HAL open science

Remodelage orthotrope de l'os - Cas tridimensionnel

Alexandre Watzky, Salah Naili

To cite this version:

Alexandre Watzky, Salah Naili. Remodelage orthotrope de l'os - Cas tridimensionnel. 17e Congrès Français de Mécanique, 2005, Troyes, France. pp.1-6. hal-04225622

HAL Id: hal-04225622

https://hal.science/hal-04225622v1

Submitted on 3 Oct 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Remodelage orthotrope de l'os - Cas tridimensionnel

Alexandre Watzky, Salah Naïli

B²OA– UMR 7052 CNRS
Faculté des Sciences & Technologie
Université PARIS XII – Val-de-Marne
61, avenue du Général de Gaulle
94010 CRETEIL Cedex

Résumé :

L'essentiel des propriétés de résistance mécanique de l'os spongieux sont liées à sa matrice solide, dont les caractéristiques varient (remodelage) en fonction des sollicitations subies afin de tendre vers des caractéristiques fonctionnelles optimales. Dans le cadre d'une approche macroscopique, on a localement un comportement linéairement élastique, orthotrope et évolutif.
Le modèle proposé repose sur un schéma itératif en temps où l'on fait évoluer le tenseur de rigidité pour, en fonction des contraintes imposées, rapprocher les déformations principales d'une zone admissible. Nos lois de remodelage font aussi bien varier les "constantes" d'élasticité que les directions d'orthotropie. Dans cette communication, on s'attache à décrire le principe de notre modèle de remodelage dans le cas général tridimensionnel.

Abstract :

The mechanical strength properties of trabecular bone are mostly given by its solid matrix. Depending on external sollicitations, these properties evolve with time (remodeling) in order to tend towards optimal functional characteristics. In our macroscopic approach, bone has an evolutive linearly elastic orthotropic behavior.
The proposed model rests on a time iterative procedure where the compliance tensor evolves such that, for imposed stresses, the principal strains tend to fall within an admissible domain. Our remodeling laws modify the elasticity "constants" as well as the orthotropy directions. The aim of this presentation is to the describe our model in the general tridimensional case.

Mots clefs :

Os ; Remodelage ; Anisotropie ; Biomécanique.

1 Introduction

L'os, milieu vivant, tend vers des caractéristiques fonctionnelles optimales. L'os spongieux est constitué d'une matrice solide présentant une microstructure qui lui confère l'essentiel de ses propriétés mécaniques, remplie d'un fluide interstitiel. Le remodelage est l'évolution de cette microstructure, et donc des propriétés mécaniques de l'os, par apposition ou résorption de matière.

L'idée directrice peut s'énoncer dans ce qu'il est convenu d'appeler loi de Wolff [1] : *"les contraintes mécaniques sont responsables de l'architecture de l'os"* et *"l'os a une résistance mécanique maximale pour une masse minimale"*. Les premières approches mécaniciennes sont dues à Cowin *et al.* [2, 3] qui proposèrent un modèle utilisant le "fabric tensor". On pourra trouver une discussion des différentes approches et une justification des hypothèses dans [4, 5].

L'objet de ce travail est la construction d'un modèle de remodelage dans le cadre de la mécanique des milieux continus pouvant rendre compte à l'échelle mésoscopique (particules de quelques mm) de l'évolution temporelle des caractéristiques mécaniques de l'os. Pour ce faire, l'os est considéré comme homogène à notre échelle et les caractéristiques de la microstructure apparaissent *via* la relation de comportement qui évolue en fonction des contraintes imposées (stimulus). Nous avons présenté en [4] les premiers résultats dans le cas des contraintes planes. Il s'agit ici de décrire la méthode permettant de généraliser ce modèle au cas général tridimensionnel.

2 Comportement et notations

L'os spongieux a, à notre échelle, un comportement linéairement élastique orthotrope caractérisé par son tenseur de compliance $\overline{\overline{\overline{\overline{C}}}}$ (inverse du tenseur de rigidité). Adoptant la notation tensorielle de Kelvin, indiquée par un "tilde", où les tenseurs des contraintes ou des déformations s'écrivent sous la forme vectorielle $\tilde{S} = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)^T = (S_{11}, S_{22}, S_{33}, \sqrt{2}\, S_{23}, \sqrt{2}\, S_{31}, \sqrt{2}\, S_{12})^T$ ($\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{\sigma}}, \overline{\overline{\varepsilon}}$), le tenseur de compliance, symétrique et défini positif, prend, exprimé dans la base d'orthotropie, la forme matricielle $\tilde{C}'$:

$$\tilde{C}' = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{12} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \tilde{\varepsilon}' = \tilde{C}'\,\tilde{\sigma}' \qquad (1, 2)$$

Les paramètres majeurs sont les modules d'Young qui permettent de représenter le comportement local de l'os par un ellipsoïde dont les demi-axes, portés par les directions d'orthotropie, ont pour longueur les modules d'Young E_i correspondants (FIG. 1).

