au type de tâches, c'est-à-dire le fait que la tâche appartienne ou non à la portée de la technique. La diversité des contextes définitoires possibles explique qu'en mathématiques, la portée d'une technique non algorithmique est rarement caractérisée.

3.3 Retour sur les notions de sous-types de tâches et d'affordances

Cette section est illustrée par la tâche t et le type de tâches T_{al} définis ci-dessus.

T_{al} s'inscrit dans le cadre théorique de la géométrie affine puisque les objets du complément du verbe d'action qui définit le type sont de nature affine. Relèvent de l'organisation praxéologique associée à cette théorie, plusieurs techniques. Par exemple, les techniques suivantes sont efficaces pour la tâche t :

- τ_1 : technique analytique dans un repère affine ;
- τ_2 : montrer que l'un des points est l'image d'un deuxième par une homothétie de centre le troisième point.
- τ_3 : montrer que deux des droites formées en associant deux des trois points sont parallèles à une même droite.

¹⁰Cotexte et contexte d'un fait de langue

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Cotexte>

Le contexte désigne l'environnement du fait de langue en tant qu'il est susceptible d'avoir une influence sur ce fait de langue.

¹¹ Contrairement à l'option adoptée dans (Castela, 2008a), l'analyse du contexte proposé dans ce texte, centrée sur la dimension mathématique, n'intègre pas les dimensions institutionnelles de prescription de la tâche.

Mais, parmi toutes les techniques possibles pour traiter T_{al} , il en existe qui sont développées dans le cadre moins général mais plus riche de la géométrie affine euclidienne, nous les désignerons sous l'expression 'techniques euclidiennes'¹². Par exemple, une technique analytique τ_4 en repère orthonormé avec ou sans nombres complexes, une technique angulaire τ_5 (Avec les trois points, définir deux vecteurs et montrer que la mesure de l'angle orienté qu'ils forment est nulle modulo π). C'est donc une OMPC $[T, (\tau_i, \theta_i, \Theta_i)_i, \theta^T]$ particulièrement foisonnante qui est associée à T_{al} . Définir des critères permettant, pour une tâche donnée, d'effectuer un tri raisonné parmi les techniques disponibles, rejetant celles qui paraissent inadéquates et repérant celles qui semblent être les mieux adaptées au contexte définitoire est un savoir utile pour la pratique géométrique. Ces critères satisfont un besoin pratique d'évaluation relative des différentes techniques associées à T , ils relèvent de la composante θ^T et de la composante pratique évoquée dans la section 2.1 (Fonction « Évaluer la technique » dans -Castela & Romo Vázquez, 2011, p. 90) des technologies θ_i .

La mise en œuvre des techniques euclidiennes fait intervenir des objets spécifiques de la géométrie euclidienne, leur validation repose sur des théorèmes impliquant des objets et des hypothèses de nature euclidienne. Il est donc hautement probable qu'elles ne puissent être efficaces pour des tâches dont le contexte définitoire ne contient aucun objet spécifique de cette géométrie comme c'est le cas de t . Ceci suggère l'introduction d'une variable binaire dont le questionnement se situe au niveau théorique des organisations mathématiques : V_{SE} ¹³ 'Le contexte définitoire contient-il des objets de nature euclidienne ?'

Si non (cas de t), les techniques euclidiennes sont a priori exclues. Si oui, les techniques euclidiennes sont privilégiées. La tâche t' suivante (pour laquelle τ_5 fonctionne très bien) en est un exemple :

Soient C et C' deux cercles du plan, sécants en deux points distincts A et B .
Soit S la similitude directe de centre A transformant C en C' . Montrer que pour tout point M de C , M , B et $S(M)$ sont alignés.

Notons cependant que, pour $V_{SE} = \text{Oui}$, les techniques affines ne sont pas à exclure totalement, particulièrement si le contexte contient aussi des objets

¹² Je considérerai ici la géométrie affine comme un domaine dont un secteur est la géométrie affine euclidienne, de même qu'en sont la géométrie barycentrique et l'étude des transformations affines. L'étude des homothéties-translations est un thème de ce dernier secteur. Au sein de la géométrie euclidienne, l'étude des similitudes et des angles orientés sont des thèmes. Pour les notions de thème, secteur, domaine, voir (Chevallard, 2002, p. 42)

¹³ SE pour Secteur Euclidien.

purement affines : ainsi, dans un contexte contenant un rectangle inscrit dans un triangle, la présence de droites parallèles peut être propice à l'utilisation d'une technique issue du théorème de Thales. Inversement, pour $V_{SE} = \text{Non}$, puisqu'il existe une application affine bijective transformant un triangle quelconque en un triangle équilatéral, puisque par cette application affine toutes les relations présentes dans le contexte définitoire de t sont conservées ainsi que la propriété d'alignement à établir, on ne peut totalement exclure les techniques euclidiennes.

Cette variable permet de définir deux sous-types de tâches, auxquels sont associées des hiérarchisations différentes de l'ensemble des techniques associées à T_{al} . Elle a donc des effets heuristiques mais l'ensemble des techniques possibles restent larges. Continuons donc ce travail de différenciation des contextes définitoires. Un second niveau de variable V_{Th}^{14} , plus précis car centré sur chaque technique disponible, pourrait concerner la présence, dans le contexte définitoire de la tâche, d'instanciation des objets spécifiques du thème dont relève la technologie d'une technique. Pour une tâche donnée, une réponse négative conduit à rejeter (au moins provisoirement) la technique, une réponse positive à la considérer comme envisageable. Par exemple, dans le thème 'Angles orientés', figure le théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre dont il découle que la présence de cercles dans le contexte définitoire, comme c'est le cas de t' , est un pourvoyeur d'égalités angulaires et encourage donc à tenter d'utiliser τ_5 . Dans le thème 'Homothéties-Translations', les configurations de Thalès et les trapèzes permettent de définir des homothéties à partir de l'image de deux points. Or comme on le voit dans la figure ci-dessous, plusieurs configurations de Thalès croisées sont présentes dans le contexte de t . Ceci conduit à préjuger que cette tâche appartient au sous-type de T_{al} pour lequel il est raisonnable de tenter d'utiliser une technique d'alignement figurant dans le thème. Le sous-type n'est toutefois pas associé à une OMPS puisque 3 techniques d'alignement font intervenir une ou des homothéties.

