



**HAL**  
open science

## **Bifurcation fourche et ralentissement critique.**

Mathevet Renaud, Garrigou Simon, Houelleur Arnaud Le, Ablonet Emeryk,  
Fabre Charlotte, Lamrani Nabil, Marchou Patrice, Combe Nicolas

► **To cite this version:**

Mathevet Renaud, Garrigou Simon, Houelleur Arnaud Le, Ablonet Emeryk, Fabre Charlotte, et al..  
Bifurcation fourche et ralentissement critique.. Le Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et  
de Chimie, 2023, 117, pp.573. hal-04226946

**HAL Id: hal-04226946**

**<https://hal.science/hal-04226946v1>**

Submitted on 4 Oct 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Bifurcation fourche et ralentissement critique

par Renaud MATHEVET<sup>(a,b,c)</sup>, Simon GARRIGOU<sup>(c)</sup>, Arnaud LE HOUELLEUR<sup>(c)</sup>,  
Emeryk ABLONET<sup>(c)</sup>, Charlotte FABRE<sup>(a)</sup>, Nabil LAMRANI<sup>(a)</sup>, Patrice MARCHOU<sup>(a)</sup>  
et Nicolas COMBE<sup>(d,e)</sup>

(a) Groupe recherche-formation « Smartphone instrument de mesure »  
Institut de recherche pour l'enseignement des sciences (IRES)<sup>(1)</sup>  
Université Paul Sabatier - 31062 Toulouse Cedex 9

(b) Laboratoire national des champs magnétiques intenses (LNCMI)  
CNRS UPR 3228, UGA, UPS, INSA, EMFL - 31400 Toulouse et 38042 Grenoble

(c) Centre de préparation à l'agrégation de physique - Promotion 2021-2022 - Toulouse

(d) Centre d'élaboration de matériaux et d'études structurales (CEMES)  
CNRS UPR 8011 - 31055 Toulouse Cedex 4

(e) Université de Toulouse - Université Paul Sabatier (UPS) -31055 Toulouse  
renaud.mathevet@incmi.cnrs.fr

**N**OUS PRÉSENTONS DANS CET ARTICLE deux études complémentaires d'une bifurcation fourche, phénomène typique de physique non linéaire qui apparaît dans certaines transitions de phases notamment. Nous la mettons en évidence au moyen d'un pendule posé sur un plateau tournant : à partir d'une vitesse de rotation critique du plateau, la position verticale vers le bas du pendule cesse d'être stable et le bras s'élève spontanément. Les grandeurs mécaniques sont mesurées soit par pointage sur un enregistrement vidéo soit à l'aide d'un smartphone. Dans les deux cas, le modèle théorique développé rend compte des observations à quelques pour cent près. L'étude vidéo est simple à mettre en œuvre et aborde très concrètement le phénomène. L'utilisation du smartphone, tout aussi simple expérimentalement, mais plus exigeante en ce qui concerne la manipulation des données, permet une analyse plus détaillée dont nous en présentons un aspect : le ralentissement critique à l'approche de la bifurcation.

## INTRODUCTION

Si la physique non linéaire peut être abordée expérimentalement au niveau post-bac [1-4] nous envisageons ici deux notions peu étudiées expérimentalement : bifurcation fourche et ralentissement critique. Nous reprenons le dispositif expérimental original introduit dans l'article de Renaud Mathevet, Nicolas Combe et *al.* [5] pour l'étude de l'accélération de Coriolis. Il est constitué d'un pendule posé sur un plateau tournant. Nous considérons ici, contrairement à notre étude de l'accélération de Coriolis, les grandes vitesses de rotation du plateau afin d'étudier la dynamique non

(1) <https://ires.univ-tlse3.fr/sim/>

linéaire du système. Elle a pour origine la force centrifuge qui s'exerce sur le bras du pendule et tend à écarter le pendule de l'axe vertical de rotation alors que la gravité tend à l'y ramener. En dessous d'une valeur critique  $\Omega_c$ , la gravité domine, et le pendule possède une seule position d'équilibre stable, à la verticale. Au-delà de  $\Omega_c$ , cette position d'équilibre devient instable et le système possède deux positions d'équilibre stable pour deux valeurs d'angles opposés. Ce changement qualitatif de comportement du système, d'un équilibre stable vers un équilibre instable et deux équilibres stables, constitue une *bifurcation fourche* (cf. figure 2c, pages ci-après).

De plus, nous démontrons, tant théoriquement qu'expérimentalement, que la période d'oscillation du pendule croît et, en principe, diverge à l'approche de  $\Omega_c$  : c'est le phénomène de *ralentissement critique*. Nous commencerons par une analyse vidéo de la bifurcation. C'est une méthode très directe et simple à mettre en œuvre qui permet néanmoins une analyse quantitative du phénomène. Elle ne donne cependant accès qu'à une analyse de la statique du système dans le référentiel tournant lié au plateau. Aussi, nous reprenons la même expérience à l'aide d'un smartphone pour mettre en évidence à la fois la statique *i.e.* la bifurcation et la dynamique *i.e.* le ralentissement critique.

## 1. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

Le montage utilisé est représenté sur la figure 1 (cf. page ci-contre). Il consiste en un pendule posé sur le plateau d'un tabouret tournant classique des laboratoires d'enseignement et habituellement utilisé pour illustrer la conservation du moment cinétique. Ce montage est suffisant pour l'analyse vidéo. Une enveloppe est fixée avec du ruban adhésif à l'extrémité du bras du pendule. On y glisse un smartphone qui sera utilisé dans la seconde partie de l'article.

Nous procédons dans la partie suivante à une analyse théorique rapide du système (voir l'article [5] pour plus de détails).

