



**HAL**  
open science

# Microstructures pour réaliser toute conductivité ou compressibilité encadrée par les bornes de Hashin et Shtrikman

Qi-Chang He, Hung Le Quang

► **To cite this version:**

Qi-Chang He, Hung Le Quang. Microstructures pour réaliser toute conductivité ou compressibilité encadrée par les bornes de Hashin et Shtrikman. 17e Congrès Français de Mécanique, Aug 2005, Troyes, France. pp.1-6. hal-04226951

**HAL Id: hal-04226951**

**<https://hal.science/hal-04226951>**

Submitted on 3 Oct 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Microstructures pour la réalisation de toute conductivité ou compressibilité encadrée par les bornes de Hashin et Shtrikman

Qi-Chang HE and Hung LE QUANG

*Laboratoire de Mécanique, Université de Marne-la-Vallée, Institut Navier*

*19 rue A. Nobel, 77420 Champs sur Marne, France*

## Résumé

La conductivité ou compressibilité d'un matériau composite isotrope constitué de deux phases isotropes « bien ordonnées » est encadrée par les bornes inférieure et supérieure de Hashin et Shtrikman. Ce travail consiste à construire deux nouvelles microstructures pouvant réaliser toute compressibilité ou conductivité comprise entre ces dernières. Les deux microstructures obtenues, plus simples que celles présentées dans la littérature pour atteindre le même objectif, ont la propriété que la variation de la conductivité ou compressibilité correspondante est strictement monotone par rapport au paramètre géométrique qui les caractérise.

## Abstract

The conductivity or bulk modulus of an isotropic composite consisting of two well-ordered isotropic phases is situated between the lower and upper bounds of Hashin and Shtrikman. This work is concerned with the construction of two new microstructures capable of realizing every conductivity or bulk modulus comprised between these bounds. The two microstructures obtained, appearing to be simpler than those presented in the literature to achieve the same purpose, have the property that the variation of the corresponding conductivity or bulk modulus is strictly monotone with respect to the geometric parameter characterizing them.

*Mots-clés* : Conductivité ; Module de compressibilité ; Bornes ; Microstructures

*Keywords* : Conductivity; Bulk modulus; Bounds; Microstructures

## 1 Introduction

La conductivité d'un composite isotrope formé de deux phases isotropes est encadrée par les bornes inférieure et supérieure de Hashin et Shtrikman (1962). La compressibilité du composite est également minorée et majorée par les bornes inférieure et supérieure correspondantes de Hashin et Shtrikman (1963) quand les modules de compressibilité et de cisaillement des phases sont bien ordonnés. L'optimalité de ces bornes de Hashin et Shtrikman a été prouvée presque en même temps qu'elles ont été établies (Hashin, 1962 ; Hashin et Shtrikman, 1962). Mais, les premiers travaux consistant à savoir si toute compressibilité ou conductivité située entre les bornes peut être réalisée par une microstructure furent entrepris beaucoup plus tard. En considérant une microstructure constituée de sphères composites creuses emboîtées, Milgrom

et Shtrikman (1989) ont démontré que toutes les conductivités comprises entre les bornes peuvent être balayées via la variation d'un paramètre géométrique de la microstructure. Dans un travail récent, Gilormini (2001) a construit une microstructure simple qui est capable de réaliser toute compressibilité ou conductivité en question. He et Benveniste (2004) viennent de montrer que la microstructure de Milgrom et Shtrikman permet également de réaliser toute compressibilité.

Le présent travail propose deux nouvelles microstructures qui résultent d'une modification directe de celle de Hashin (1962) et Hashin et Shtrikman (1962) et peuvent matérialiser toute conductivité ou compressibilité susmentionnée. Par rapport à celles présentées dans la littérature pour atteindre le même objectif, les deux microstructures construites dans ce travail semblent plus simples. D'autre part, nous montrons qu'elles ont la propriété que la variation de la conductivité ou compressibilité correspondante est strictement monotone par rapport au paramètre géométrique qui les caractérise.