Tableau 1 : Une technique inefficace

	Il existe une homothétie h transformant A en L et I en B et une homothétie h' transformant B en J et M en C. Étant donné qu'il est immédiat de déterminer les images de A et I par h', on est tenté d'utiliser la technique d'alignement qui repose sur le théorème suivant : Dans le cas où la composée de deux
--	--

¹⁴ Th pour Thème.

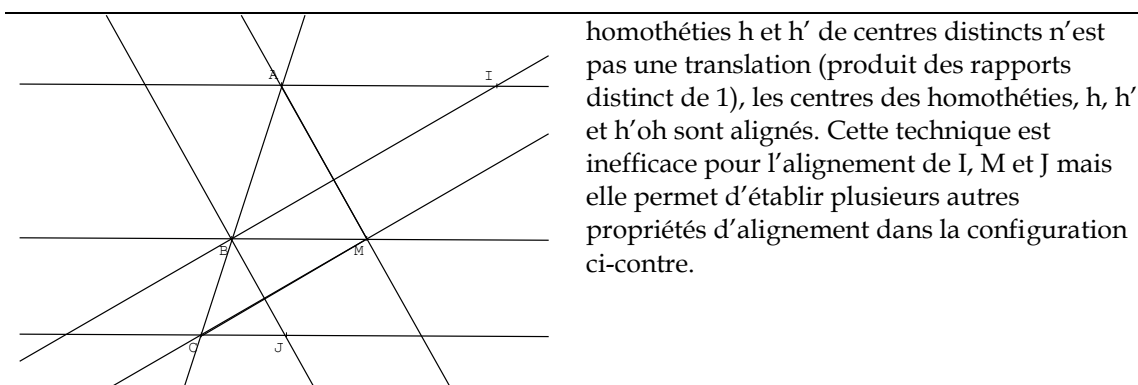


Figure 1. Configuration correspondant au contexte définitoire de t

On entrevoit la possibilité d'introduire (ici pour la géométrie considérée comme paradigmatique de l'activité mathématique de par le faible rôle qu'y jouent les techniques algorithmiques) deux niveaux de variables portant sur les objets du contexte définitoire de la tâche, permettant d'aller vers la caractérisation de contextes favorables ou défavorables à l'emploi d'une technique donnée, ce que font les variables de Chaachoua pour des types de tâches numériques ou algébriques. Ces variables ne permettent pas de générer des tâches, elles fournissent des outils d'analyse du contexte de la tâche¹⁵, particulièrement utiles dans le cas des OMPC en hiérarchisant les techniques disponibles relativement au contexte définitoire : certaines sont (vraisemblablement) non pertinentes, les autres peuvent être essayées, généralement sans qu'on puisse garantir qu'elles soient efficaces c'est-à-dire que la tâche soit à la portée de la technique. On peut résumer le processus présenté ici de la façon suivante : considérant une description de l'OMPC associée à un type de tâches, indexée à partir des théories $[T, (\tau_{i,j,k}, \theta_{i,j}, \Theta_i)_{i,j,k}, \theta^T]$ ¹⁶, le processus définit à partir des blocs $[\theta_{i,j}, \Theta_i]_{i,j}$, des sous-types $T_{i,j}$ pour lesquels les techniques $\tau_{i,j,k}$ sont envisageables alors qu'elles sont à rejeter, au moins dans un premier temps, pour les autres tâches du type.

¹⁵ En cela, la réflexion proposée ici se rapproche du travail de S. Jolivet et de celui d'E. Cuisiniez Lesnes-Cuisiniez, E., (2021). *Un modèle épistémologique et didactique pour le diagnostic et les parcours adaptatifs, dans le domaine de la géométrie au cycle 4*. Thèse : université Paris Sorbonne.

¹⁶ Cette description est une description 'descendante' allant des théories vers les techniques qu'elles produisent pour T , alors que la description $[T, (\tau_i, \theta_i, \Theta_i)_i, \theta^T]$ est ascendante en partant des différentes techniques connues pour T .

On pourrait dire que $T_{i,j}$ est la trace sur l'OML définie par $[\theta_{i,j}, \Theta_i]$ du type T . Si le thème ne propose qu'une seule technique $\tau_{i,j}$ pour $T_{i,j}$, on a donc produit un sous-type de tâches, caractérisé par des propriétés du contexte définitoire, pour lequel il est opportun de tenter la mise en œuvre de $\tau_{i,j}$: ce n'est rien d'autre que la construction explicite et raisonnée d'une affordance.

On peut s'étonner d'une telle affirmation dans la mesure où le processus décrit précédemment repose sur une analyse du contexte définitoire basée sur la composante technologico-théorique des praxéologies ; la pratique ne semble y jouer aucun rôle, ce qui est contraire à ce qui a été dit sur la notion d'affordance. C'est qu'il faudrait affiner la définition des variables de thèmes de façon à préciser quels sont parmi tous les objets qui figurent dans un thème ceux dont la présence favorise l'emploi d'une technique. Or un tel savoir se développe à l'usage, dans les démonstrations qui établissent les théorèmes du thème et dans la résolution de problèmes. C'est ainsi, par exemple, qu'on peut repérer l'importance des cercles dans un travail utilisant les angles orientés. Nous illustrons cette même idée dans le cas du thème des Homothéties-translations dans la section 3.4.

Notons que nous avons retrouvé la dimension sémiotique des affordances et le caractère déclencheur de certains ostensifs dans les exemples précédents. Ce sont certaines configurations spécifiques d'ostensifs qui orientent vers telle ou telle technique, à condition de les extraire de l'ensemble du contexte définitoire.

On pourrait penser que le travail présenté dans cette section débouche sur la détermination de la portée d'une technique. Les lectrices et lecteurs de cette revue savent qu'on en est loin car en mathématique, nombre de techniques ne sont pas algorithmiques. Nous en explorons maintenant les conséquences.

3.4 D'une technique non algorithmique à sa mise en œuvre dans un contexte singulier, analyse d'un exemple

Modeste (2012, p. 19) donne la définition suivante d'un algorithme

Un algorithme est une procédure de résolution de problème, s'appliquant à une famille d'instances du problème et produisant en un nombre fini d'étapes constructives, effectives, non ambiguës et organisées, la réponse au problème pour toute instance de cette famille.