## 2. ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

### 2.1. Statique dans le référentiel tournant : bifurcation fourche

Le modèle utilisé pour cette expérience constitue un exercice classique de mécanique dans un référentiel non galiléen habituellement utilisé pour illustrer la force centrifuge. Le pendule est modélisé par un pendule simple de masse  $m$  et de longueur  $l_0$  écarté d'un angle  $\theta$  par rapport à la verticale. Il oscille autour d'un axe horizontal. La liaison du pendule à sa potence est donc de type pivot c'est-à-dire qu'il est contraint d'osciller dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation contrairement à une liaison rotule, comme dans l'expérience de Foucault par exemple, qui laisse le pendule osciller librement dans toutes les directions autour du point d'attache. Nous faisons l'étude dans

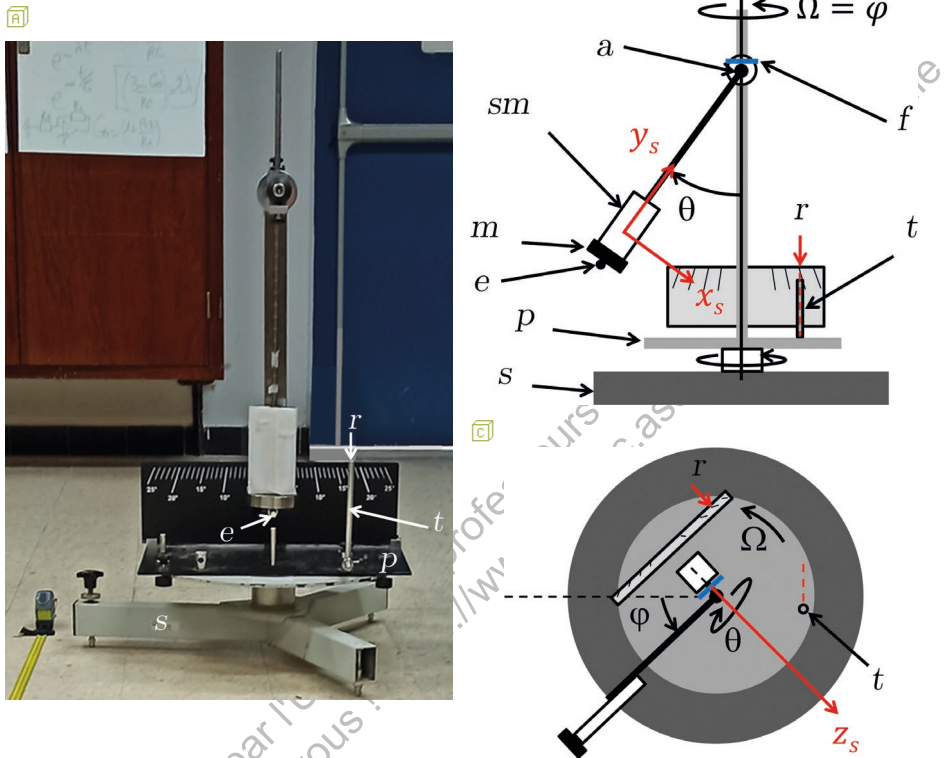


Figure 1 - (a) Photo du dispositif expérimental - (b) Schéma vu de face pour  $\varphi = 0$  -

(c) Schéma vu de dessus pour  $\varphi \neq 0$ .

**Signification des symboles :**  $a$  : axe de rotation du pendule,  $f$  : frottement,  $m$  : masse,  $p$  : plateau tournant,  $r$  : graduation de référence pour  $\varphi = 0$  ( $18^\circ$ ),  $s$  : socle lié au sol,  $sm$  : smartphone,  $t$  : tige solidaire du plateau tournant (le rôle de  $r$  et  $t$  dans l'analyse vidéo sera explicité plus bas).

le référentiel tournant lié au plateau.

Nous recherchons tout d'abord les positions d'équilibre du pendule. Le bilan des forces sur le pendule dans le référentiel tournant fait apparaître la tension  $\mathbf{T}$  exercée par le bras qui compense le poids  $\mathbf{P}$  et la force d'inertie centrifuge  $\mathbf{F}_c$ . En projetant la loi de la statique sur la direction orthoradiale  $\mathbf{e}_\theta$  (cf. figure 2A, page ci-après)<sup>(2)</sup>, il vient :

$$(\mathbf{P} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_c) \cdot \mathbf{e}_\theta = 0 = -mg \sin \theta + 0 + m\Omega^2 l_0 \sin \theta \cos \theta = ml_0 \omega_0^2 \sin \theta \left[ \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \cos \theta - 1 \right] \quad (1)$$

(2) Conformément à la convention typographique internationale, les vecteurs sont désignés par des lettres grasses et non pas surmontées d'une flèche.

avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$  la pulsation propre du pendule. On constate que le terme entre crochets peut changer de signe lorsque  $\Omega > \omega_0$ . Ainsi,  $\Omega_c = \omega_0$  apparaît comme une vitesse de rotation critique du plateau pour laquelle les angles d'équilibre du pendule changent qualitativement :

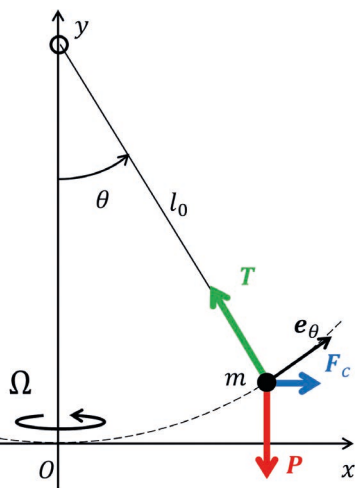
$$\theta_{\text{eq}} = 0 \text{ ou } \pi, \forall \Omega \text{ et } \cos \theta_{\text{eq}} = \frac{\Omega_c^2}{\Omega^2} \text{ pour } \Omega > \Omega_c. \quad (2)$$

La stabilité de ces positions d'équilibre peut être obtenue à partir de l'énergie potentielle effective  $E_{\text{peff}}$  (cf. figure 2B) dont dérive l'équation (1). Son développement à l'ordre 4 en puissances de  $\theta$  s'écrit :

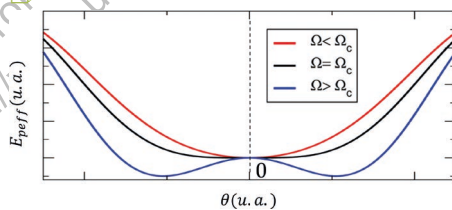
$$E_{\text{peff}} = \frac{1}{2} m l_0^2 \omega_0^2 \left[ \left( 1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_c^2} \right) \theta^2 + \frac{1}{12} \left( 4 \frac{\Omega^2}{\Omega_c^2} - 1 \right) \theta^4 + \dots \right] \quad (3)$$

Ainsi, pour  $\Omega < \Omega_c$ , la position verticale  $\theta = 0$  est une position d'équilibre stable. Pour  $\Omega > \Omega_c$ , elle devient instable (cf. figure 2B). Deux nouvelles positions d'équilibre stable, symétriques par rapport à  $\theta = 0$  apparaissent. Cette modification brutale du comportement qualitatif du pendule constitue une bifurcation fourche (cf figure 2C).

