



HAL
open science

Atténuation robuste du fouillis mural en imagerie radar à travers murs par optimisation riemannienne

Hugo Brehier, Arnaud Breloy, Chengfang Ren, Guillaume Ginolhac

► To cite this version:

Hugo Brehier, Arnaud Breloy, Chengfang Ren, Guillaume Ginolhac. Atténuation robuste du fouillis mural en imagerie radar à travers murs par optimisation riemannienne. GRETSI, Aug 2023, Grenoble, France. hal-04234453

HAL Id: hal-04234453

<https://hal.science/hal-04234453>

Submitted on 10 Oct 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Atténuation robuste du fouillis mural en imagerie radar à travers murs par optimisation riemannienne

Hugo BREHIER¹, Arnaud BRELOY², Chengfang REN¹, Guillaume GINOLHAC³

¹SONDRA, CentraleSupélec, Université Paris-Saclay, 91192 Gif-sur-Yvette, France

²LEME, Université Paris Nanterre, Campus de Ville d'Avray, 92410 Ville d'Avray, France

³LISTIC, Polytech Annecy-Chambéry, Annecy-le-Vieux, 74 940 Annecy, France

hugo.brehier@centralesupelec.fr

Résumé – Cet article explore l'atténuation du fouillis induit par le mur frontal dans le cadre de l'imagerie radar à travers murs à travers l'optimisation sur la variété riemannienne des matrices de rang fixé. Un ensemble de méthodes classiques de projection sur sous-espace utilisent implicitement une distance euclidienne entre les données et l'estimation du mur. Nous proposons ici d'utiliser une distance robuste pour gérer le bruit hétérogène présent dans de nombreuses applications radar. Une première approche est d'utiliser une relaxation convexe et un découplage de la variable optimisée. Nous introduisons une seconde approche via l'optimisation riemannienne pour ne pas relaxer la contrainte de rang ni faire usage du découplage. Finalement, nous validons cette approche par une étude de Monte-Carlo sur données simulées.

Abstract – This paper explores the mitigation of front wall clutter in through-wall radar imaging via Riemannian optimization on the manifold of fixed-rank matrices. The set of methods using a subspace projection implicitly employ a Euclidean distance between the data and the wall estimate. We propose here to use a robust distance to manage heterogeneous noise which is present in many radar applications. A first approach would then be to use a convex relaxation and a decoupling of the optimized variable. We introduce a second approach via Riemannian optimization so as not to relax the rank constraint nor make use of decoupling. Finally, we validate this approach by a Monte-Carlo study on simulated data.

1 Introduction

L'imagerie radar à travers les murs [1], d'acronyme anglais TWRI, consiste à imager une pièce close depuis l'extérieur grâce à l'utilisation d'un radar. Cet outil est utile dans des opérations de surveillance militaire ou médicale [1, 2]. Il se heurte cependant à des difficultés qui empêchent son utilisation dans un cadre large, par exemple lorsque l'on considère des cibles statiques, un mur hétérogène et une scène complexe induisant du fouillis. Une composante primordiale du TWRI est l'atténuation des échos générés par l'obstacle que constitue le mur frontal et qui obstrue la vue sur la pièce à imager [3]. Ce filtrage est souvent préalable à l'imagerie de la scène (qui peut s'effectuer par reconstruction parcimonieuse à travers un dictionnaire [4]) mais peut aussi être effectuée en parallèle [4]. Dans le premier cas, nous pouvons noter les approches par filtrage spatial [5] ou par séparation des sous-espaces identifiés comme ceux du mur et des cibles [6, 7]. Celles-ci décomposent la matrice des retours via la décomposition en valeurs singulières (SVD) et la projettent sur le complément orthogonal du sous-espace lié au mur.

Ce papier considère une extension de ces dernières, pour apporter plus de robustesse à des bruits hétérogènes répandus en radar ainsi qu'à des valeurs aberrantes. Deux approches sont développées: une relaxation convexe associée à un découplage de la variable optimisée et un algorithme sur variété riemanni-

enne sans relaxation ni découplage nécessaire. La Section 2 de ce papier développe les méthodes classiques de filtrage des retours du mur en TWRI: d'abord en euclidien via SVD et ensuite de façon robuste via l'optimisation convexe. La Section 3 introduit la méthode d'optimisation riemannienne permettant de considérer la contrainte de rang sans relaxation ni découplage, dont on attend une meilleure capacité à naviguer la contrainte de rang. En effet, la Section 4 contient une comparaison des différentes méthodes sur données simulées polluées par un bruit hétérogène et montre l'avantage de la méthode riemannienne.