Ainsi on peut dire qu'un algorithme est une technique dont on connaît (une partie de) la portée, formée d'un nombre fini d'étapes telles qu'à chaque étape, on sait exactement ce qu'il faut faire, avec la certitude que toutes les conditions du succès sont présentes. L'implémentation d'un algorithme exclut donc : 1. d'avoir à effectuer, à une étape donnée, un choix non anticipé (parmi plusieurs

techniques ou parmi les objets auxquels appliquer la technique), 2. de rencontrer un obstacle à la mise en œuvre de la technique. Inversement, pour de très nombreuses techniques mathématiques, leur emploi efficace sur une tâche donnée aura confronté le résolveur à l'embarras du choix et/ou à l'embarras de l'obstacle. Illustrons ce phénomène en analysant une solution possible de la tâche t introduite ci-dessus.

La solution analysée ici est basée sur la mise en œuvre de la technique τ_2 qui relève du thème 'Homothéties-translations' auquel nous a conduits la présence de configurations de Thalès

'Pour démontrer que 3 points sont alignés, démontrer que l'un des points est l'image d'un deuxième point par une homothétie de centre le dernier point'.

Tableau 2 : Solution de la tâche t avec la technique τ_2

	Soit A' le point d'intersection de D et (BJ). Soit H l'homothétie de centre I, transformant A en A'. Déterminons l'image de M. $H((AM))$ est la droite parallèle à (AM) passant par $H(A)$, càd (BJ). $H((BM))$ est la droite parallèle à (BM) passant par $H(B)$. Il faut donc déterminer $H(B)$. Soit B' le point commun à (IB) et D''. Montrons que $H(B) = B'$
--	--

Figure 2.

O étant le point d'intersection de (BI) et (AM) , on a

$$\frac{IB'}{IB} = \frac{AC}{AB} = \frac{AM}{AO} = 1 - \frac{OM}{OA} = 1 - \frac{MB}{AI} = 1 - \frac{AA'}{AI} = 1 + \frac{AA'}{IA} = \frac{IA'}{IA}$$

Donc on a bien $H(B) = B'$. Il s'en suit que $H((BM)) = D''$ et que $H(M)$ est le point commun à (BJ) et D'' , càd J . Ceci prouve que I, M et J sont alignés.

Analysons maintenant cette solution en termes de choix et d'obstacles.

Première étape t_1

Premier obstacle, un manque : le contexte définitoire ne contient aucune homothétie, ainsi l'instanciation de la technique à t introduit une première étape t_1 qui est une instanciation du type de tâches T_1 : Définir une homothétie.

Premier choix : il existe quatre techniques pour T_1 : Définir l'homothétie 1. par son centre et son rapport ($\tau_{1,1}$) ; 2. par son centre et l'image d'un point distinct du centre ($\tau_{1,2}$, portée : les trois points doivent être alignés) ; 3. par l'image de deux points A et B ($\tau_{1,3}$, portée : si A' (resp. B') est le point image de A (resp. B), le quadrilatère ABB'A' doit être un trapèze, croisé ou pas, mais pas un parallélogramme ; autrement dit, une configuration de Thalès est présente) ; 4. par composition de deux homothéties ou d'une homothétie et d'une translation ($\tau_{1,4}$) .

L'existence d'une telle OMPC crée un embarras du choix car, par exemple, les trois points alignés A, B et C permettent de définir 6 homothéties, les trapèzes croisés AIBM et BMCJ deux homothéties transformant A en M et I en B pour l'une, B en J et C en M pour l'autre. Par composition on obtient sous condition à préciser une homothétie transformant I en J. Cette piste semble une impasse car le centre de la composée ne peut être M. La solution choisit d'introduire une homothétie de centre I.

Deuxième obstacle : dans les données n'existe aucun triplet de points alignés impliquant I, J ou M. Il faut en introduire un.

Deuxième choix : Soit A' le point d'intersection de D et (BJ).

Soit H l'homothétie de centre I, transformant A en A'. Il faut déterminer H(M).

Deuxième étape t_2

t_2 relève donc du type de tâches T_2 : Déterminer l'image d'un point par une homothétie que l'on peut restreindre à un sous-type en précisant que l'homothétie est définie par son centre I et l'image A' d'un point A.

Troisième choix : il existe trois techniques pour T_2 : 1. déterminer le point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = \frac{IA'}{IA} \cdot \overrightarrow{IM}$ ($\tau_{2,1}$) ; 2. déterminer l'image d'une droite passant par M et distincte de (IM), H(M) est le point d'intersection de cette droite image avec (IM) ($\tau_{2,2}$) ; 3. déterminer l'image de deux droites sécantes en M, ne passant pas par I, H(M) est le point d'intersection des deux droites images ($\tau_{2,3}$).

Le contexte contient trois droites passant par M autres que (IM). Il faut déterminer au moins l'image de l'une.

Troisième étape t_3

t_3 relève donc du type de tâches T_3 : Déterminer l'image d'une droite d par une homothétie dans le cas où la droite ne passe pas par le centre.

Quatrième choix : il existe deux techniques pour T_3 : 1. déterminer l'image de deux points distincts de d ($\tau_{3,1}$) ; 2. déterminer l'image d'un point et considérer la parallèle à d passant le point image ($\tau_{3,2}$).

$\tau_{3,2}$ s'applique facilement à (AM) puisqu'on connaît l'image de A et que (AM) // (A'B) par définition de A'.

Troisième obstacle : on ne connaît pas le point commun à (A'B) et (IM). Il faut donc changer de technique et déterminer l'image de (BM) = D'.

Quatrième obstacle : on ne connaît pas H(B).

Quatrième étape t_4

t_4 relève à nouveau de T_2 .

Quatrième choix : utiliser $\tau_{2,1}$ en introduisant le point B' commun à (IB) et

D'' pour lequel on cherche à montrer que $\overrightarrow{IB'} = \frac{\overrightarrow{IA'}}{\overrightarrow{IA}} \cdot \overrightarrow{IB}$.