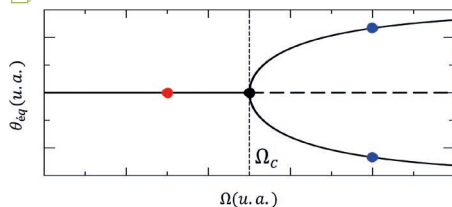
a



b



c



**Figure 2 -** a) Convention de notations et bilan des forces en statique pour un pendule simple de masse  $m$  suspendu par un bras de longueur  $l_0$  en rotation à la vitesse angulaire  $\Omega$  autour de la verticale.  $\mathbf{P}$  représente le poids,  $\mathbf{F}_c$  la force centrifuge,  $\mathbf{T}$  la tension de la tige. b) Énergie potentielle effective en fonction de l'angle d'oscillation du pendule pour des vitesses de rotation du plateau sous-critique (rouge), critique (noir) et surcritique (bleu). *u.a.* signifie unités arbitraires. c) Diagramme de bifurcation : pour les vitesses de rotation du plateau supérieures à la vitesse critique, l'angle d'équilibre du pendule cesse d'être  $\theta_{\text{eq}} = 0$  qui devient instable (ligne en pointillés). Il apparaît deux positions d'équilibre, symétriques par rapport à  $\theta = 0$  et correspondant aux minima de l'énergie potentielle (voir a)).

La dynamique du pendule se déduit des grands principes de conservation.

## 2.2. Dynamique et ralentissement critique

Soient  $J_s$  et  $J_p = ml_0^2 \sin^2 \theta$  les moments d'inertie du support (plateau tournant + potence fixe du pendule) et du bras du pendule assimilé à un point matériel de masse  $m$  par rapport à l'axe vertical de rotation du plateau. Tous les frottements (solide au niveau des liaisons pivots, fluide avec l'air) sont négligés. Ainsi, dans le référentiel du laboratoire, la composante verticale du moment cinétique total de l'ensemble (support + pendule) se conserve :

$$\frac{d}{dt} [(J_s + ml_0^2 \sin^2 \theta) \Omega] = 0. \quad (4)$$

De même pour son énergie mécanique :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_s \Omega^2 + \frac{1}{2} ml_0^2 [\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \Omega^2] - mgl_0 \cos \theta \right) = 0. \quad (5)$$

Le premier terme est l'énergie cinétique du support et le dernier l'énergie potentielle du pendule. Quant au second, il représente l'énergie cinétique du pendule : le premier terme est associé à l'oscillation du pendule dans son plan (vitesse orthoradiale) et le second à l'entraînement par le plateau (vitesse azimutale, cf. figure 2A). En dérivant par rapport au temps et combinant les équations (4) et (5) il vient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \quad (6)$$

qui est l'équation d'un pendule simple forcé par un terme lié à l'accélération d'entraînement issu de la rotation du plateau. L'équation (6) peut ainsi s'écrire :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left[ 1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_c^2} \cos \theta \right] \sin \theta = 0 \quad (7)$$

et généralise l'équation (1) de la statique où l'on a fait apparaître explicitement la vitesse critique de rotation du plateau  $\Omega_c = \omega_0$ .

Aux vitesses de rotation du plateau  $\Omega$  inférieures à la vitesse critique  $\Omega_c$ , le terme entre crochets est positif quel que soit  $\theta$  et le pendule oscille autour de sa position d'équilibre stable  $\theta_{eq} = 0$ . La période des petites oscillations est toutefois modifiée. En linéarisant l'équation (7) sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0, \quad (8)$$

on obtient la pulsation  $\omega$  et la période  $T$  associées :

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_c^2} \right) \quad \text{et} \quad T^2 = \frac{T_0^2}{1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_c^2}} \quad \text{pour} \quad \Omega < \Omega_c. \quad (9)$$

Ainsi, quand la vitesse de rotation du plateau  $\Omega$  croît et tend vers la vitesse critique  $\Omega_c$  la période des oscillations du pendule croît et formellement diverge en  $\Omega_c$ . Ceci constitue, comme nous l'avons évoqué en introduction, le phénomène de *ralentissement*

*critique*. En pratique, le coefficient du terme en  $\theta^4$  du potentiel effectif est positif, les oscillations deviennent fortement anharmoniques, mais le mouvement reste borné.

Nous avons donné ici quelques éléments essentiels à la discussion des résultats expérimentaux et renvoyons au livre de Paul Manneville [8] pour un exposé détaillé et systématique des phénomènes critiques dans l'étude des systèmes dynamiques.

Nous allons montrer ci-dessous comment les équations (2) et (9) vont nous permettre d'interpréter les données expérimentales.

### 3. ANALYSE VIDÉO

Nous commençons par décrire la mesure des positions d'équilibre du pendule par une analyse vidéo d'un film<sup>(3)</sup> de l'évolution du système. Cette expérience est rapide à mettre en œuvre, conduit à une première approche quantitative et attractive auprès des étudiants.

#### 3.1. Protocole

Au préalable, nous mesurons la pulsation propre des oscillations libres du pendule avec le plateau tournant immobilisé. Puisque notre montage comporte un smartphone, nous avons enregistré (cf. figure 3A, page ci-contre) la composante orthoradiale de l'accélération qui oscille à la même fréquence que le pendule ( $a_{x_s}$  sur la figure 1B). Nous avons obtenu par analyse de Fourier un pic fondamental à  $\omega_0 = 4,40 \pm 0,06 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  (voir des méthodes plus poussées dans les articles de Charlotte Fabre et *al.* et Renaud Mathevet et *al.* [9-10]).