2 Méthodes classiques

2.1 Modèle de signal de radar à travers murs

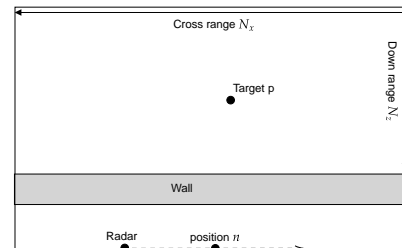


FIG. 1: Cadre classique de l'imagerie radar à travers les murs

Dans le cadre le plus courant du radar à travers murs en 2D, des mesures sont effectuées parallèlement au mur frontal que l'on veut pénétrer (ceci est important pour obtenir une matrice des retours du mur qui soit de rang faible) pour imager la pièce obstruée, comme décrit dans la Figure 1. Cela peut s'effectuer par le déplacement d'un seul radar, auquel cas on émet et reçoit un signal à une position avant de passer à la suivante.

Un modèle des retours peut s'écrire comme la somme des retours du mur frontal et des cibles (on exclut donc du modèle le fouillis issu des murs latéraux, typique d'une pièce fermée rectangulaire, certains multitrajets pouvant par contre être pris en compte [4]). Ainsi, pour la fréquence $m = 1, 2, \dots, M$ et la position du radar $n = 1, 2, \dots, M$, le signal retourné $y(m, n)$ s'écrit [6] :

$$\begin{aligned} y(m, n) &= \sigma_w \exp(-j\omega_m \tau_w) + s(m, n) \\ \Rightarrow [y(1, n) \dots y(M, n)]^T &\triangleq \mathbf{y}_n = \mathbf{l}_n + \mathbf{s}_n \quad (1) \\ \Rightarrow [\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_N] &\triangleq \mathbf{Y} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \end{aligned}$$

où $s(\cdot, \cdot)$ désigne les retours des cibles à l'intérieur de la pièce, tandis que τ_w désigne le délai du trajet direct aller-retour du radar au mur avec atténuation complexe σ_w .

Sachant que les retours du mur écrasent ceux des cibles au sein de la scène, une étape cruciale de l'imagerie radar à travers murs est de filtrer les retours de ce mur frontal. Dans cette géométrie de déplacement parallèle au mur du radar, les retours du mur frontal sont invariants le long de l'axe de déplacement du radar, ce qui implique que la matrice $\mathbf{L} \triangleq [\mathbf{l}_1 \dots \mathbf{l}_N] \in \mathbb{C}^{M \times N}$ est de rang faible, sans structure supplémentaire. Une approche courante est ainsi de prendre en compte la structure de rang faible de la matrice des retours du mur pour permettre sa séparation du reste des retours, qui incluent donc les cibles qui nous intéressent et que l'on veut détecter et localiser.

2.2 Séparation des sous-espaces mur et cibles

Une première approche permettant d'effectuer l'atténuation des retours du mur frontal est de séparer le sous-espace des retours du mur de celui des cibles [6]. Les retours du mur sont beaucoup plus puissants que ceux des cibles et sont donc associés aux valeurs singulières les plus fortes. Formons le projecteur sur le complément orthogonal du sous-espace associé aux retours du mur qui est engendré par les vecteurs singuliers $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^R$ et $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^R$ de \mathbf{Y} associés aux valeurs singulières ayant les plus fortes amplitudes $\{\sigma_i\}_{i=1}^R$:

$$\mathbf{P}_w^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{U}_R \mathbf{U}_R^H \quad (2)$$

où $\mathbf{U}_R = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_R]$. Il est alors possible de projeter les données sur le complément orthogonal à l'espace mur pour atténuer la composante du signal liée au mur et obtenir des données filtrées :

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{P}_w^\perp \mathbf{Y} \quad (3)$$

Notons qu'à travers le théorème d'Eckart-Young [8], il est possible de reformuler cette procédure à travers le problème d'optimisation avec contrainte de rang :

$$\tilde{\mathbf{L}} = \arg \min_{\text{rg}(\mathbf{L}) \leq R} d_{\text{F}}^2(\mathbf{Y}, \mathbf{L}) \quad (4)$$

avec d_{F}^2 la distance (au carré) induite par la norme de Frobenius, pour obtenir $\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{L}}$. Ceci suggère alors des généralisations à d'autres distances que l'usuelle distance euclidienne, par exemple des distances robustes utilisant la fonction de Huber [9]. On définit la fonction robuste de Huber par $H_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ avec $c \in \mathbb{R}^+$ et :

$$H_c(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x|^2 & \text{si } |x| \leq c \\ c(|x| - \frac{1}{2}c) & \text{si } |x| > c \end{cases} \quad (5)$$