## 2 Assemblages de sphères composites à double couche

Le composite en question est un matériau isotrope constitué de deux phases isotropes. La conductivité  $k_1$  de la phase 1, dont la fraction volumique est dénotée par  $c_1$ , est supposée supérieure à la conductivité  $k_2$  de la phase 2 ayant la fraction volumique égale à  $c_2 = 1 - c_1$ . D'après un résultat bien connu de Hashin et Shtrikman (1962), la conductivité effective  $k^*$  du composite est encadrée par

$$k_-^{HS} \leq k^* \leq k_+^{HS} \quad (1)$$

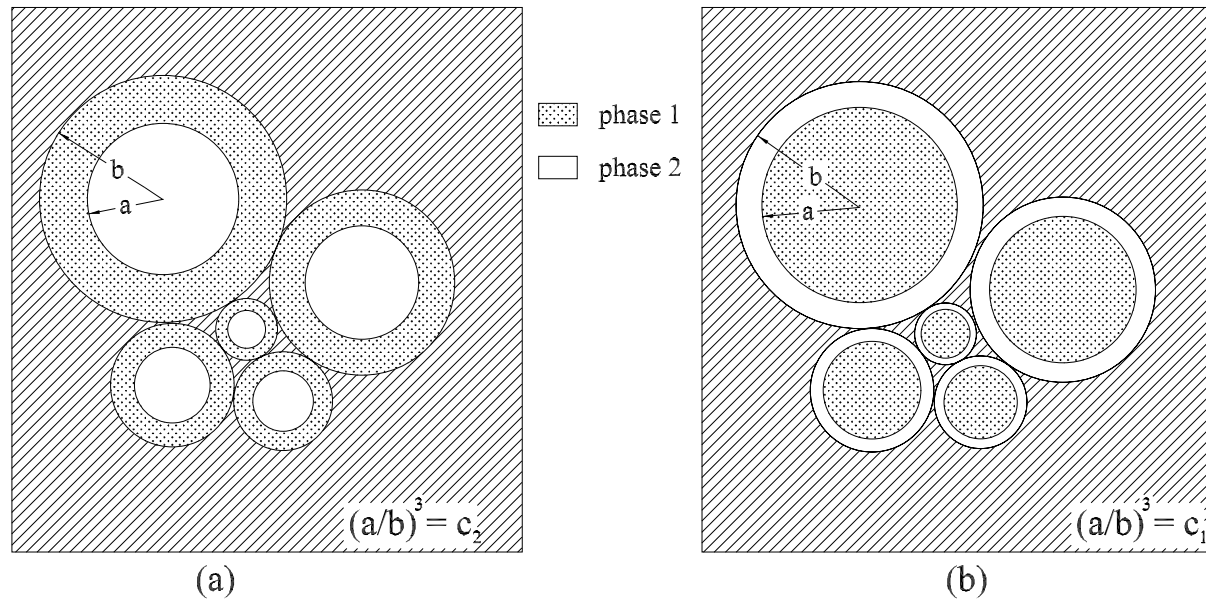
où les bornes inférieure et supérieure,  $k_-^{HS}$  et  $k_+^{HS}$ , de Hashin et Shtrikman sont données par

$$k_-^{HS} = k_2 + \frac{3c_1k_2(k_1 - k_2)}{3k_2 + c_2(k_1 - k_2)}, \quad k_+^{HS} = k_1 + \frac{3c_2k_1(k_2 - k_1)}{3k_1 + c_1(k_2 - k_1)}. \quad (2)$$

Ces bornes, réalisables par deux assemblages des sphères composites de Hashin (1962) et Hashin et Shtrikman (1962), sont optimales.

Rappeler qu'un assemblage de sphères composites (ASC) de Hashin est une microstructure particulière et correspond à un domaine tridimensionnel quelconque, qui est, à une mesure volumique nulle près, complètement rempli de sphères composites à une couche, similaires mais de différentes tailles (Fig. 1). Par une sphère composite à une couche, nous entendons une sphère de rayon  $b$  à l'intérieur de laquelle se trouve un noyau sphérique de rayon  $a$ , couvert d'une couche sphérique d'épaisseur  $b - a$ . Deux sphères composites sont dites *similaires* si (i) leurs noyaux sont constitués d'une même phase, si leurs couches extérieures sont composées d'une autre même phase et si elles sont géométriquement homothétiques. Ainsi, le rapport  $a/b$  et la fraction volumique de chaque phase sont identiques dans toutes les sphères composites similaires. La borne supérieure  $k_+^{HS}$  est réalisée par l'ASC quand la phase 2 (moins

conductrice) est choisie pour les noyaux et la phase 1 (plus conductrice) est utilisée pour les couches (Fig. 1a). En échangeant le rôle de la phase 1 contre celui de la phase 2, la borne inférieure  $k_-^{HS}$  est atteinte par l'ASC (Fig. 1b).