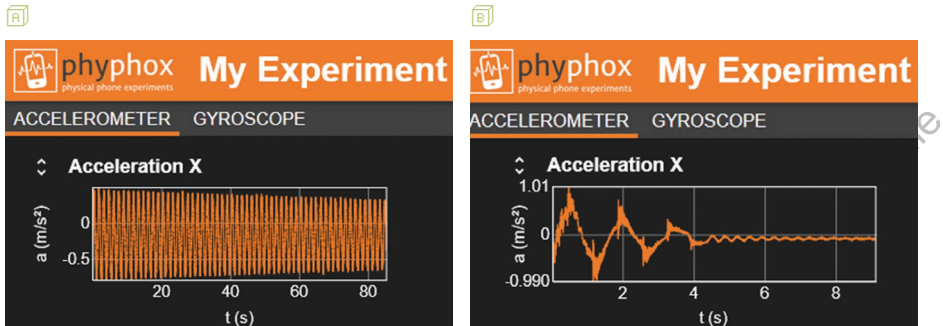
Pour étudier le diagramme de bifurcation, il nous faut mesurer l'angle d'équilibre du pendule dans le référentiel tournant. Afin d'éviter les oscillations du pendule, nous imposons un frottement important sur son axe afin que le pendule rejoigne sa position d'équilibre après un petit nombre d'oscillations (cf. figure 3B, page ci-contre). Le protocole est détaillé en annexe.

Il comprend trois phases :

- ◆ installation de la caméra et configuration du système ;
- ◆ prise de vue ;
- ◆ exploitation du film obtenu.

Pour la prise de vue, nous démarrons l'acquisition vidéo puis mettons manuellement le plateau en rotation à  $\Omega > \Omega_C$ . Le bras du pendule s'élève et rejoint rapidement sa position d'équilibre. À cause de la dissipation sur l'axe de rotation du plateau, la vitesse

(3) La vidéo est téléchargeable sur le site de l'UdPPC.



**Figure 3 -** **A**) Accélération du pendule libre selon l'axe  $x_x$  du smartphone **B**) Même chose après application d'un frottement sur l'axe. Le frottement est essentiellement de type solide ce qui conduit au caractère fortement non harmonique des oscillations et au bruit important aux extrema de l'accélération (*slip-stick* lors des changements de direction).

de rotation  $\Omega$  décroît lentement, passe par la valeur critique puis tend vers zéro. Ainsi, en une seule fois, tous les régimes  $\Omega > \Omega_c$  et  $\Omega < \Omega_c$  sont explorés.

Plusieurs logiciels, comme *Regressi*, permettent des analyses de telles séquences vidéo (protocole détaillé en annexe). En pratique il s'agit, à chaque tour du plateau, de pointer l'extrémité  $e$  du bras du pendule (cf. figure 1, pages précédentes). On obtient ainsi un triplet  $(t_i, x_i, \gamma_i)$  représentant la date de l'image et les coordonnées de  $e$  suivant la convention de la figure 2A (cf. pages précédentes). Nous calculons ensuite la vitesse de rotation du plateau et l'angle d'équilibre du pendule :

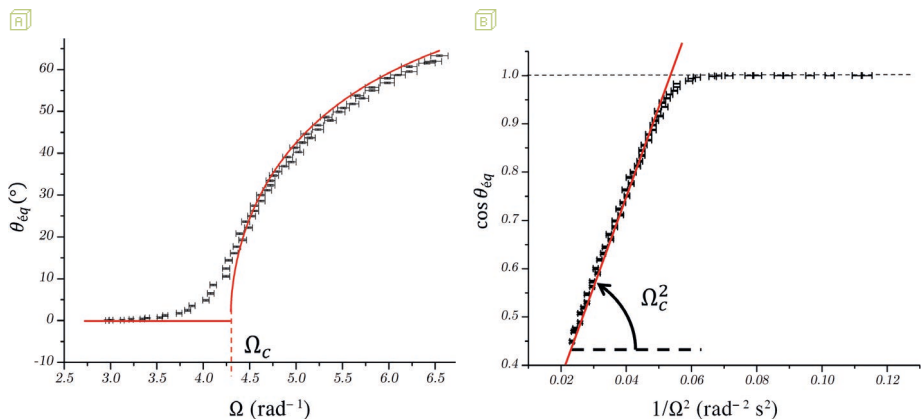
$$\Omega_i = \frac{2\pi}{t_{i+1} - t_i} \quad \text{et} \quad \theta_{eq} = \sin^{-1}\left(\frac{x_i}{l_{mes}}\right), \quad (10)$$

où  $l_{mes}$  est la longueur du bras du pendule mesurée entre l'axe de rotation  $a$  et l'extrémité  $e$  du bras du pendule. Nous avons pris la durée entre deux images du film comme incertitude temporelle  $u(t) = 9,6$  ms et estimé les incertitudes sur la position  $u(x) = u(\gamma) = 3$  mm. Il ne reste plus qu'à représenter graphiquement les données.

### 3.2. Diagramme de bifurcation : statique du système

Deux représentations du diagramme de bifurcation sont présentées sur la figure 4. Sur la figure 4A (cf. page ci-après) la représentation la plus intuitive à savoir l'angle d'équilibre en fonction de la vitesse de rotation du plateau. Sur la figure 4B (cf. page ci-après) une représentation plus élaborée basée sur l'équation (2) qui permet de remonter à la vitesse critique par un ajustement linéaire ce qui est toujours préférable du point de vue de l'analyse des données. Dans les deux cas, une comparaison avec le modèle donné par l'équation (2) est représentée en rouge.





**Figure 4** - Diagramme de bifurcation expérimental. (A) Angle d'équilibre (noir) du pendule en fonction de la vitesse de rotation du plateau tournant - (B) Cosinus de l'angle d'équilibre (noir) en fonction de l'inverse du carré de la vitesse de rotation du plateau tournant. En rouge, ajustement des données par le modèle théorique (équation (2)).