Puisque les points I, B et B' sont alignés, la relation vectorielle à justifier peut se reformuler de la façon suivante : $\frac{\overrightarrow{IB'}}{\overrightarrow{IB}} = \frac{\overrightarrow{IA'}}{\overrightarrow{IA}}$

Cinquième étape t_5

t_5 relève d'un quatrième type de tâches T_4 : Montrer une égalité de rapports de mesures algébriques.

Cinquième choix : Il existe deux techniques pour T_4 . L'une est une application directe du théorème de Thalès, il faudrait toutefois démontrer que (AB) // (A'B') ; l'autre repose sur des égalités successives, obtenues notamment grâce à des configurations de Thalès présentes, en association avec des transformations algébriques

On constatera en revenant à la solution donnée précédemment que la suite d'égalités introduites est marquée de plusieurs choix (choix des configurations de Thalès extraites de l'ensemble, choix de l'égalité de rapports déduite) et de deux initiatives (introduction du point O, transformation algébrique du rapport) permettant de faire face à deux obstacles que nous laissons au lecteur le soin de décrire.

La fin de la démonstration ne comporte ni choix ni obstacle et ceci, notamment du fait du choix du point B' : l'image de (BM) est la parallèle à (BM) qui passe par B', c'est donc D'' par définition de B'. Si l'on avait défini B' comme le projeté de A' sur (IB) parallèlement à (BA), l'application de $\tau_{2,1}$ aurait été immédiate. Mais il aurait fallu pour terminer la démonstration établir que B' est un point de (CJ).

La technique d'alignement choisie ainsi que toutes les autres techniques mobilisées pour traiter les tâches intermédiaires qui sont apparues se sont révélées efficaces pour la tâche t . À quels objets du contexte définitoire de t doit-on cette efficacité ? A la présence de points et droites vérifiant respectivement des relations d'alignement et de parallélisme, formant des configurations de Thalès et des parallélogrammes, particulièrement repérables par les ostensifs associés dans la figure. Ces objets ont permis qu'à chaque étape, au moins une des techniques disponibles dans l'OML associée au thème des homothéties-translations se révèle efficace.

Mais la technique ayant été choisie, son succès pour la tâche t n'était pas assuré, il a été permis par les choix du producteur de la solution : choix de technique puisqu'à chaque étape est intervenu un type de tâches associé à plusieurs techniques (OMPC), choix d'objets ajoutés au contexte définitoire pour surmonter les obstacles rencontrés (points A' , B' et O), choix d'un cheminement parmi les multiples configurations de Thalès disponibles, etc. Ces choix apparaissent comme des actions adaptées au contexte singulier de la tâche. Remarquons qu'ils résultent de l'activité du résolveur, il n'est donc pas étonnant que le style d'analyse d'une tâche présenté ici renvoie à celui qui a été initié par A. Robert et J. Rogalski (Vandebrouck, 2008) dans le cadre d'une Théorie de l'Activité en didactique des mathématiques. J'ai moi-même utilisé les outils proposés pour l'analyse d'énoncés d'exercices (Castela, 2019).

Dans l'espoir de repérer des façons de faire transférables, peut-on discerner sur quoi repose cette adéquation ? Considérons le choix du point A' : il est défini à partir d'objets figurant dans le contexte définitoire, objets dont les propriétés vont pouvoir être utilisées dans les démonstrations impliquant A' (t_3 , t_5). On peut aussi raisonner à partir de la propriété à démontrer : si (vraiment) pour une homothétie de centre I , $H(M) = J$, alors nécessairement $H(A)$ est le point commun à D et à la parallèle à (MA) passant par J . Ceci est une phase d'analyse à finalité heuristique, technique d'une grande généralité ; ici, elle conduit de même à la caractérisation choisie du point B' .

Quant à la transformation $\frac{AM}{AO} = \frac{AO+OM}{AO} = 1 - \frac{OM}{OA}$, elle donne accès au rapport impliquant les deux côtés parallèles d'une configuration de Thalès, c'est un possible élément de la technologie pratique associée à T_4 .

Par cet exemple, nous pensons avoir illustré les conséquences sur l'activité mathématique du caractère non algorithmique de nombreuses techniques. Nous avons fait fonctionner ce que nous considérons comme un outil pour l'étude de l'œuvre, formée par un énoncé décrivant une tâche et une solution ou bien un théorème et sa démonstration.

4. Le schéma herbartien de l'étude d'une question, une deuxième approche de la dialectique singularité-généricité dans la TAD

Par le modèle praxéologique, la TAD met en avant la généricité des activités humaines, condensée dans des praxéologies stabilisées. Mais un second modèle, introduit plus tardivement, est à même de rendre compte de la dynamique de la recherche de solutions à des problèmes nouveaux : il s'agit du schéma herbartien de l'étude d'une question.

4.1 Dialectique de la recherche et de l'étude, schéma herbartien

La présentation que nous ferons ici des développements proposés par la TAD dans le cadre de la pédagogie des PER (Parcours d'Étude et de Recherche) restera très limitée.

Depuis une dizaine d'années (voir par exemple, Chevallard, 2007 ; Chevallard & Ladjage, 2010), la TAD propose de substituer au paradigme dominant de l'étude scolaire, dit de la « visite des œuvres », un paradigme nouveau, dit du « questionnement du monde ». Celui-ci place, à la racine de l'étude scolaire, l'étude de questions qui se posent sur le monde et auxquelles les étudiants cherchent à répondre. L'étude à mener est un processus dont le moteur est une dialectique des questions et des œuvres : il n'est en effet aucune question humaine qui puisse être résolue grâce aux seules ressources intrinsèques des individus qui l'étudient, la solution utilisera des œuvres déjà produites, qui à leur tour devront être interrogées. Le déroulement d'une telle enquête se concrétise en un certain « Parcours d'Étude et de Recherche » ou PER.

L'état initial d'une enquête correspond au système didactique suivant :

$$S(X, Y, Q_0, M_0)$$

où X désigne l'ensemble des personnes engagées dans l'étude d'une question initiale Q_0 , Y l'ensemble des personnes qui aident ou dirigent l'étude ; M_0 est ici l'ensemble des ressources, y compris cognitives (les connaissances et savoirs), disponibles pour X , c'est-à-dire que X connaît suffisamment, au début de l'enquête pour les utiliser ; cet ensemble est nommé milieu, dans un sens emprunté à l'écologie. Le but de l'enquête est d'élaborer une réponse, notée $R^\heartsuit$ qui convienne à X .