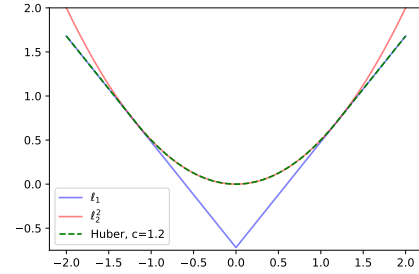


FIG. 2: Fonction robuste de Huber

La raison d'être d'une telle fonction est de réduire l'impact sur la distance des points aberrants (cf. Figure 2) qui contribuent davantage à celle-ci que les autres points. Cela induit alors la distance (au carré) de Huber sur matrices complexes :

$$d_{\text{H}}^2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N H_c([\mathbf{X} - \mathbf{Y}]_{ij}) \quad (6)$$

En suivant le problème (4), une extension robuste est donc de trouver $\tilde{\mathbf{L}}$ solution de :

$$\min_{\text{rg}(\mathbf{L}) \leq R} d_{\text{H}}^2(\mathbf{Y}, \mathbf{L}) \quad (7)$$

Cependant, il n'existe pas de solution analytique équivalente au théorème d'Eckart-Young pour la distance de Huber. Il est donc nécessaire de trouver une solution algorithmique [10].

2.3 Relaxation convexe et découplage

Une méthode populaire pour s'attaquer à la contrainte non-convexe de rang faible est de relaxer celle-ci par son enveloppe convexe qui est la norme nucléaire [11]. Le problème (7) devient ainsi, en forme régularisée :

$$\min_{\mathbf{L}} \mu \|\mathbf{L}\|_* + d_{\text{H}}^2(\mathbf{Y}, \mathbf{L}) \quad (8)$$

avec $\mu \in \mathbb{R}^+$ le paramètre de cette régularisation.

L'étape suivante consiste à utiliser les opérateurs proximaux. Le proximal d'une fonction f convexe, propre et fermée a la propriété d'être unique, ce qui donne lieu à de nombreux algorithmes d'optimisation [12]. Un algorithme renommé pour la résolution de problèmes contenant deux variables dans une fonction objective consistant en des termes séparables, dont les opérateurs proximaux sont connus (ce qui est le cas de la fonction de Huber et de la norme nucléaire) et dont les contraintes

Algorithme 1 ADMM pour (9)

- 1: $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{U} \leftarrow \mathbf{0}_{M \times N}$
 - 2: **repeat**:
 - 3: $\mathbf{L} = \text{prox}_{\frac{1}{\gamma}H_c}(\mathbf{M} + \mathbf{U}/\gamma - \mathbf{Y}) + \mathbf{Y}$
 - 4: $\mathbf{M} = D_{\mu/\gamma}(\mathbf{L} - \mathbf{U}/\gamma)$
 - 5: $\mathbf{U} = \mathbf{U} + \gamma(\mathbf{M} - \mathbf{L})$
 - 6: **until** stopping criterion is met
-

sont linéaires, est la méthode d'*Alternating Direction Method of Multipliers* (ADMM) [12], dont l'application à notre problème est résumée dans l'Algorithme 1, et qui converge globalement (en assumant qu'un point optimal existe bien) [12].

En effet, l'on introduit tout d'abord une variable auxiliaire \mathbf{M} contrainte à $\mathbf{M} = \mathbf{L}$ pour obtenir le problème découplé :

$$\min_{\mathbf{L}, \mathbf{M}} \mu \|\mathbf{M}\|_* + d_{\mathbf{H}}^2(\mathbf{Y}, \mathbf{L}) \text{ s.t. } \mathbf{M} = \mathbf{L} \quad (9)$$

qui est conforme à l'ADMM. On travaille alors sur le Lagrangien Augmenté de (9) :

$$\mu \|\mathbf{M}\|_* + d_{\mathbf{H}}^2(\mathbf{Y}, \mathbf{L}) + \langle \mathbf{U}, \mathbf{M} - \mathbf{L} \rangle + \frac{\gamma}{2} \|\mathbf{M} - \mathbf{L}\|_F^2 \quad (10)$$

avec \mathbf{U} la matrice duale et $\gamma \in \mathbb{R}^+$ le paramètre du Lagrangien Augmenté.