La pulsation propre du pendule préalablement définie s'identifie avec la vitesse de rotation critique du plateau. Les valeurs de  $\Omega_c$  déduites des ajustements numériques en rouge sur les figures 4A et 4B) sont respectivement  $\Omega_c = 4,27 \pm 0,06 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\Omega_c = 4,34 \pm 0,06 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ces deux valeurs sont compatibles entre elles et marginalement compatibles avec la valeur de  $\omega_0$  déterminée précédemment. L'écart ne peut être considéré significatif étant donné que notre modèle néglige les frottements, qui dans le cas présent sont importants (cf. figure 3B, page précédente). Du fait de la dissipation non prise en compte, on ne peut observer que quelques dizaines de périodes d'oscillation de sorte que la pertinence du modèle (équation (7)) ne saurait dépasser quelques pour cent ce qui correspond aux écarts observés.

Nous avons pu ainsi mesurer, de façon assez intuitive, l'angle d'équilibre du pendule dans le référentiel tournant et mettre quantitativement en évidence la bifurcation attendue. La dynamique de ce système est toutefois beaucoup plus riche et nous allons montrer comment l'utilisation des capteurs d'un smartphone nous permet d'aborder l'un de ses aspects plus avancés, le ralentissement critique.

#### 4. ANALYSE AVEC UN SMARTPHONE

Le smartphone est piloté depuis un ordinateur portable au moyen de l'application *Phyphox* et l'on enregistre simultanément les trois composantes de l'accélération et de la vitesse de rotation mesurées par les capteurs. L'accès à distance et simultané à un nombre important de grandeurs mécaniques permet une analyse détaillée du système.

Nous avons choisi le smartphone pour le confort d'utilisation, mais l'utilisation d'un microcontrôleur est aussi possible [11].

#### 4.1. Grandeurs mesurées

Les capteurs d'accélération et les gyromètres des smartphones utilisent la convention d'axes  $(x_s, y_s, z_s)$  définie sur la figure 1b (cf. pages précédentes). Dans ces conditions, en supposant le smartphone convenablement positionné dans l'enveloppe c'est-à-dire avec  $y_s$  vertical au repos et  $z_s$  perpendiculaire au plan d'oscillation du pendule, les vitesses angulaires d'oscillation du pendule et de rotation du plateau s'obtiennent à partir des gyromètres du smartphone selon :

$$\omega = \dot{\theta} = \omega_{z_s} \quad \text{et} \quad \Omega = \sqrt{\omega_{x_s}^2 + \omega_{y_s}^2}. \quad (11)$$

Naturellement, la pulsation propre du pendule  $\omega_0$  s'obtient à partir de  $\omega_{z_s}$  pour  $\Omega = 0$  comme on l'a vu lors de l'analyse vidéo.

Par ailleurs, la condition d'équilibre du pendule sur le plateau tournant s'écrit avec les accélérations  $(a_{x_s}, a_{y_s}, a_{z_s})$  mesurées par le smartphone<sup>(4)</sup> :

$$a_{x_s} \sin \theta_{eq} + a_{y_s} \cos \theta_{eq} = g \Rightarrow \cos(\theta_{eq} - \alpha) = \frac{g}{\sqrt{a_{x_s}^2 + a_{y_s}^2}} \quad \text{avec} \quad \tan \alpha = \frac{a_{x_s}}{a_{y_s}}. \quad (12)$$

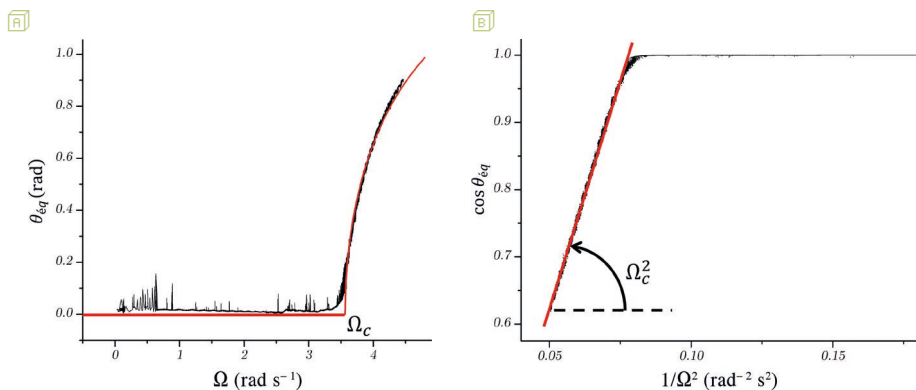
$$\text{D'où :} \quad \theta_{eq} = \cos^{-1} \left( \frac{g}{\sqrt{a_{x_s}^2 + a_{y_s}^2}} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{a_{x_s}}{a_{y_s}} \right). \quad (13)$$

Les mesures réalisées à l'aide des capteurs du smartphone permettent d'accéder à toutes les grandeurs apparaissant dans les équations (2) et (9). Par voie de conséquence, cela permet de confronter le modèle proposé aux données expérimentales. Nous commençons par la même analyse de la statique du système que celle réalisée avec la technique d'analyse vidéo.

#### 4.2. Diagramme de bifurcation

Tout comme dans l'analyse vidéo, on impose un fort frottement sur l'axe du pendule. À partir des mesures, on calcule tout d'abord la vitesse de rotation du plateau  $\Omega$  et l'angle d'équilibre du pendule  $\theta_{eq}$  au moyen des équations (11) et (13). Cela nous permet de tracer sur la figure 5 (cf. page ci-après) les deux mêmes représentations du diagramme de bifurcation (cf. figure 4, page ci-contre). Les lignes rouges sont là encore des ajustements issus du modèle théorique (équation (2)). Nous en déduisons deux estimations de la vitesse de rotation critique  $\Omega_c$ , respectivement  $3,50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $3,57 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

(4) Les accéléromètres des smartphones, de par leur principe de fonctionnement, mesurent aussi l'accélération de la pesanteur  $\mathbf{g}$ . Ainsi pour un pendule statique dans le référentiel tournant, la projection de l'accélération sur l'axe vertical se réduit à  $g$ .



