



Sur l'applicabilité du transport optimal au recalage rigide

Thibault de Villèle, Christophe Fiorio, Gérard Subsol

► To cite this version:

Thibault de Villèle, Christophe Fiorio, Gérard Subsol. Sur l'applicabilité du transport optimal au recalage rigide. ORASIS 2023 - 19e journées francophones des jeunes chercheurs en vision par ordinateur, Laboratoire LIS, UMR 7020, May 2023, Carqueiranne, France. <hal-04219568>

HAL Id: hal-04219568

<https://hal.science/hal-04219568v1>

Submitted on 27 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Sur l'applicabilité du Transport Optimal aux algorithmes de Recalage Rigide

Thibault de VILLÈLE

Christophe FIORIO

Gérard SUBSOL

{thibault.de-villele,christophe.fiorio,gerard.subsol}@lirmm.fr

LIRMM, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France

Résumé

La méthode ICP est devenue une méthode couramment utilisée pour du recalage rigide de représentations surfaciques. Plusieurs améliorations furent publiées pour tenter de combler les lacunes de la méthode. Depuis 2013, le domaine du transport optimal a connu un regain de popularité grâce à la parallélisabilité du calcul de plans de transports. Nous proposons dans ce papier une méthode de recalage rigide dérivé de l'ICP, où l'appariement des nuages de points est effectuée par le calcul d'un plan de transport optimal régularisé. Ce changement permet une meilleure mise en correspondance des points et réduit le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de l'algorithme, tout en restant interactif et calculable en temps réel. Nous nous comparons à une autre méthode de recalage rigide par transport optimal et montrons les avantages et inconvénients de notre méthode sur des données synthétiques ainsi que dans le cadre d'une application clinique.

Mots clefs

recalage rigide, transport optimal, nuages de points

Abstract

Over time, ICP has become a widely-used method for rigid registration of surface representations. Many improvements were published to alleviate the shortcomings of the method. Since 2013, optimal transport rose in popularity thanks to highly-parallel computations of transport plans. We propose in this paper an affine registration method derived from ICP, wherein the point cloud pairing is computed thanks to the computation of a regularized optimal transport plan. This change allows for a better point pairing and reduces the number of iterations necessary to attain convergence, all while staying interactive and computable in real-time. We compare our work to another rigid registration method by optimal transport and show the pros and cons of our method on synthetic datasets as well as a clinical application.

Keywords

rigid registration, optimal transport, point cloud

1 Introduction

Soient deux nuages de points 3D de m et n points chacun $P = \{p_i \in \mathbb{R}^3\}_{i=0,\dots,m}$ et $Q = \{q_j \in \mathbb{R}^3\}_{j=0,\dots,n}$ représentant des maillages issus de l'acquisition de deux surfaces. Recaler ces deux nuages de points revient à effectuer un appariement entre les points p_i de P et q_j de Q . Nous supposons ici que P et Q représentent une même surface, les nuages ne différeront que par leur orientation ainsi que leur position. On dit alors que le recalage est *rigide* puisqu'il est équivalent à l'extraction d'une transformation composée d'une matrice de rotation $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$ (le groupe des matrices orthonormées de dimension 3) et un vecteur de translation $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ permettant de superposer P et Q .

C'est sur ce principe qu'est fondée la méthode la plus connue de recalage rigide, la méthode ICP (pour *Iterative Closest Point*). Cette méthode fut présentée indépendamment par BESL et MCKAY (1992) et CHEN et MEDIONI (1992) et ZHANG (1994). Elle va itérativement appliquer une série de transformations rigides à P pour le recaler sur Q jusqu'à convergence des transformations vers l'identité. Ces transformations sont calculées à partir d'une estimation des appariements entre les points p_i et q_j . Si l'on définit une borne de précision τ comme condition d'arrêt, alors l'algorithme peut être décrit comme suit :

Algorithme 1 : La méthode ICP

Data : P et Q , deux nuages tridimensionnels

Result : \mathbf{R} matrice $\in \text{SO}(3)$ et $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$