• La minimisation sur \mathbf{L} , après complétion de la norme carrée, donne alors un proximal comme solution, à une translation près et par séparabilité des proximaux. En effet, le proximal de la fonction de Huber est connu :

$$\text{prox}_{aH_c}(x) = \left(1 - \frac{a}{\max(|\frac{x}{c}|, a+1)}\right) x \quad (11)$$

que l'on applique élément par élément sur la matrice donnée.

• Pour \mathbf{M} , le problème est similaire et la résolution passe par le proximal de la norme nucléaire, dénoté D :

$$\mathbf{M} = D_{\mu/\gamma}(\mathbf{L} - \mathbf{U}/\gamma), \quad (12)$$

avec $D_{\lambda}(\mathbf{X}) = \mathbf{U}_x S_{\lambda}(\boldsymbol{\Sigma}_x) \mathbf{V}_x^H$ où l'on a $\mathbf{X} \stackrel{\text{SVD}}{=} \mathbf{U}_x \boldsymbol{\Sigma}_x \mathbf{V}_x^H$ et S_{λ} le proximal de la norme ℓ_1 , le fameux opérateur dit de seuillage doux et de seuil λ .

• Pour \mathbf{U} , l'on a un *Dual Ascent* standard pour l'ADMM.

Cependant, pour obtenir cette résolution, nous avons dû passer par la relaxation convexe de la contrainte de rang faible et par le découplage de la variable \mathbf{L} à optimiser. Il est possible de ne pas effectuer ces deux étapes en utilisant l'optimisation sur variété riemannienne.

3 Optimisation riemannienne

L'optimisation riemannienne [13] est un moyen de prendre en compte des contraintes non-convexes sans les relaxer, lorsque que les objets considérés appartiennent à une variété riemannienne. C'est le cas des matrices d'une certaine dimension et de rang fixe $\mathbb{C}_R^{M \times N} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{M \times N} : \text{rg}(\mathbf{X}) = R\}$. Cette

Algorithme 2 Descente de gradient riemannienne pour (14)

- 1: $\mathbf{L} \leftarrow \mathbf{0}_{M \times N}$
 - 2: **repeat**
 - 3: Compute α via linesearch
 - 4: $\mathbf{L} = R_{\mathbf{L}}(-\alpha \text{grad } f(\mathbf{L}))$
 - 5: **until** stopping criterion is met
-

variété est développée dans [14] comme sous-variété intégrée de $\mathbb{C}^{M \times N}$. Son espace tangent \mathbf{y} est décrit par :

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{X}} \mathbb{C}_R^{M \times N} = \{ & \mathbf{U}_x \mathbf{M} \mathbf{V}_x^H + \mathbf{U}_p \mathbf{V}_x^H + \mathbf{U}_x \mathbf{V}_p^H : \\ & \mathbf{M} \in \mathbb{C}^{R \times R}, \mathbf{U}_p \in \mathbb{C}^{M \times R}, \mathbf{V}_p \in \mathbb{C}^{N \times R}, \\ & \mathbf{U}_x^H \mathbf{U}_p = \mathbf{0}, \mathbf{V}_x^H \mathbf{V}_p = \mathbf{0} \} \end{aligned} \quad (13)$$

De plus, la projection orthogonale sur $T_{\mathbf{X}} \mathbb{C}_R^{M \times N}$ de $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ est un point de l'espace tangent $T_{\mathbf{X}} \mathbb{C}_R^{M \times N}$ paramétré par $\mathbf{M} = \mathbf{U}_x^H \mathbf{Z} \mathbf{V}_x$, $\mathbf{U}_p = \mathbf{Z} \mathbf{V}_x - \mathbf{U}_x \mathbf{M}$, $\mathbf{V}_p = \mathbf{Z}^H \mathbf{U}_x - \mathbf{V}_x \mathbf{M}^H$. Le gradient riemannien est exprimé comme la projection orthogonale du gradient euclidien sur l'espace tangent.