**Figure 5** - (A) Diagramme de bifurcation expérimental (noir) et ajustement numérique (rouge) - (B) Réinterprétation des mêmes données pour obtenir une relation linéaire.

Pour cette expérience, nous avons utilisé un pendule différent de celui utilisé pour l'analyse vidéo. Sa pulsation propre  $\omega_0 = 3,55 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  est en accord à quelques pour cent près avec les déterminations de la vitesse de rotation critique. On retrouve les mêmes résultats que ceux obtenus avec l'analyse vidéo avec toutefois un traitement plus complexe des données issues des capteurs du smartphone (équation (13)). L'intérêt majeur de l'utilisation d'un smartphone dans cette expérience est de permettre une analyse de la dynamique des petites oscillations autour des positions d'équilibre du pendule.

### 4.3. Ralentissement critique : dynamique autour des positions d'équilibre

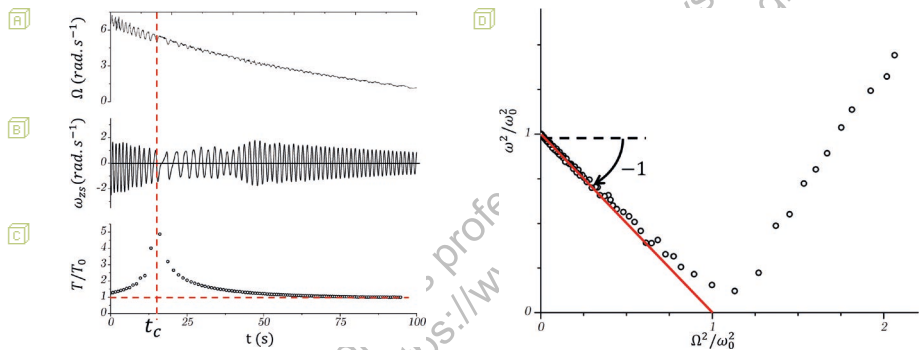
Nous procédons à un nouvel enregistrement après avoir retiré le fort frottement que nous avons imposé sur l'axe du pendule.

La figure 6A (cf. page ci-contre) représente  $\Omega$  la vitesse de rotation du plateau en fonction du temps qui décroît à cause des frottements au niveau de la liaison pivot du plateau avec le socle lié au sol. De l'enregistrement temporel de la vitesse angulaire d'oscillation du pendule en (B), nous déduisons en (C), l'évolution de la période  $T$  par la méthode des passages par zéro [9-10] : nous repérons sur la figure 6B (cf. page ci-contre) les instants  $t_i$  tels que  $\omega_{z_s}(t_i) = 0$ . La période, qui correspond à un aller-retour donc deux passages par zéro, s'en déduit directement :  $T_i = t_{i+2} - t_i$ . La figure 6C met clairement en évidence la divergence de la période correspondant au ralentissement critique au voisinage de  $t_c = 19 \text{ s}$ .

Puisque le plateau ralentit à cause des frottements, il convient d'interpréter les figures 6B et 6C (cf. page ci-contre) de droite à gauche : à la fin de l'enregistrement, la période  $T$  tend vers la période propre  $T_0$  du pendule. Partant de  $t$  grand et décroissant,

$\Omega$  croît ainsi que la période du pendule (ralentissement critique) jusqu'en  $t_c$  où le comportement change brutalement (bifurcation) : le bras s'élève et les petites oscillations ont lieu autour de  $\theta_{\text{éq}}$  non nul. C'est bien le comportement qualitatif attendu.

On peut toutefois être plus quantitatif. On peut calculer la pulsation « instantanée » du pendule  $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$  puis son carré que l'on compare à  $\Omega^2(t_i)$  le carré de la vitesse « instantanée » de rotation du plateau. Pour plus de clarté, nous avons normalisé ces grandeurs par le carré de la pulsation propre sur la figure 6D. La ligne rouge est une droite de pente  $-1$  comme prédit par l'équation (9). L'accord est manifeste aux petites vitesses de rotation puis se dégrade à l'approche de  $\Omega_c$  où les oscillations deviennent de plus en plus anharmoniques<sup>(5)</sup>, effet qui n'est pas pris en compte dans l'équation (9).



**Figure 6** - (A) Vitesse angulaire de rotation du plateau en fonction du temps - (B) Vitesse angulaire d'oscillation du pendule mesurée par le gyromètre selon l'axe  $z_x$  du smartphone - (C) Évolution temporelle de la période du pendule normalisée par sa période propre : ralentissement critique au voisinage de  $t_c = 19$  «s». (D) Réinterprétation du ralentissement critique au moyen de l'équation (9) (ligne rouge de pente  $-1$ ).

Le lecteur intéressé par davantage de détails sur cette expérience, et notamment une discussion approfondie sur l'interprétation des variations temporelles de  $\Omega$ , pourra consulter la référence [7].

## CONCLUSION

Nous avons présenté deux approches complémentaires d'un phénomène physique non linéaire. La première, basée sur l'enregistrement vidéo de l'évolution temporelle du système, donne très concrètement accès au diagramme de bifurcation. La seconde exploite l'ensemble des mesures fournies par les capteurs d'accélération et de vitesse de rotation d'un smartphone. Elle est plus technique à mettre en œuvre et abstraite,

(5) Sur l'équation (3), on voit que quand  $\Omega$  croît en restant inférieur à  $\Omega_c$ , le terme quadratique diminue tandis que le terme quartique augmente.

car il faut combiner de façon relativement complexe les six données expérimentales recueillies pour remonter aux paramètres dynamiques pertinents. Elle est cependant plus riche, car elle permet d'étudier, outre la statique du système, sa dynamique singulière au voisinage du point critique.

Dans les deux cas, l'approximation à l'ordre le plus bas du modèle le plus simple du système que nous avons proposé est en accord à quelques pour cent près avec les données recueillies. Ce modèle repose sur les lois de conservation en physique dont il illustre très directement l'importance.