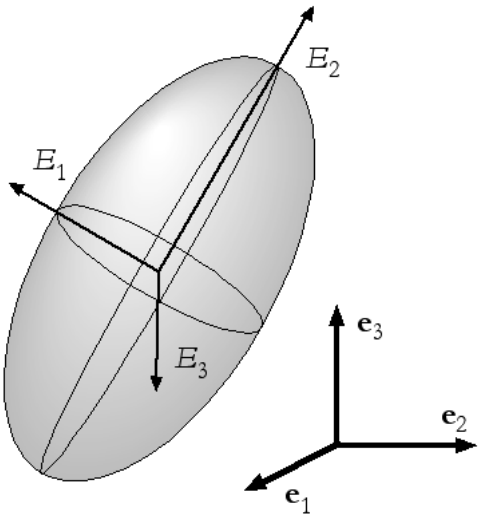

FIG. 1 – Représentation des modules d'Young.

Afin de décrire les différentes directions caractéristiques des grandeurs utilisées, on définit trois bases (locales) orthonormées directes : la base matérielle (fixe) des $\mathbf{e}_i$ (i = 1, 2, 3) et, à chaque instant, les vecteurs

$\mathbf{e}'_i(t)$ associés aux directions d'orthotropie et les $\mathbf{e}^{\varepsilon}_i(t)$ associés aux déformations principales. Les mêmes exposants sont utilisés pour indiquer la base dans laquelle les différents tenseurs sont exprimés.

Sauf indication contraire, on utilisera la convention de l'indice répété

3 Modèle de remodelage

L'optimisation de la microstructure doit satisfaire aux trois conditions suivantes :

(I) le matériau reste orthotrope ;

(II) les directions d'orthotropie doivent se rapprocher des directions principales de déformation ;

(III) les déformations principales doivent tendre vers des valeurs "admissibles".

On definit (FIG. 2) les domaines de déformations principales "admissibles" $D^{\pm} = [\varepsilon^{\pm}_{si} ; \varepsilon^{\pm}_{ss}]$ et les valeurs moyennes correspondantes $\varepsilon^{\pm}_m = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{\pm}_{si} + \varepsilon^{\pm}_{ss}\right)$, où les exposants + et – correspondent au signe de la déformation principale considérée. Lorsqu'une déformation principale $\tilde{\varepsilon}^{\varepsilon}_i$ (i = 1, 2, 3) se trouve à l'intérieur d'un domaine *D*, la composante correspondante $\tilde{C}^{\varepsilon}_{ii}$ du tenseur de compliance n'est pas modifié.

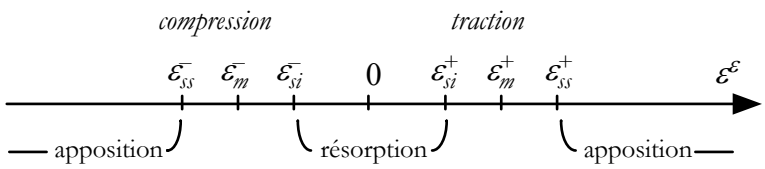

FIG. 2 – Les seuils de remodelage.

Le problème est discrétisé en temps et se traduit en une procédure itérative où, partant du tenseur des contraintes de Cauchy $\bar{\bar{\sigma}}(N)$ et du tenseur de compliance $\tilde{C}'(N)$, on déduit sa nouvelle expression $\tilde{C}'(N+1)$. Ceci est fait en deux étapes :

(i) une rotation des directions d'orthotropie telle que les $\mathbf{e}'_i(N+1)$ se retrouvent compris entre les $\mathbf{e}'_i(N)$ et les $\mathbf{e}^{\varepsilon}_i(N)$ (le tenseur de compliance, alors noté $\tilde{C}'(N+)$, a la même expression que $\tilde{C}'(N)$ mais exprimé dans la base des $\mathbf{e}'_i(N+1)$) ;

(ii) $\tilde{C}'(N+1)$ est calculée en modifiant les composantes de $\tilde{C}'(N+)$ de sorte que le tenseur reste orthotrope (forme (1) dans la base des $\mathbf{e}'_i(N+1)$) et que les déformations principales se rapprochent des domaines *D* donnés.