**Figure 1.** Assemblages de sphères composites à une couche : réalisation des bornes supérieure et inférieure de Hashin et Shtrikman par (a) et (b)

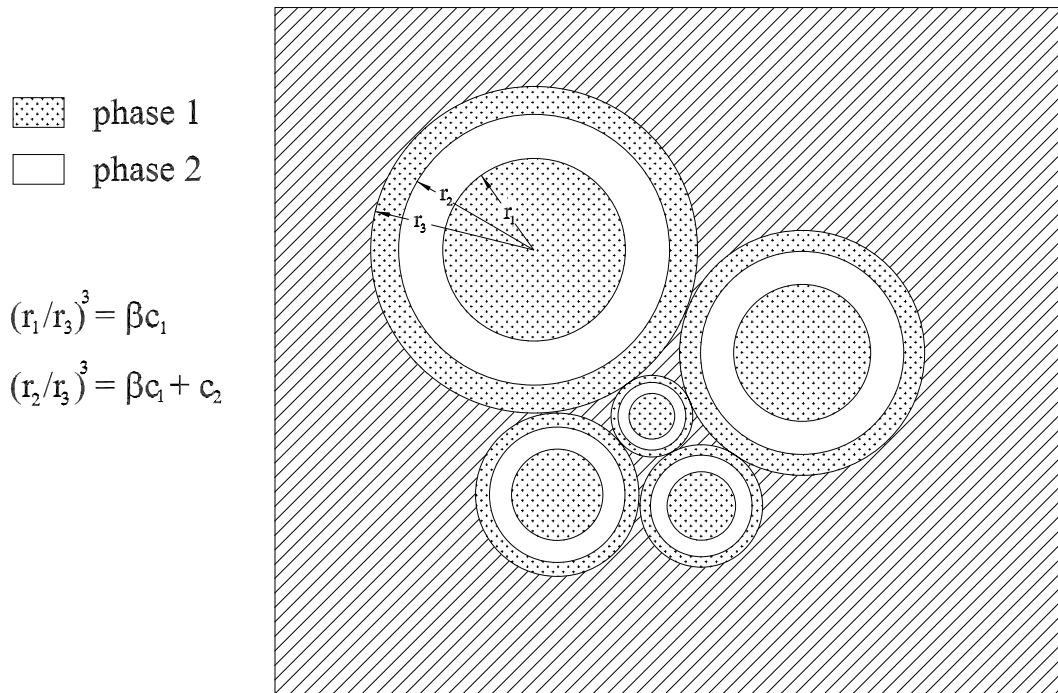
Maintenant, nous construisons une microstructure dans laquelle les fractions volumiques des phases 1 et 2 sont égales respectivement à  $c_1$  et  $c_2$ , et qui permet de réaliser une conductivité  $k^*$  donnée mais encadrée par (1). Sans perte de généralité, nous écrivons (1) sous la forme équivalente :

$$k^* = \alpha k_-^{HS} + (1 - \alpha) k_+^{HS}, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (3)$$

A notre fin, dans l'ASC de Hashin, l'élément de base, à savoir une sphère composite à une couche, est remplacée par une sphère composite à *double* couche. Plus précisément, cette dernière comporte un noyau sphérique formée de la phase 1, une première couche sphérique constituée de la phase 2 et une deuxième couche composée de la phase 1 (Fig. 2). Le rayon  $r_1$  du noyau et les rayons  $r_2$  et  $r_3$  des couches doivent être fixés de manière à retrouver les fractions volumiques  $c_1$  et  $c_2$  des phases 1 et 2. Plus exactement, la fraction volumique  $c_1$  de la phase 1 est la somme de celle  $c'_1 = \beta c_1$  du noyau et de celle  $c''_1 = (1 - \beta) c_1$  de la couche extérieure, la valeur de  $\beta$  étant comprise entre 0 et 1. Ainsi, un simple calcul montre que les rayons  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$  doivent être ajustés de telle sorte que

$$\left(\frac{r_1}{r_3}\right) = \beta c_1, \quad \left(\frac{r_2}{r_3}\right) = \beta c_1 + c_2 \quad (\beta \in [0, 1]). \quad (4)$$