$P_0 \leftarrow P$, $\mathbf{R} \leftarrow \text{Id}(3)$, $\mathbf{t} \leftarrow \mathbf{0}$, $\delta_0 \leftarrow \infty$

while $|\delta_i - \delta_{i-1}| > \tau$ **do**

```
1  /*Projection plus proche          */
    $C = \text{Project}(P_i, Q)$ 
   /*  $\delta_i$ :distance entre  $P$  et  $C$  */
2   $\mathbf{R}_i, \mathbf{t}_i, \delta_i = \text{ICPSolve}(P, C)$ 
    $P_{i+1} = \mathbf{R}_i P_i + \mathbf{t}_i$ 
```

return \mathbf{R} , \mathbf{t}

L'algorithme présente deux composantes principales : le critère d'appariement des points de P sur Q (ligne 1), et la fonction de calcul d'une rotation/translation minimisant l'erreur quadratique entre les points appariés de P et C (ligne 2).

Dans l'algorithme originel de l'ICP, l'appariement entre les points de P et Q est effectué de façon simple : chacun des points est mis en correspondance avec le point le plus proche de l'autre nuage de points comme décrit dans l'équation (1). Cette mise en correspondance peut être accélérée par l'utilisation de structures de partition de l'espace, telle que le *kd-tree* comme proposé par NUCHTER et al. (2007).

$$\text{Project}(P_i, Q) := \{c_i \mid c_i = \arg \min_{q \in Q} \|q - p_i\|^2\} \quad (1)$$

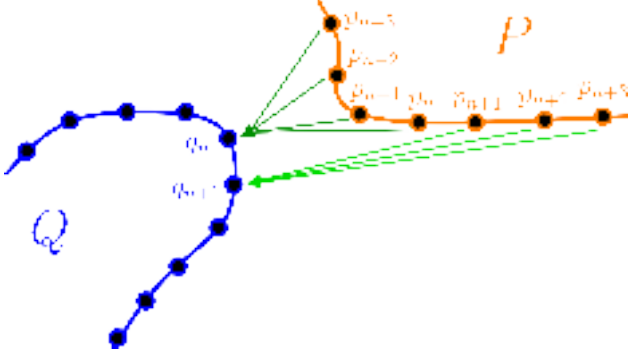


FIGURE 1 – Ici, les points de P (orange) sont mis en correspondance (vert) avec les points de Q (bleu) avec le critère d'appariement au plus proche. Les points q_n et q_{n+1} sont donc appariés aux points $\{p_{n-3}, \dots, p_n\}$ et $\{p_{n+1}, \dots, p_{n+3}\}$.

La fonction *ICPSolve*, permettant de calculer la rotation/translation optimale pour l'ICP peut se résoudre assez simplement par la méthode des moindres carrés : sa solution est identique à celle d'un problème de Procrustes. Pour plus d'informations sur le calcul de cette matrice, voir EGGERT et al. (1997).

Cependant, l'algorithme ICP souffre d'un problème majeur : le critère d'appariement peut créer des relations injectives (voir Figure 1). Plusieurs points de P peuvent être appariés à un seul et même point de Q , ce qui va fausser le calcul de la transformation rigide (\mathbf{R}, \mathbf{t}) . Plusieurs méthodes ont été proposées pour améliorer ce critère d'appariement, en le remplaçant par des projections sur les facettes de la surface ou en prenant en compte les normales et courbures des maillages surfaciques dans la notion du point le plus proche, ou bien encore en supprimant des appariements (RUSINKIEWICZ & LEVOY, 2001).

Ces méthodes ne garantissent toutefois en rien la maximisation de la proportion des points de P appariés aux points de Q . En effet, plusieurs problèmes peuvent subvenir lors de l'acquisition : des occultations peuvent permettre de ne capturer qu'une sous-partie de l'objet, et des imprécisions de la méthode d'acquisition peuvent produire plusieurs discrétisations différentes d'une seule et même surface.

RANGARAJAN et al. (1997) proposent *SoftAssign*, un nouvel algorithme proposant d'estimer conjointement les

correspondances entre P et Q ainsi que la transformation (\mathbf{R}, \mathbf{t}) par relaxation de la contrainte d'appariement : ceux-ci ne sont pas limités à un seul point mais à une combinaison linéaire de plusieurs points. En fait, la méthode utilise des notions de transport optimal, dont les applications ont été mieux formalisées ces dernières années y compris dans le cadre du recalage rigide.