En considérant la métrique euclidienne usuelle, on définit une rétraction $R_{\mathbf{X}}(\mathbf{H})$ en \mathbf{X} dans la direction $\mathbf{H} \in T_{\mathbf{X}} \mathbb{C}_R^{M \times N}$ sur cette variété à travers la SVD tronquée au rang R de $\mathbf{X} + \mathbf{H}$. Celle-ci permet de naviguer sur la variété dans une direction donnée de l'espace tangent.

Posons alors le problème sans relaxation suivant :

$$\min_{\mathbf{L} \in \mathbb{C}_R^{M \times N}} f(\mathbf{L}) = d_{\mathbf{H}}^2(\mathbf{Y}, \mathbf{L}) \quad (14)$$

On peut alors utiliser la descente de gradient riemannienne définie dans l'Algorithme 2 (où grad dénote donc le gradient riemannien) et visuellement dans la Figure 3. Son coût est faible et ne nécessite que le gradient : une méthode du second-ordre pourrait ne pas fonctionner, la dérivée seconde de la fonction de Huber étant nulle par endroits. On notera que la méthode a une convergence locale [13] mais a bien fonctionné dans nos essais avec une initialisation naïve à une matrice de zéros.

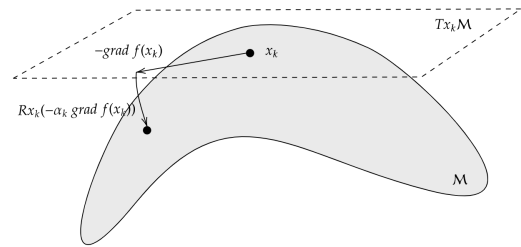


FIG. 3: Principe de la descente de gradient riemannien

Le gradient euclidien de $f : \mathbb{C}_R^{M \times N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, qui est une fonction de domaine complexe et non-analytique, exprimable via sa dérivée de Wirtinger vis-à-vis du conjugué de la variable [15]. Ce gradient est dérivable analytiquement et implique la dérivée de la fonction de Huber, bien connue. Nous utiliserons cependant dans la suite la différentiation automatique proposée dans les outils d'optimisation riemannienne.

4 Simulations

Pour valider la méthode décrite dans la section précédente, nous simulons \mathbf{L} , les retours d'un mur tel que décrit dans (1), sans cible (c.-à-d. $y(m, n) = \sigma_w \exp(-j\omega_m \tau_w)$). Nous considérons 100 fréquences uniformément réparties sur la bande de 1 à 3 GHz pour simuler le signal à une position donnée du radar (distante d'un mètre du mur), que nous répliquons à l'identique sur 67 positions radar pour simuler un déplacement parallèle au mur, avec une atténuation englobant la perte de propagation dans l'air et de réflexion au mur. Nous ajoutons \mathbf{N} , un bruit blanc i.i.d. distribué selon une loi student-t univariée [16]. Nous avons donc: $\mathbf{Y} = \mathbf{L} + \mathbf{N}$ comme données. L'algorithme de descente de gradient riemannienne est implémenté via Pymanopt [17] par une adaptation du cas réel, déjà implémenté, au cas complexe. Les données sont pré-traitées pour avoir une moyenne nulle et des vecteurs de norme euclidienne unitaire. Un résultat pour un certain tirage de bruit est visible dans la Figure 4. Pour ce cas et la suite de l'étude, le rang est fixé à $R = 1$ pour la méthode riemannienne et la méthode euclidienne. Nous prenons 2.2 degrés de liberté pour la loi de student ainsi qu'un SNR de 15 dB.

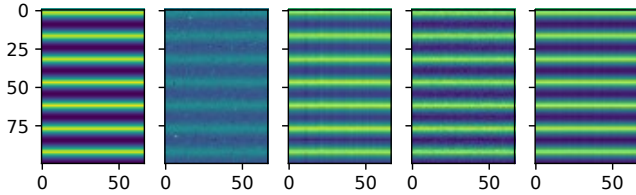


FIG. 4: De gauche à droite, en échelle log : 1) Retours réels du mur 2) Retours bruités 3) Reconstruction par SVD tronquée 4) par algorithme proximal 5) par algorithme riemannien

Finalement, nous effectuons une étude de Monte-Carlo sur 100 tirages de bruits pour évaluer les performances de chaque méthode. Le critère de comparaison est $\|\mathbf{L}_{alg} - \mathbf{L}\|_F$, la norme de la différence entre les retours reconstruits \mathbf{L}_{alg} par un algorithme sur la base des données bruités et les retours réels \mathbf{L} . Les résultats sont dans la Table 1, qui nous montre que l'algorithme riemannien obtient une meilleure performance pour ce critère.