Il est direct mais crucial de constater que l'ASC à une couche réalisant  $k_+^{HS}$  ou  $k_-^{HS}$  est retrouvé selon que  $\beta = 0$  ou  $\beta = 1$ . Ce constat nous conduit naturellement à poser les deux questions suivantes. Pour une valeur de  $\alpha$  donnée, existe-il une valeur de  $\beta$  telle que l'ASC à double couche réalise la conductivité  $k^*$  précisée par (3)? Si la réponse est oui, la correspondance entre  $\beta$  et  $\alpha$  est-elle univoque? La prochaine section a pour objectif de répondre à ces deux questions.



**Figure 2.** Assemblage de sphères composites à double couche : réalisation de toute conductivité ou compressibilité

### 3 Résultats

La conductivité effective  $k$  de l'ASC à double couche décrit ci-dessus (Fig. 2) est fournie par

$$k = k_1 + \frac{3c_2(c_2 + \beta c_1)k_1(k_1 - k_2)(k_1 + 2k_2)}{(1 - \beta)c_1c_2(k_1 - k_2)(k_1 + 2k_2) - 3c_2k_1(k_1 + 2k_2) - 9\beta c_1k_1k_2} \quad (5)$$

Cette formule peut être obtenue par l'expression (2)<sub>2</sub> de  $k_+^{HS}$  dans laquelle  $c_2$  est remplacé par  $c_2 + \beta c_1$  et  $k_2$  par

$$k_2^* = k_2 + \frac{3\beta c_1k_2}{c_2 - 3(c_2 + \beta c_1)k_2/(k_2 - k_1)} \quad (6)$$

Cette dernière n'est que la formule (2)<sub>1</sub> de  $k_-^{HS}$  dans laquelle  $c_1$  et  $c_2$  sont respectivement remplacés par  $\beta c_1/(c_2 + \beta c_1)$  et  $c_2/(c_2 + \beta c_1)$ . En effet, l'ASC à double couche en question

est équivalent à l'ASC à une couche dont le noyau de chaque sphère est lui-même une sphère composite à une couche. Sur ce point, le lecteur peut se référer à Milton (2002, § 7.2) pour plus de détails. Noter que la formule (5) peut s'obtenir aussi directement de la formule de récurrence (46) de Hervé et Zaoui (1993).

Ensuite, la conductivité  $k$  déterminée par (5) est considérée comme une fonction du paramètre  $\beta$ . A partir de (5), nous obtenons

$$\frac{dk}{d\beta} = \frac{6c_1c_2^2k_1(k_2 - k_1)^3(k_1 + 2k_2)}{[(1 - \beta)c_1c_2(k_1^2 + k_1k_2 - 2k_2^2) - 3c_2k_1(k_1 - k_2) - 9(c_2 + \beta c_1)k_1k_2]^2} . \quad (7)$$

Sous notre hypothèse que  $k_1 > k_2$ , il s'ensuit que

$$\frac{dk}{d\beta} < 0 , \quad (8)$$

ce qui montre que la conductivité  $k$  donnée par (5) est une fonction *strictement décroissante* du paramètre  $\beta$ . D'autre part, il est facile de vérifier que  $k = k_+^{HS}$  quand  $\beta = 0$  et que  $k = k_-^{HS}$  quand  $\beta = 1$ . Ainsi, nous en déduisons qu'à toute conductivité  $k^*$  donnée et encadrée par (1) est associée une valeur *unique* de  $\beta$  telle que la conductivité  $k$  de l'ASC à double couche est égale à  $k^*$ . Plus précisément, en posant

$$k^* = k \quad (9)$$

et en substituant les expressions (3) et (5) de  $k^*$  et  $k$  dans (9), nous trouvons

$$\beta = \frac{c_2\alpha[2k_1 + k_2 + c_2(k_1 - k_2)](k_1 + 2k_2)}{9(1 - \alpha)k_1k_2 + c_2[(3 - \alpha)k_1^2 + (8\alpha - 3)k_1k_2 + 2\alpha k_2^2] + c_2^2\alpha(k_1 - k_2)(k_1 + 2k_2)} . \quad (10)$$

Cette expression satisfait les conditions suivantes :  $\beta = 0$  pour  $\alpha = 0$  et  $\beta = 1$  pour  $\alpha = 1$ . De plus, nous pouvons montrer que  $d\beta/d\alpha > 0$ , i.e.  $\beta$  est une fonction *strictement croissante* de  $\alpha$ .