Nous utilisons le recalage rigide dans un cadre clinique, dont le but est de pouvoir effectuer une planification virtuelle pré-opératoire en amont d'une reconstruction de mandibule par lambeaux de fibula.

Après une revue de l'historique et de la théorie du transport optimal (Section 2) afin de comprendre son fonctionnement, nous proposerons (Section 3) une nouvelle méthode de recalage affine de nuages de points utilisant la transport optimal comme méthode d'appariement. Section 4 permettra d'évaluer les performances et résultats de notre algorithme sur un ensemble de jeux de données avant de conclure (Section 5) et d'ouvrir une discussion sur l'applicabilité de transport optimal à la tâche du recalage rigide.

2 Mesures et transports

La théorie du transport optimal est souvent représentée via le prisme de la théorie des mesures. Après une rapide introduction au domaine, nous verrons comment exprimer le problème du transport optimal ainsi que quelques méthodes de résolution numériques.

2.1 Théorie de la mesure

Une mesure est une distribution de masse dans un sous-ensemble S d'un espace quelconque \mathcal{X} . C'est une forme linéaire de S (dans notre cas, $S = \mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$) sur les réels. On notera Σ le domaine de ces mesures¹. On dit d'une mesure qu'elle est *probabiliste* si son intégrale sur tout son domaine est égale à 1 : $\mu(\Sigma) = 1$. Pour citer un exemple, voici la formulation d'une mesure de Dirac :

$$\delta_X : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, \quad \delta_X(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2)$$

Cette mesure unitaire concentre l'intégrité de sa densité en un seul point de l'espace X . La mesure de Dirac est utile dans notre cas : elle permettra de représenter un des points de notre nuage dans $\mathcal{X} = \mathbb{R}^3$.

Il est également possible de composer de nouvelles mesures par combinaison linéaire. Si α et β sont deux mesures définies sur \mathcal{X} avec domaines Σ et Σ' avec a et b deux réels, la combinaison linéaire de α et β est définie comme suit :

$$a\alpha + b\beta : S \subset \Sigma \cap \Sigma' \mapsto a\alpha(S) + b\beta(S) \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Grâce à cette propriété, nous pouvons représenter un nuage de points sous la forme d'un ensemble de mesures de Dirac aux positions des points du nuage :

$$\mathcal{P} := \sum_{i=0}^m \mu_i \delta_{p_i}, \quad p_i \in P \quad (4)$$

1. Voir annexes pour plus de détails sur les ensembles S, \mathcal{X}, Σ

Avec $(\mu_i)_{i=0\dots m}$ un ensemble de poids réels assignés à chacun des points du nuage P , δ_{p_i} la mesure de Dirac à l'emplacement de chacun des p_i de P et \mathcal{P} la mesure correspondant au nuage de points P . Les propriétés énoncées ci-dessus vont nous être utiles pour étudier les différentes formulations du transport optimal.

2.2 Transport optimal

La première formulation du transport optimal peut être attribuée à (MONGE, 1781) pour son mémoire sur les déblais et remblais. Dans cette formulation continue du problème, deux mesures probabilistes μ et ν définies sur des sous-ensembles S et S' d'un espace \mathcal{X} représentent des tas de matériaux (voir Figure 2). Le coût de déplacement C d'un élément $x \in \mu$ vers ν est défini comme le produit de la densité en ce point $\mu(x)$ et d'une distance $D : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$:

$$C(x) = D(x, T(x))\mu(x) \quad (5)$$

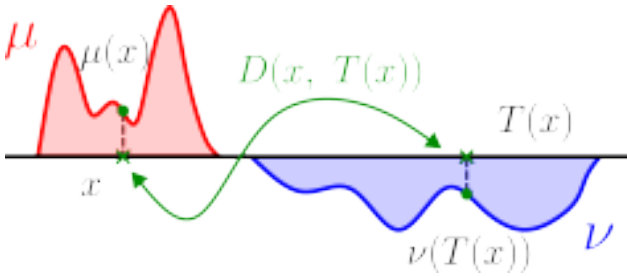


FIGURE 2 – Déblais et remblais, selon Monge. Ici, μ (rouge) et ν (bleu) sont deux mesures. T est un plan de transport tel que $\forall x \in \mu$, $T(x) \in \nu$. Le coût de transport (vert) de chaque élément de μ est la distance $D(x, T(x))$ pondéré par la densité au point $\mu(x)$.