X peut s'attaquer à la question qui lui est posée en cherchant à élaborer tout ou partie de la réponse à partir des ressources du collectif d'étude qu'il constitue, en s'appuyant sur le milieu initial de l'enquête. Dans certains cas, ce processus sera couronné de succès grâce à certaines innovations produites par le travail de X . Ce postulat est à la base de la notion de situation a-didactique au sein de la Théorie

des Situations Didactiques. Les ressources du milieu sont sollicitées en particulier pour écarter des réponses erronées. Plus largement, X peut organiser un dispositif d'expérimentation ou de recueil de données sur le terrain. On peut reconnaître là certaines démarches des chercheurs de métier. Mais, à l'instar de ces mêmes chercheurs, X peut aussi supposer qu'existent dans la culture des savoirs pertinents pour l'étude de la question posée, savoirs qu'il ignore et gagnerait à s'approprier. Il se met donc à la recherche dans tous les médias accessibles d'éléments susceptibles de lui être utiles¹⁷ : des éléments de savoir éclairant la question, des réponses $R^\diamond$ à la question Q_0 déjà produites dans des institutions qui les ont légitimées (d'où le poinçon). X réunit ainsi un ensemble d'oeuvres qu'il devra étudier, c'est-à-dire 1. soumettre à une analyse critique, 2. s'approprier suffisamment pour les utiliser comme nouvelles ressources, autrement dit pour les intégrer au milieu de l'enquête.

Le schéma suivant, dit herbartien (Chevallard & Adjage, 2010, p. 3) représente le processus de l'enquête dont nous venons d'esquisser une description très sommaire, mettant en avant par la première flèche la dynamique de développement du milieu.

$$[S(X; Y; Q) \Rightarrow M] \Rightarrow R^\heartsuit$$

Figure 3. Le schéma herbartien de l'enquête

On remarquera que dans ce schéma, la notation initiale Q_0 a été remplacée par Q . C'est que, partant de la question initiale, le processus d'enquête fait vivre une dialectique des questions et des réponses dont la richesse va conditionner la qualité de la réponse finale. Pour un exemple très éclairant, on pourra se reporter à (Bosch & Winslow, 2015, pp. 380-389).

J'avais toujours, jusqu'à présent, envisagé ce modèle dans le cadre d'une pédagogie et les PER mathématiques comme des processus visant à enseigner et faire apprendre des savoirs et praxéologies mathématiques. Or l'enquête sur la TAD dont je rends compte dans cet article m'a fait prendre conscience que la modélisation herbartienne est d'abord une modélisation de l'activité des chercheurs en commençant à la racine que constitue l'affrontement à des tâches singulières nouvelles. Les enquêtes réalisées dans différents cadres, scolaires ou non, ont produit des outils permettant d'analyser la dynamique du processus de recherche d'une réponse. Je me contenterai de citer les dialectiques

¹⁷ Cette dimension distingue clairement la pédagogie ainsi développée de celle qui est proposée par la Théorie des Situations Didactiques.

médias/milieus, individuel/collectif, boîte noire/boîte grise, diffusion/réception. Pour une liste exhaustive, voir les rubriques « *Dialectic* » du glossaire proposé dans le livre *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education* (Chevallard et Bosch, 2020).

Comment la modélisation herbartienne prend-elle en compte l'objectif scientifique de passage de la singularité à la généralité, c'est-à-dire de production de savoirs généraux et de praxéologies stabilisées ? Dans les éléments très succincts que j'ai donnés, on ne le voit pas. Il faudrait pour cela regarder de plus près les différentes dialectiques évoquées ci-dessus, notamment celle des questions et des réponses. Notons que l'organisation didactique des moments de l'étude (Chevallard, 2002) propose une modélisation du processus que doit organiser un professeur pour que des élèves apprennent une praxéologie, c'est-à-dire la reconstruisent pour eux-mêmes. Même s'il est peu regardé comme tel, ce modèle vaut également pour l'activité des chercheurs.

4.2 Cas où la question est relative à la production d'une démonstration

En mathématique, toute question Q_0 conduit à une ou des questions du genre « Comment démontrer que telle affirmation est vraie ? ». Ce genre de tâches occupe largement les mathématiciens, mais aussi les étudiants en mathématiques de l'enseignement supérieur et, encore aujourd'hui, les lycéens français de spécialité mathématique. La spécification de ce qui est à démontrer conduit à un type de tâches T_0 dont relève la question Q_0 vue comme une tâche singulière, associée à un contexte définitoire donné. Le milieu M_0 pour X peut contenir une organisation praxéologique, éventuellement complexe, relative à T_0 . La partie 3 a amplement montré que, dans de nombreux cas, cela ne réduit pas à zéro le travail à accomplir pour produire une réponse à Q_0 . Même dans cette situation, la plus fréquente dans le cas de l'enseignement classique des mathématiques où il s'agit d'adapter du général à une singularité, X peut gagner à disposer d'un exemple de mise en œuvre de la ou des techniques connues pour T_0 . C'est, a fortiori, le cas si M_0 ne contient aucune technique pour T_0 , c'est-à-dire si X n'en connaît pas. X pourra alors se mettre à la recherche dans les médias auxquels il a accès de praxéologies relatives à T_0 ou, a minima, de réponses R'_0 à une question Q'_0 , relevant de T_0 mais de contexte définitoire différent de celui de Q_0 . Ainsi un chercheur pourra entreprendre de transférer à un contexte différent le travail présenté par des collègues à un séminaire ou publié dans une revue. Un étudiant cherchera la solution, donnée par le professeur ou par un recueil d'exercices corrigés, à un problème voisin de celui qu'il doit traiter. Il s'agit alors d'un transfert d'une tâche singulière à une autre tâche singulière. X peut s'en satisfaire ou chercher ensuite à repérer et expliciter des éléments de généralité, c'est-à-dire à construire une praxéologie.