L'utilisation du smartphone, en plus de l'attrait pédagogique évident, met en évidence l'intérêt de la richesse de l'enregistrement simultané de nombreuses données quantitatives puisque finalement les trois coordonnées d'accélération et les trois de vitesse de rotation sont mises à profit dans l'interprétation de l'expérience. L'analyse vidéo, elle-même tout aussi attractive, mais beaucoup plus concrète, permet d'accéder très directement à certains aspects de cette même expérience. On peut concevoir ainsi une progression pédagogique telle que nous l'avons mise en œuvre dans la structuration de l'article. Une première approche d'un phénomène difficile en soi par une méthode intuitive, mais limitée, puis une analyse plus rigoureuse et plus riche.

Cette analyse pourrait certainement être développée davantage. Par exemple, les frottements et l'anharmonicité jouent à plein au voisinage de la pulsation critique du plateau tournant. Ainsi, il n'est pas surprenant que l'écart observé entre les données mesurées et le modèle soit très clairement significatif au voisinage de la bifurcation ( $\Omega \approx \Omega_c$ , cf. figures 5A ou 6D). Il pourrait être intéressant de détailler l'étude au voisinage de ce point singulier, mais cela dépasse le cadre que nous nous sommes fixé dans cet article, à savoir une introduction à l'étude des phénomènes non linéaires donnant toute sa place à une approche expérimentale quantitative.

Ce type de phénomène est complexe par essence, mais tire son intérêt de son caractère relativement universel. Il intervient, par certains aspects du moins, dans des domaines aussi divers que les transitions de phase du second ordre [12] ou le mécanisme de Higgs qui, dans la théorie communément acceptée de nos jours, confère leur inertie aux particules fondamentales [13]. Les technologies modernes en permettent toutefois une approche concrète, quantitative et très attractive, propre à motiver les étudiants dans l'étude de ces questions difficiles.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Krob, « Exemples d'oscillateurs non linéaires », *Bull. Un. Phys.*, vol. 90, n° 785 (2), p. 131-150, juin 1996.
- [2] M. Krob, « Exemple d'identification de systèmes linéaires », *Bull. Un. Phys.*, vol. 91, n° 795 (2), p. 73-92, juin 1997.

- [3] C. Jai et K. Caiveau, « Étude d'oscillations non linéaires avec un smartphone: Période et portrait de phase », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 115, n° 1034, p. 573-586, mai 2021.
- [4] R. Duffait, « Étude expérimentale des oscillateurs mécaniques », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 98, n° 867 (1), p. 1307-1338, octobre 2004.
- [5] N. Combe, R. Mathevet, P. Marchou, C. Fabre et N. Lamrani, « Études quantitatives des accélérations d'inertie avec un smartphone – Partie 1 : accélération de Coriolis », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 117, n° 1050, p. 51-63, janvier 2023.
- [6] N. Combe, R. Mathevet, P. Marchou, C. Fabre et N. Lamrani, « Études quantitatives des accélérations d'inertie avec un smartphone – Partie 2 : accélération d'entraînement », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 117, n° 1051, p. 173-180, février 2023.
- [7] R. Mathevet and *al.*, “Coriolis acceleration and critical slowing-down : a quantitative laboratory experiment”, accepté à *AJP* (2023).
- [8] P. Manneville, *Instabilités, chaos et turbulence*, Paris : École Polytechnique, 2004.
- [9] C. Fabre, N. Lamrani, P. Marchou et R. Mathevet, « Pendule à la maison avec un smartphone », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 116, n° 1042, p. 309-323, mars 2022.
- [10] R. Mathevet and *al.*, « Quantitative analysis of a smartphone pendulum beyond linear approximation: A lockdown practical homework », *AJP*, 90, 344 (2022).
- [11] J. Vince, F. Bouquet, J. Bobroff, G. Creutzer et D. Dorsel, « Des mesures sans fil avec son smartphone », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 116, n° 1047, p. 935-944, octobre 2022.
- [12] L. Landau and E. Lifchitz, *Physique Statistique*, Moscou : Mir, 2<sup>e</sup> édition, 1984. En particulier chapitre 162. Pour une introduction rapide E. Brillaux, *Journal de physique et chimie des étudiants*, ENS de Lyon, vol. 1, n° 1, p. 23-30, février 2016.
- [13] V. Bourges, « Interactions de jauge des particules élémentaires », *Bull. Un. Phys.*, vol. 88, n° 765 (2), p. 5-40, juin 1994 (en particulier le paragraphe « Brisure spontanée de symétrie » et les carrés 8 et 9).  
B. Diu, « Vers l'unification des interactions fondamentales », *Bull. Un. Phys.*, vol. 79, n° 667, p. 1-28, octobre 1984 (en particulier le paragraphe III.4.).

### Complément de l'article

Cet article comporte un complément nommé :

◆ *Bifurcation.mov*

Il est disponible sur le site de l'UdPPC sous la forme d'un fichier zippé 10560573.

## Annexe

### Analyse vidéo : protocole détaillé et exemple de traitement des données

#### 1. PROTOCOLES

##### 1.1. Préparation

- ◆ Placer une caméra rapide (Nova120 de chez Nova Physics, 120 images/s) à 3 m environ du montage afin d'en avoir une vision complète.
- ◆ Faire tourner le plateau de sorte que le plan d'oscillation du pendule soit bien perpendiculaire à la ligne de visée (cf. figure 1, pages précédentes,  $\varphi = 0$ ). Sur l'avant du socle du pendule nous avons fixé une tige verticale ( $t$  sur la figure 1, pages précédentes). Par effet de parallaxe, vue depuis la caméra, la tige est alignée avec la graduation  $18^\circ$  ( $r$  sur la figure 1, pages précédentes). Chaque passage du plateau par  $\varphi = 0$  sera ensuite identifié par l'alignement de  $r$  et  $t$  sur les images. On peut se convaincre de la méthode en constatant sur la figure 1c (cf. pages précédentes) tracée pour  $\varphi \neq 0$  que  $r$  et  $t$  ne sont pas alignés.