Le transport optimal de μ vers ν est donc selon Monge une application $T : \mu \mapsto \nu$ inversible et bijective qui minimise la fonction de coût de transport OT_{Monge} suivante :

$$\text{OT}_{\text{Monge}}(\mu, \nu) = \int_S D(x, T(x)) d\mu(x) \quad (6)$$

T peut être vu comme une permutation de tous les éléments de μ vers ν .² Dans ses travaux, Monge utilise comme fonction de coût la distance euclidienne $D = L_2 = \|\cdot - \cdot\|_2$ avec des mesures définies sur \mathbb{R}^2 et démontre qu'une permutation T optimale ne présente aucun croisement entre les éléments de μ et leurs appariements dans ν .

Par la suite, KANTOROVICH (1942) proposera une formulation discrète du transport optimal, adaptée à un cadre économique : soient m usines produisant une quantité $(\alpha_i) \in \mathbb{R}^m$ de biens dans des lieux x_i et n entrepôts où l'on peut entreposer une quantité $(\beta_j) \in \mathbb{R}^n$ de biens dans des lieux y_j .

$$A = \sum_{i=0}^m \alpha_i \delta_{x_i} \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=0}^n \beta_j \delta_{y_j} \quad (7)$$

On souhaite transporter la totalité des biens de A vers B , en connaissant le coût de transport entre toutes les usines et entrepôts donné par une matrice $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Le transport optimal de A vers B est défini comme la répartition de chaque élément de A vers tous les éléments de B selon un coût de transport c (voir Figure 3) comme suit :

$$\text{OT}_{\text{Kantorovich}}(A, B) = \min_{R \text{ valide}} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n R_{i,j} C_{i,j} \quad (8)$$

où C est la matrice $\mathbb{R}^{m \times n}$ associée aux coûts de déplacements $C_{i,j} = c(x_i, y_j)$ de A vers B et R une matrice de répartition des usines de A vers les enseignes de B . La matrice de répartition R doit posséder des marginales égales à (α_i) et (β_j) , et donc respecter :

$$R \mathbb{1}_m = (\alpha_i) \quad R^T \mathbb{1}_n = (\beta_j) \quad (9)$$

avec $\mathbb{1}_d$ défini comme un vecteur de uns de taille d .

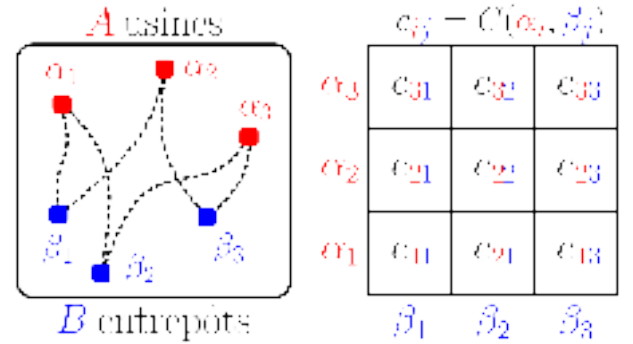


FIGURE 3 – Le transport optimal selon Kantorovich : un ensemble d'usines A doit transporter sa production vers les usines B avec un coût de déplacement C . La matrice à droite indique les coûts de transport entre tous les éléments de α et β .

La formulation de Kantorovich n'est en fait qu'une relaxation du problème de Monge, comme prouvé par BRENIER (1991) : pour $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ (l'espace dans lequel existent les mesures) et $C = L_2$ (distance euclidienne) comme coût de déplacement alors les deux formulations sont équivalentes. En effet, si les deux mesures A et B possèdent le même nombre d'éléments m et que les poids leur étant attribués $(\alpha_i) = (\beta_i) = 1/m$ alors une permutation optimale T^\dagger induit une matrice de répartition R^\dagger telle que :

$$R^\dagger = \frac{1}{m} [\delta_{T(i)=j}] = \begin{cases} 1/m & \text{si } T(i) = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (10)$$

qui est une solution du problème de Kantorovich. R peut donc être vu comme une mesure $\pi : \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ avec comme marginales A et B .