Dans les deux cas, l'étude de l'œuvre, formée par un énoncé décrivant une tâche et une solution ou bien un théorème et sa démonstration, apparaît comme une dimension inévitable du processus de recherche symbolisé par le schéma herbartien. Trouver une telle œuvre dans un média ne suffit pas à l'intégrer au milieu : il faut 1. la valider, activité mathématique tout à fait classique et 2. en faire un outil pour la production de $R^\heartsuit$. Par un jeu de questions, X doit faire dire au texte de solution ce qu'il peut lui apprendre¹⁸. L'analyse présentée dans la section 3.4 fournit un outil pour cela, nous en donnons ici une description décontextualisée.

4.3 Outil pour l'analyse de la solution apportée à une tâche singulière

Cet outil comporte plusieurs niveaux.

Le premier est inspiré de Chaachoua (2010, p.49) qui propose de définir une technique τ comme une suite de types de tâches $(T_i)_i$ et son instanciation pour une tâche comme une suite de tâches $(t_i)_i$, chaque t_i relevant de T_i . Notre analyse de la solution étudiée construit effectivement une première suite $(t_i)_i$ de tâches à accomplir, dont découle une suite de questions $(Q_i)_i$ (Comment accomplir t_i ?), puis une suite de type de tâches $(T_i)_i$ pour lesquels sont connues une ou plusieurs techniques $\tau_{i,j}$ (réponses $R_{i,j}^\diamond$ à Q_i). C'est ici l'analyse de la solution pour t qui produit la suite des types, non l'inverse comme chez Chaachoua. La suite des types n'est donc qu'une description potentielle de la technique, à mettre à l'épreuve d'autres tâches. Dans le cas étudié, l'expérience poussera plutôt à considérer les T_i comme des ingrédients possibles : toute instanciation de la technique fera intervenir certains T_i , pas forcément tous et pas nécessairement dans le même ordre que pour la solution analysée. Complété par une description succincte de la ou des techniques associées à chaque T_i , ce premier niveau ouvre la voie à la production de savoirs technologiques décrivant la technique (fonction « Décrire la technique de Castela & Romo Vázquez, 2011, p. 88).

Le deuxième niveau met en évidence pour chaque t_i les choix auxquels donne lieu la solution, en premier lieu le choix des techniques lors des étapes intermédiaires dans le cas d'OMPC, les obstacles rencontrés et les initiatives prises pour les surmonter. Si l'obstacle est un manque, lui est associé le choix d'objets nouveaux qui viennent enrichir le contexte définitoire.

La mise en œuvre de ces deux premiers niveaux produit une modélisation de la solution en termes de choix stratégiques dans *l'hic et nunc* de la tâche. Pour

¹⁸ Cf. la dialectique inscription/excription (Chevallard & Bosch, 2020, p. xxiii).

évaluer la possibilité d'un transfert et plus largement y repérer des germes de généricité, situés au niveau des règles stratégiques (Sensévy, 2011, p. 41) et des complexes de signes susceptibles d'orienter l'action future (*ibidem*, p. 46), deux questionnements complètent l'étude :

- À quels objets, non-ostensifs et ostensifs du contexte définitoire de la tâche doit-on le succès de la suite des techniques utilisées ?
- Une fois la technique choisie, à quoi peut-on attribuer l'efficacité des choix et initiatives opérées par le résolveur ?

Comme on l'a vu dans l'exemple étudié, la première question participe du processus qui peut aboutir à la construction de ce que l'on pourrait nommer une variable d'opportunité d'une technique, associée au thème dont relève cette technique. Il s'agit de déterminer, à partir de l'implication d'une technique τ dans la résolution de plusieurs tâches, des conditions sur le contexte définitoire susceptibles de favoriser l'efficacité de τ et orientant donc vers son emploi dans des tâches ultérieures. Cette affordance, son explicitation en termes de variable relève de la composante pratique de la technologie des techniques produites par le thème.

La deuxième question débouche sur un grain plus fin de l'analyse, elle peut permettre de repérer des éléments spécifiques de la technique. Par exemple, pour l'emploi de τ_5 dans la tâche t' , il sera plus efficace de travailler avec l'angle orienté $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BS(M)})$, plutôt qu'avec l'angle $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MS(M)})$ car B étant commun aux deux cercles, la décomposition $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BS(M)}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BS(M)})$ introduit deux angles inscrits qu'il est alors possible d'égaliser avec deux angles au centre (fonction « Faciliter la mise en oeuvre de la technique » de la technologie, Castela & Romo Vázquez, 2011, p. 89). Inversement, cette deuxième question peut conduire à des éléments d'une plus grande généralité (les heuristiques évoquées par Sensevy) comme c'est le cas dans notre exemple de la prise en compte des buts à atteindre par un processus informel d'analyse pour choisir un objet nouveau (fonction « Motiver la technique et les gestes qui la composent », *ibidem*, p. 89).

Terminons cette section par une observation. L'outil proposé néglige totalement la question de la validité de la démonstration construite et donc des théorèmes impliqués. C'est qu'il se veut comme un complément de l'approche usuelle des œuvres mathématiques, orientée vers la validation et la composante théorique des praxéologies. Mon hypothèse est qu'une telle approche est notoirement insuffisante pour développer la capacité à jouer le jeu mathématique. Si un mathématicien étudie la démonstration d'un théorème, il ne le fait pas seulement pour être certain que le théorème est valide et pour en comprendre et mémoriser

le contenu, il le fait aussi pour apprendre de la démonstration des façons de jouer avec les nouveaux objets introduits dans le cadre théorique dont relève l'œuvre : la preuve du théorème 'La somme de deux fonctions continues en a est continue en a' est l'occasion d'apprendre à faire fonctionner la définition en (ε, η) de la continuité.

Étudier la démonstration d'un théorème dans une perspective pratique, ceci est une dimension de l'étude du cours de mathématiques extrêmement peu encouragée par les professeurs du secondaire. Mais combien d'entre eux l'ont-ils pratiquée pendant leurs études universitaires, compte tenu de la répartition encore très répandue du topos, la théorie aux professeurs, la résolution de problèmes aux étudiants ? Il est plus probable qu'ils aient eu l'occasion, au moins pendant leur travail personnel, d'analyser des corrigés de problèmes pour y dégager des idées pratiques à retenir (Castela, 2004). À supposer qu'ils aient le projet de faire une place explicite dans leurs classes à un tel travail, ce qui n'a rien de certain (cf. section 2.1), se pose la question des techniques didactiques pour y parvenir. L'outil présenté ici peut constituer une ressource utile dans cette perspective.