3.1 Rotation des axes d'orthotropie

L'étape *(i)* est choisie comme suit. Le tenseur de compliance $\widetilde{\mathbf{C}}'(N)$ (et donc les $\mathbf{e}'_i(N)$) et le chargement étant donnés, les déformations qui en résultent nous donnent les $\mathbf{e}_i^{\varepsilon}(N)$. On détermine le vecteur rotation $\alpha\mathbf{k}$ permettant de passer d'une base à l'autre afin d'appliquer à la base d'orthotropie une rotation $\lambda\alpha\mathbf{k}$ où λ est un petit paramètre. Pour ce faire, on cherche une transformation à trois paramètres (voir par exemple [7]) définie par le vecteur unitaire $\mathbf{k}$ et l'angle α (FIG. 3) :

$$\mathbf{k} = k'_i\,\mathbf{e}'_i \quad \text{avec} \quad k'_i\,k'_i = 1 \tag{3, 4}$$

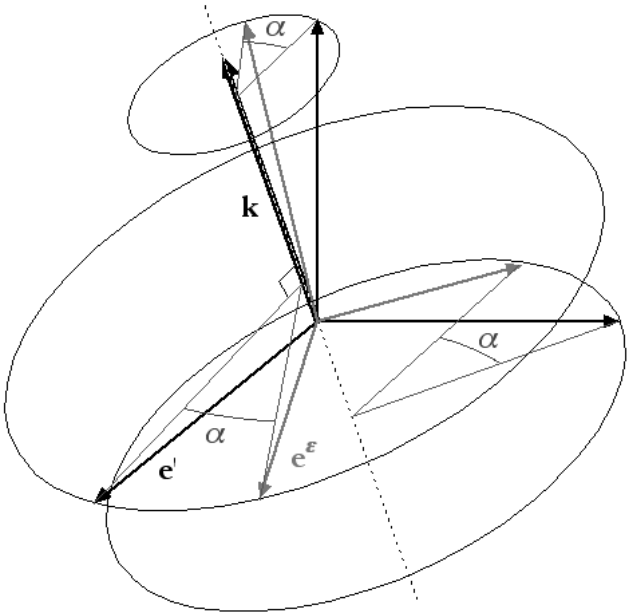

FIG. 3 – Rotation d'angle α autour de $\mathbf{k}$ permettant de passer des $\mathbf{e}'_i$ (en noir) aux $\mathbf{e}_i^{\varepsilon}$ (en gris).

Le tenseur de rotation permet d'écrire dans la base d'orthotropie :

$$\mathbf{e}_i^{\varepsilon} = Q'_{ki}\,\mathbf{e}'_k \tag{5}$$

et y prend la forme :

$$\overline{\overline{Q'}} = \begin{pmatrix} k'^2_1 + \left(1 - k'^2_1\right)\cos\alpha & (1-\cos\alpha)\,k'_1k'_2 + \sin\alpha\,k'_3 & (1-\cos\alpha)\,k'_3k'_1 - \sin\alpha\,k'_2 \\ (1-\cos\alpha)\,k'_1k'_2 - \sin\alpha\,k'_3 & k'^2_2 + \left(1 - k'^2_2\right)\cos\alpha & (1-\cos\alpha)\,k'_2k'_3 + \sin\alpha\,k'_1 \\ (1-\cos\alpha)\,k'_3k'_1 + \sin\alpha\,k'_2 & (1-\cos\alpha)\,k'_2k'_3 - \sin\alpha\,k'_1 & k'^2_3 + \left(1 - k'^2_3\right)\cos\alpha \end{pmatrix} \tag{6}$$

On obtient alors :

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(Q'_{11} + Q'_{22} + Q'_{33} - 1\right) \quad \text{et} \quad k'^2_i = \frac{Q'_{ii} - \cos\alpha}{1 - \cos\alpha} \quad \text{(sans sommatio} \tag{7, 8}$$

où les indéterminations sont levées en ayant choisi l'ordre des $\mathbf{e}_i^{\varepsilon}(N)$ afin que la base qu'ils constituent soit le plus proche de celui des $\mathbf{e}'_i(N)$.