##### 1.2. Acquisition au moyen du logiciel VirtualDub

- ◆ Lancer l'enregistrement du film (File/SetCaptureFile nom du fichier, puis File/CaptureAvi et enfin Capture/Capture Video).
- ◆ Mettre manuellement le plateau en rotation à  $\Omega > \Omega_c$  : le bras du pendule s'élève et se stabilise rapidement à  $\theta_{eq}$  (cf. vidéo disponible sur le site de l'UdPPC).
- ◆ La rotation du plateau ralentit progressivement, le bras s'abaisse lentement puis brutalement rejoint  $\theta_{eq} = 0$ . La rotation s'arrête au bout de deux minutes environ.
- ◆ Arrêter l'enregistrement du film (Capture/Stop Capture). Attention, le fichier fait couramment plusieurs gigaoctets (Go). Vérifier que toutes les images sont correctement enregistrées (0 frames dropped).

##### 1.3. Traitement des images avec le logiciel Regressi

- ◆ Importer le film (Fichier/Nouveau/Vidéo puis cliquer sur le bouton « Ouvrir » et sélectionner la vidéo enregistrée). Placer l'origine du repère sur l'extrémité du bras du pendule ( $e$  sur la figure 1, pages précédentes). En principe, si l'alignement de la caméra et l'horizontalité du plateau tournant sont corrects, l'axe  $y$  du repère passe par l'axe de rotation du pendule ( $a$  sur la figure 1, pages précédentes).
- ◆ Placer la règle entre  $o$  et  $a$  et renseigner la case « Échelle » par la longueur du bras du pendule, dans notre cas  $oa = 0,54$  m. Dans le programme ci-dessous, elle est identi-

fiée par le symbole lmes.

- ◆ Faire défiler le film jusqu'à la première image où le bras du pendule est élevé, les petites oscillations amorties et le plateau en  $\varphi = 0$ .
- ◆ Cliquer sur le bouton « Mesurer » (qui bascule en rouge « Stop »). Un réticule apparaît. Le positionner sur l'extrémité du bras du pendule (le point  $e$ ). Cliquer : les coordonnées de temps et de position du réticule sont automatiquement ajoutées dans le tableau et haut à droite de la fenêtre.
- ◆ Faire défiler le film jusqu'au tour suivant et recommencer le pointage. Nous avons obtenu ainsi soixante-et-un triplets  $(t, x, y)$ .
- ◆ Cliquer sur le bouton « Traiter » pour faire le traitement avec *Regressi*.

#### 1.4. Traitement des données avec le logiciel *Regressi*

- ◆ Calculer les différentes grandeurs dynamiques dans l'onglet « Grandeur/Expression » (cf. programme page suivante).
- ◆ Passer sous l'onglet « Grandeur/Tableau » et cliquer le bouton « Incertitudes ». Pour l'incertitude sur le temps, nous avons pris la durée entre deux images du film  $u(t) = 9,6 \text{ ms}$  et estimé l'ordre de grandeur de l'erreur de l'incertitude de position  $u(x) = u(y) = 3 \text{ mm}$  par la dispersion de plusieurs pointages sur la même image et sur les images immédiatement précédente ou suivante, car le plateau sur l'image sélectionnée n'est jamais parfaitement en  $\varphi = 0$ .
- ◆ Passer alors aux représentations graphiques et aux modélisations sous l'onglet « Graphe ».

La figure 7 représente un exemple typique de données issues du pointage vidéo.

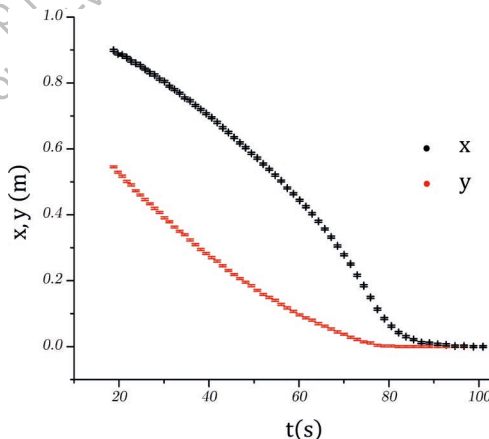


Figure 7 - Coordonnées de l'extrémité du pendule mesurée sur l'enregistrement vidéo.



## 2. PROGRAMME REGRESSI

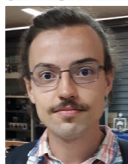
Voici un exemple de script Regressi pour le traitement des données (l'usage du ' permet de commenter le programme) :

```
't=Temps
'x=Abscisse
'y=Ordonnée
'les 3 lignes précédentes sont générées automatiquement par Regressi. Le programme à
proprement parler commence ci-dessous :

'longueur mesurée du bras du pendule
lmes = 0.54
'longueur calculée du bras du pendule : à comparer à lmes à chaque pointé
lcalc = sqrt(x^2 + (lmes-y)^2)
'période rotation du plateau
Tpl = t[i+1]-t[i]
'vitesse angulaire du plateau
Omega = 2*Pi/Tpl
'angle d'équilibre du pendule
ThetaEq = ASIN(x/lmes)
'cosinus de l'angle d'équilibre du pendule
CosThetaEq = Cos(ThetaEq)
'inverse carré de la vitesse angulaire du plateau
InvOmega2 = 1/Omega^2
```



**Renaud MATHEVET**  
Enseignant chercheur  
Université Paul Sabatier  
Toulouse (Haute-Garonne)



**Simon GARRIGOU**  
Doctorant  
CEMES  
Toulouse (Haute-Garonne)



**Arnaud LE HOUELLEUR**  
Professeur stagiaire  
INSPE  
Toulouse (Haute-Garonne)



**Emerk ABLONET**  
Professeur stagiaire  
INSPE  
Toulouse (Haute-Garonne)



**Charlotte FABRE**  
Professeur PCSI  
Lycée Déodat de Séverac  
Toulouse (Haute-Garonne)



**Nabil LAMRANI**  
Professeur  
Collège Claude Nougaro  
Toulouse (Haute-Garonne)



**Patrice MARCHOU**  
IA-IPR honoraire  
Toulouse (Haute-Garonne)



**Nicolas COMBE**  
Enseignant chercheur  
Université Paul Sabatier  
Toulouse (Haute-Garonne)