Conclusion

J'espère avoir montré par cet article l'intérêt qu'il peut y avoir pour un chercheur à ne pas cantonner sa réflexion dans un seul cadre théorique. En l'espèce, je me suis appuyée sur quelques éléments du travail de G. Sensevy (2011) au sein de la TACD pour aborder avec un regard nouveau la théorie qui a constitué la référence dominante de mes travaux, à savoir la TAD. Chez Sensevy, la notion de jeux de savoir associe dans une même unité les dimensions génériques d'un jeu et les dimensions singulières de *l'hic et nunc* de chaque partie. Comment la TAD prend-elle en compte cette dualité et les dialectiques auxquelles elle donne lieu ? Telle est la question Q_0 qui a enclenché le parcours d'étude que j'ai réalisé au sein de la TAD, pour produire, sans prétention d'exhaustivité, ma réponse $R^\heartsuit$, que présente cet article.

Prise en compte de la genericité

Chronologiquement, la TAD a commencé par s'intéresser aux aspects génériques des activités humaines et plus particulièrement des mathématiques à travers le modèle des organisations praxéologiques. J'ai personnellement étendu la notion d'Organisation Mathématique Ponctuelle (une technique pour un type de tâches) de façon à prendre en compte les cas où plusieurs techniques sont disponibles pour un même type (OMP Complexe). J'ai également contribué au développement du modèle en défendant la nécessité d'intégrer dans la technologie d'une technique des savoirs pratiques relatifs aux aspects dotés

d'une certaine invariance de sa mise en œuvre. Parmi ces savoirs, des critères génériques permettent d'approcher la portée de la ou des techniques au sein du type de tâches, autrement dit, de définir des sous-types spécifiques pour lesquels il est raisonnable d'essayer telle ou telle technique. Une telle démarche de spécification est aujourd'hui théorisée, notamment grâce à la notion de variable empruntée à la Théorie des Situations Didactiques, par H. Chaachoua et A. Bessot. Leurs travaux qui proposent des définitions formalisées des notions de type et sous-type de tâches, relèvent de la théorie T4TEL, développée en référence explicite à la TAD pour répondre aux besoins spécifiques de recherches consacrées aux Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain. Prenant appui sur un milieu M_0 contenant de solides connaissances du domaine géométrique, j'ai pu dans mon enquête concrétiser le lien entre OMPC, savoirs pratiques, variables et spécificité en travaillant sur le Type de tâches « Démontrer que trois points sont alignés ». Relativement à une technique donnée de l'OMPC, sont introduites deux variables associées respectivement à la théorie et à la technologie de la technique.

Toujours sur le plan de la généricité, l'enquête que j'ai menée pour en savoir plus sur le concept d'affordance empruntée par Sensevy au champ de la psychologie m'a conduite à intégrer dans ma réponse à la question sur la TAD la contribution d'Y. Matheron et A. Arraya. Dans le cadre de leurs recherches sur la mémoire didactique, ceux-ci ont introduit la notion d'ostensif déclencheur, résultat d'une construction sémiotique prenant en charge, à partir d'expériences singulières une certaine généricité des contextes d'utilisation opportune d'une technique. C'est la dimension ostensive des sous-types spécifiques évoqués plus haut.

Du générique au singulier

Les textes de Chevallard autour du modèle praxéologique reconnaissent le caractère problématique de la mise en œuvre d'une technique dans le traitement d'une tâche singulière : explicitation du caractère non algorithmique de nombreuses techniques, introduction d'un moment du travail de la technique dans le modèle des moments de l'étude. Mais dans ces textes et les travaux auxquels ils donnent lieu ce passage au singulier de la tâche n'est pas théorisé. Il m'a fallu recourir aux outils proposés par la Double Approche appuyée sur la Théorie de l'Activité pour développer des analyses de tâches et rentrer dans le détail de ce que peut être le travail de la technique. Dans le prolongement du travail théorique de Chaachoua, la thèse de S. Jolivet précise la notion de tâche. Adoptant leur point de vue, j'ai introduit dans cet article la notion de contexte définitoire d'une tâche qui, partant d'un type de tâches, me permet de caractériser la singularité d'une tâche. Les variables évoquées précédemment permettent d'analyser le contexte définitoire, elles guident le choix d'une

technique. Sans garantie de succès si la technique n'est pas un algorithme du fait de la singularité du contexte définitoire. N'ayant pas rencontré dans mon enquête sur la TAD d'outils permettant d'analyser l'activité réalisée (ou à réaliser) pour actualiser une technique dans un contexte donné (cf. Sensevy, 2011, p. 202), j'ai travaillé à partir de la définition du concept d'algorithme de (Modeste, 2012). Ceci m'a conduit par contraposition à distinguer deux dimensions dialectiquement liées dans la confrontation d'une technique à la singularité : l'embarras du choix et l'obstacle à la concrétisation du choix. J'ai utilisé ces propositions pour analyser une solution à une tâche d'alignement.

Du singulier au générique

Au sein de la TAD, le modèle des moments de l'étude, généralement considéré dans une perspective d'enseignement, peut également modéliser le processus de construction de praxéologies à partir de la confrontation à plusieurs tâches singulières. De même, l'analyse de solution évoquée ci-dessus, si elle est d'abord descriptive (quels choix ont été réalisés ? comment ont été surmontés les obstacles ?), se poursuit par la recherche des raisons de l'adéquation des initiatives au contexte, dans le but de repérer des éléments transférables à d'autres tâches et de construire du générique à partir du singulier. C'est d'ailleurs ce que je fais en décontextualisant l'outil d'analyse de solution/démonstration illustré dans l'exemple.

Modéliser la dynamique de la résolution de problèmes nouveaux

Je terminerai par ce qui constitue pour moi un changement de point de vue inattendu sur ce qui est désigné par la TAD comme pédagogie de l'enquête. J'ai pris conscience que plusieurs des outils introduits dans cette perspective pédagogique, schéma herbartien de l'étude, milieu de l'étude, différentes dialectiques à l'œuvre dans les PER, permettent l'analyse du processus de résolution de problèmes nouveaux.