En introduisant la valeur de  $\beta$  déterminée par (10) dans (4), nous déterminons un assemblage illustré par la Figure 2, dont la conductivité est égale précisément à une valeur de  $k^*$  fixée par l'intermédiaire de  $\alpha$ . En faisant  $\alpha$  ou  $\beta$  varier entre 0 et 1, toutes les conductivités sont balayées de  $k_+^{HS}$  à  $k_-^{HS}$ , de façon *continue et décroissante*, par la microstructure.

#### 4 Remarques

Une alternative par rapport à la microstructure illustrée par la Figure 2 est la suivante. La phase 1, plus conductrice que la phase 2, occupe uniquement la couche intermédiaire alors que la phase 2 se trouve à la fois dans le noyau et dans la couche extérieure. Dans ce cas, nous pouvons obtenir les résultats similaires à ceux de la Section 5, en utilisant la même démarche.

Concernant la compressibilité d'un composite isotrope formé de deux phases isotropes, si les modules de compressibilité et cisaillement des phases,  $\kappa_i$  et  $\mu_i$ , respectent les conditions d'ordre  $\kappa_1 \geq \kappa_2$  et  $\mu_1 \geq \mu_2$ , alors tous les résultats présentés ci-dessus pour la conductivité restent valables pour la compressibilité à condition de remplacer  $k^*$ ,  $k_-^{HS}$ ,  $k_+^{HS}$ ,  $k_i$ ,  $3k_i/2$ ,  $k$  et  $k_2^*$  respectivement par  $\kappa^*$ ,  $\kappa_-^{HS}$ ,  $\kappa_+^{HS}$ ,  $\kappa_i$ ,  $\mu_i$ ,  $\kappa$  et  $\kappa_2^*$ . Le fait que les résultats pour la conductivité sont transposables à la compressibilité par un changement approprié de paramètres a également été employé dans le travail de Gilormini (2001).

L'idée de base de notre travail réside dans le simple constat que l'assemblage de la Figure 2 est une configuration intermédiaire de ceux de la Figure 1. Les auteurs de ce travail pensent que ce constat doit être connu par beaucoup de chercheurs dans le domaine de la micromécanique. Mais, à notre connaissance, dans la littérature ce constat n'a jamais été explicitement exploité pour réaliser toute conductivité ou compressibilité encadrée par les bornes de Hashin et Shtrikman.

**Remerciements** : les auteurs sont reconnaissants à Y. Benveniste (Tel-Aviv University, Israel) pour les discussions stimulantes.

## References

- Gilormini, P. (2001), Realizable compressibility and conductivity in isotropic two-phase composites. *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Serie II b*, 851-855.
- Hashin, Z. (1962), The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl. Mech.* **29**, 143-150.
- Hashin, Z., and Shtrikman, S. (1962), A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. *J. Appl. Phys.* **33**, 3125–3131.
- Hashin, Z., and Shtrikman, S. (1963), A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids* **11**, 127-140.
- He, Q.-C., and Benveniste, Y. (2004), Exactly solvable spherically anisotropic thermoelastic microstructures. *J. Mech. Phys. Solids* **52**, 2661-2682.
- Hervé, E., and Zaoui, A. (1993), n-Layer inclusion-based micromechanical modelling. *Int. J. Engng. Sci.* **31**, 1-10.
- Milgrom, M., and Shtrikman, S. (1989), A layered-shell model of isotropic composites and exact expressions for effective properties. *J. Appl. Phys.* **66**, 3429-3436.
- Milton, G.W. (2002), *The Theory of Composites*. Cambridge University Press: Cambridge.