3.2 Modifications des coefficients d'élasticité

L'étape *(ii)* est choisie comme en [4] où l'évolution des modules d'Young est pilotée par les déformations principales suivant les lois :

$$\frac{1}{\widetilde{C}^{\varepsilon}_{ii}(N+1)} - \frac{1}{\widetilde{C}^{\varepsilon}_{ii}(N+)} = \pm\ \tau_a\left[\widetilde{\varepsilon}^{\varepsilon}_i(N+) - \varepsilon_m^{\pm}\right] \quad \text{si} \begin{cases} \widetilde{\varepsilon}^{\varepsilon}_i(N+) > \varepsilon_{ss}^{+} \\ \text{ou} \\ \widetilde{\varepsilon}^{\varepsilon}_i(N+) < \varepsilon_{ss}^{-} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\widetilde{C}^{\varepsilon}_{ii}(N+1)} - \frac{1}{\widetilde{C}^{\varepsilon}_{ii}(N+)} = \pm\ \tau_r\left[\widetilde{\varepsilon}^{\varepsilon}_i(N+) - \varepsilon_m^{\pm}\right] \quad \text{si} \begin{cases} \widetilde{\varepsilon}^{\varepsilon}_i(N+) < \varepsilon_{si}^{+} \\ \text{et} \\ \widetilde{\varepsilon}^{\varepsilon}_i(N+) > \varepsilon_{si}^{-} \end{cases} \tag{9}$$

où les τ sont des petits paramètres correspondant respectivement à l'apposition et à la résorption.

Evidemment, les modules d'Young sont bornés supérieurement afin de ne pas excéder les valeurs permises par le matériau constitutif de la matrice solide.

Le fait que le tenseur de compliance soit symétrique défini positif impose les conditions :

$$|\nu_{ij}| < \frac{E_i}{E_j} \qquad \text{pour } i \neq j$$

$$2\,\nu_{21}\,\nu_{32}\,\nu_{13} < 1 - \nu_{21}^2\frac{E_1}{E_2} - \nu_{32}^2\frac{E_2}{E_3} - \nu_{13}^2\frac{E_3}{E_1} < 1 \tag{10}$$

Les coefficients de Poisson sont modifiés de sorte que l'orthotropie soit maintenue, c'est-à-dire tels que :

$$\frac{\nu_{ij}(N+1)}{E_i(N+1)} = \sqrt{\frac{\nu_{ij}(N)\,\nu_{ji}(N)}{E_i(N+1)\,E_j(N+1)}} \tag{11}$$

qui vérifient bien les relations (10) précédentes.

4 Remarques

Dans l'état actuel des connaissances, il est très difficile d'attribuer une valeur au pas de temps ainsi qu'aux seuils de remodelage. Dans le cas de contraintes imposées constantes, le modèle converge bien vers un état stationnaire (*remodeling equilibrium*). Il est cependant très sensible au choix des paramètres λ et τ, liés à la vitesse d'évolution et qui se partagent les deux étapes de notre modèle.

Références

[1] Julius Wolff. Das Gesetz der Transformation der Knochen. *A. Hirschwald,* Berlin (1892).

[2] Stephen C. Cowin. Structural adaptation of bones. *Appl. Mech. Rev.* **43**, S126-S133 (1990).

[3] Stephen C. Cowin, Ali M. Sadegh, Gangming Luo. An Evolutionary Wolff's Law for Trabecular Architecture. *J. Biomechanical Eng.* **114**, 129-136 (1992).

[4] Alexandre Watzky, Salah Naïli. Un modèle de remodelage orthotrope de l'os. *16ème Congrès Français de Mécanique*, communication n°2-264, Nice, septembre 2003.

[5] Alexandre Watzky, Salah Naïli. Orthotropic bone remodeling: case of plane stresses. *Mech. Research Com.* **31**, 617-625 (2004).

[6] Morteza M. Mehrabadi, Stephen C. Cowin. Eigentensors of linear anisotropic elastic materials. *Q. J. Mech. Appl. Math.* **43**, 15-41 (1990).

[7] Alexandre Watzky. Displacement of slender axisymmetric bodies: A convenient change of basis. *J. Applied Math. Phys. (ZAMP)* **42**, 623-627 (1991).