Le présent article rend compte de mon enquête au sein de la TAD, j'espère que, par les balises ainsi mises à disposition, il aidera le lecteur à réaliser un parcours analogue.

Références

- Araya-Chacón, A. et Matheron, Y. (2015). Un modèle pour l'évocation des connaissances en classe de mathématiques. Micro-cadre institutionnel de la mémoire didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 35(1), 37-68.
- Bautier, E. et Rochex, J-Y. (1998). *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens. Démocratisation ou massification ?* Collection Formation des enseignants, Paris : Armand Colin

Bautier, E. et Rochex, J.Y. (2004). Activité conjointe ne signifie pas significations partagées. In Moro, C. & Rickenman, R. (Eds), *Situation éducative et significations* (pp. 197-220). Bruxelles : De Boeck.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.

Bosch, M et Winslow, C. (2015). Linking problem solving and learning contents: the challenge of self-sustained study and research processes. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 35(3), 357-399.

Butlen, D. et Pezard, M. (2003). Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23(3), 41-78.

Castela, C. (2000). Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(3), 331-380.

Castela, C. (2004). Institutional influencing mathematics students' private work: a factor of academic achievement. A comparative study of two French higher education institutions. *Educational Studies in Mathematics*, Volume 57.1, 33-63.

Castela, C. (2008a). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 28(2), 135-182.

Castela, C. (2008b). Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes. Dans A.Rouchier et I. Bloch (Eds), *Perspectives en didactique des mathématiques. Cours à la 13ème école d'été de Didactique des mathématiques* (pp. 89-114). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Castela, C. (2009), An anthropological approach to a transitional issue: analysis of the autonomy required from mathematics students in the French Lycée. *NOMAD (Nordisk Matematikk Didaktikk)*, Volume 14-2, 5-27.

Castela, C. (2011). *Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets / Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques*. Note de synthèse présentée en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot. Paris : Irem Paris Diderot.

<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00683613>

Castela, C. (2019). Outiller les enseignants pour la sélection de tâches mathématiques dans les manuels. Dans Abboud-Blanchard M. (Ed.), *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines, Actes du Colloque EMF 2018*, pp. 667-676. Paris : IREM de Paris.

https://emf2018.sciencesconf.org/data/actes_EMF2018.pdf

Castela, C. et Romo Vázquez, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31(1), 79-130.

Chaachoua, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique des EIAH. Études de cas : la modélisation des connaissances des élèves*. Note de synthèse présentée en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches. Grenoble, Université Joseph Fourier. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00922383>

Chaachoua, H. (2020). T4TEL : Un cadre de référence pour la formalisation et l'extension du modèle praxéologique. *Revista do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática, volumen 22 (4)*, 103-118.

Chaachoua, H. et Bessot, A. (2019). La notion de variable dans le modèle praxéologique. *Revista do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática, volumen 21 (4)*, 234-247.

<http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p234-247>

Chevallard, Y. (1997). Familiale et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(3), 15-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures & Fonctions. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Éd.), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (p. 3-22). La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. Dans Ruiz-Higueras & Al. (Eds) *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)* (pp. 705-746). Jaén: publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. et Bosch, M. (2020). A short (and somewhat subjective) glossary of the ATD. Dans M. Bosch, Y. Chevallard, F.J. García & J. Monaghan (Eds), *Working with the anthropological theory of the didactic. A comprehensive casebook*, (pp xviii-xxxvii). Routledge.

Chevallard, Y., et Ladjage, C. (2010). Enquêter pour connaître. L'émergence d'un nouveau paradigme scolaire et culturel à l'âge de l'Internet. Colloque de Liège.

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Colloque_de_Liege_15-10-2010_YC_CL_-2.pdf

De Certeau, M. (1980). *L'invention du quotidien. 1.Arts de faire*. Paris : Gallimard, Folio Essais n°146, 1990 ; rééd. 2002.

Halbwachs, M. (1925, 1994). *Les cadres sociaux de la mémoire*. Paris : PUF.

Jolivet, S. (2019). *Modèle de description didactique de ressources d'apprentissage en mathématiques, pour l'indexation et des services EIAH*. Thèse de doctorat, Communauté Université Grenoble Alpes, Grenoble.

Kim, S. (2016). *Les besoins mathématiques des non-mathématiciens : quel destin institutionnel et social ? : études d'écologie et d'économie didactiques des connaissances mathématiques*. Thèse de doctorat : université d'Aix-Marseille.

www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2016/02/SKim-These.pdf

Luyat, M. & Regia-Corte, T. (2009). Les affordances : de James Jérôme Gibson aux formalisations récentes du concept. *NecPlus | « L'Année psychologique » 2009/2 Volume 109*, 297-332.

<https://www.cairn.info/revue-l-annee-psychologique1-2009-2-page-297.htm>

doi : 10.4074/S000350330900205X

Matheron, Y. (2010). *Contribution à l'étude du travail de la mémoire dans les processus d'enseignement et d'éducation*. Université de Provence- Aix-Marseille.
<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00586293>

Morgagni, S. (2011). Repenser la notion d'affordance dans ses dynamiques sémiotiques. *Intellectica. Revue de l'Association pour la Recherche Cognitive*, n°55, 2011/1. *Synesthésie et Intermodalité*. pp. 241-267

doi : <https://doi.org/10.3406/intel.2011.1170>

https://www.persee.fr/doc/intel_0769-4113_2011_num_55_1_1170

Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithmique pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* Thèse de doctorat, université de Grenoble.

Perrin-Glorian, M-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les « classes faibles », *Recherches en Didactique des Mathématiques* 13(1-2), 95-118.

Perrin-Glorian, M-J. (2021). Dialectique contrat/milieu. Quelle complémentarité entre TACD et Théorie des Situations ? Dans M.-J. Gremmo (Ed.), *Actes Vol 2 2è congrès de la TACD. Pour une reconstruction de la forme scolaire*, pp. 190-207.

https://tacd-2021.sciencesconf.org/data/pages/TACD_2021_Actes_Volume_2_final.pdf

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL : Academic Press.

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles : de Boeck.

Stoffregen, T. A. (2003). Affordances as properties of the animal-environment system. *Ecological Psychology*, 15, 115-134.

Vandebrouck, F. (Ed.), (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques enseignantes*. Toulouse : Octarès Editions.