Algorithme utilisé	SVD	Prox	RGD
Distance en % de $\ \mathbf{L}\ _F$	11 %	8%	5%

TAB. 1: Distances des retours reconstruits au réel

5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons mis en avant la question de la robustesse des méthodes d'atténuation du mur frontal en TWRI à des bruits hétérogènes qui apparaissent dans de nombreuses applications en radar [16]. Nous avons étendu le cas euclidien standard de projection des données sur le complément orthogo-

nal du sous-espace mur à d'autres distances. Nous avons alors résolu le problème en distance robuste par une relaxation convexe et un découplage de la variable à optimiser, ce qui nous permet de rentrer dans le cadre de l'ADMM. Nous avons ensuite exploré une approche d'optimisation sur la sous-variété riemannienne des matrices de rang fixe, qui permet de traiter la contrainte non-convexe de rang sans la relaxer et sans découpler la variable à optimiser (et sans variable duale). Nous avons alors comparé les différentes méthodes sur des simulations, ce qui nous a amené à conclure que les résultats obtenus par l'optimisation riemannienne sont meilleurs que ceux obtenus par les autres méthodes.

Références

- [1] M. Amin, *Through-the-Wall Radar Imaging*. CRC Press, 2017.
- [2] Z. Li, T. Jin, Y. Dai, and Y. Song, "Through-wall multi-subject localization and vital signs monitoring using uwb mimo imaging radar," *Remote Sensing*, vol. 13, no. 15, 2021.
- [3] P. K. Verma, A. N. Gaikwad, D. Singh, and M. Nigam, "Analysis of clutter reduction techniques for through wall imaging in uwb range," *Progress In Electromagnetics Research B*, vol. 17, pp. 29–48, 2009.
- [4] H. Brehier, A. Breloy, C. Ren, I. Hinojosa, and G. Ginolhac, "Robust pca for through-the-wall radar imaging," in *2022 30th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*. IEEE, 2022, pp. 2246–2250.
- [5] Y.-S. Yoon and M. G. Amin, "Spatial filtering for wall-clutter mitigation in through-the-wall radar imaging," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 47, no. 9, pp. 3192–3208, 2009.
- [6] F. H. C. Tivive, M. G. Amin, and A. Bouzerdoum, "Wall clutter mitigation based on eigen-analysis in through-the-wall radar imaging," in *2011 17th International Conference on Digital Signal Processing (DSP)*, 2011, pp. 1–8.
- [7] F. H. C. Tivive, A. Bouzerdoum, and M. G. Amin, "A subspace projection approach for wall clutter mitigation in through-the-wall radar imaging," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 53, no. 4, pp. 2108–2122, 2015.
- [8] C. Eckart and G. M. Young, "The approximation of one matrix by another of lower rank," *Psychometrika*, vol. 1, pp. 211–218, 1936.
- [9] P. J. Huber, "Robust Estimation of a Location Parameter," *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 35, no. 1, pp. 73 – 101, 1964.
- [10] M. Gallet, A. Mian, G. Ginolhac, and N. Stelzenmuller, "Nouvel algorithme d'inversion robuste pour le radar gpr," in *GRETSI, XXVIIIème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images*, 2022.
- [11] M. Fazel, "Matrix rank minimization with applications," Ph.D. dissertation, PhD thesis, Stanford University, 2002.
- [12] P. L. Combettes and J.-C. Pesquet, "Proximal splitting methods in signal processing," in *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering*, 2009.
- [13] N. Boumal, *An introduction to optimization on smooth manifolds*. Cambridge University Press, 2023.
- [14] B. Vandereycken, "Low-rank matrix completion by riemannian optimization," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 23, no. 2, pp. 1214–1236, 2013.
- [15] R. Hunger, "An introduction to complex differentials and complex differentiability," Tech. Rep. TUM-LNS-TR-07-06, 2007.
- [16] E. Ollila, D. E. Tyler, V. Koivunen, and H. V. Poor, "Complex elliptically symmetric distributions: Survey, new results and applications," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 11, pp. 5597–5625, 2012.
- [17] J. Townsend, N. Koep, and S. Weichwald, "Pymanopt: A python toolbox for optimization on manifolds using automatic differentiation," *Journal of Machine Learning Research*, vol. 17, no. 137, p. 1–5, 2016.