La formulation de Kantorovich admet une version duale, qui revient à effectuer une maximisation de potentiels appliqués à chacun des éléments des mesures A et B . Pour

2. Cette notion persiste même avec S et S' des ensembles continus.

continuer l’analogie originelle, cette reformulation permet de définir un ensemble de prix $f = \{f_i\}_{i=0,\dots,m}$ d’envoi de matériaux depuis A et de prix $g = \{g_j\}_{j=0,\dots,n}$ de réception vers B que peut proposer un livreur qui va tenter de maximiser ses profits. Le coût de transport étant connu grâce à C , la fonction de coût utilisée alors l’entreprise géant les usines et entrepôts peut simplement refuser les propositions de transport donc le coût $f \oplus g := (f_i + g_j)_{i,j} \geq c(\alpha_i \delta_{x_i}, \beta_j \delta_{y_j})$. La formulation duale de $OT(A, B)$ est définie comme suit :

$$OT(A, B) = \max_{f \in \mathbb{R}^m, g \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=0}^m \alpha_i f_i + \sum_{j=0}^n \beta_j g_j \quad (11)$$

Cette reformulation du problème présente un avantage indéniable : les plans de transports peuvent maintenant être représentés comme des vecteurs réels de poids, de même taille que les nuages de points qu’ils représentent au lieu de matrices $m \times n$!

2.3 Méthodes de résolution

Les formulations de Monge et de Kantorovich énoncées plus haut forment la base de la théorie du transport optimal. Plusieurs méthodes ont été présentées pour calculer le transport optimal, et peuvent être classées en deux catégories principales : les méthodes de résolution exacte, et celles par approximation.

Parmi les algorithmes de résolution exacte, nous pouvons citer la résolution par points intérieurs ou graphes simpliciaux (ORLIN, 1988) qui présente une complexité de $O(N^3 \log N)$ (PELE & WERMAN, 2009, § 2.1, avec N la dimensionalité des mesures utilisées). Toutefois, ces méthodes possèdent une complexité algorithmique trop élevée pour une utilisation sur des mesures de plus que quelques milliers d’éléments.

CUTURI (2013) présente une méthode de calcul de transport optimal par approximation. Cette formulation utilise un terme de *régularisation entropique* afin de rendre le problème *strictement convexe*. Soient deux mesures probabilistes μ et ν telles que :

$$\mu = \sum_{i=0}^n \mu_i \delta_{x_i} \quad \nu = \sum_{j=0}^m \nu_j \delta_{y_j} \quad \sum(\mu_i) = \sum(\nu_j) = 1$$

La formulation présentée par Cuturi permet de trouver un plan de transport π_ϵ minimisant la *distance de Sinkhorn* OT_ϵ entre μ et ν :

$$OT_\epsilon(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} C d\pi_\epsilon + \epsilon \text{KL}(\pi_\epsilon | \mu \otimes \nu) \quad (12)$$

$$\text{où } \text{KL}(\pi_\epsilon | \mu \otimes \nu) = \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} \log\left(\frac{d\pi_\epsilon}{d\mu d\nu}\right) d\pi_\epsilon \quad (13)$$

L’algorithme présenté repose sur un point de vue géométrique de l’espace des plans de transports π sous la formulation de Monge (permutations). En effet, il est possible

de constituer à partir des π valides un ensemble de points $U(\mu, \nu)$ défini comme suit :

$$U(\mu, \nu) := \{\pi \in \mathbb{R}^{n \times m} \mid \pi \mathbb{1}_d = \mu, \pi^T \mathbb{1}_d = \nu\} \quad (14)$$

Le théorème de Birkhoff-von Neumann (BIRKHOFF, 1946), nous permet de montrer que ces points forment un polytope *convexe* dont les sommets sont des matrices de permutations. Étant donné que toute permutation est une solution du problème de transport, alors toute combinaison linéaire de ces sommets interne au polytope avec des poids $(\lambda_i \in [0, 1])_{i=0,\dots,\|U(\mu,\nu)\|}$ positifs est également une solution du problème de transport. Ces combinaisons linéaires sont des répartitions probabilistes de μ vers ν , comme celles que nous retrouvons dans la formulation de KANTOROVICH (1942).

Dû à la convexité de $U(\mu, \nu)$, toutes les matrices sont des matrices doublement stochastiques : la somme des lignes et des colonnes sont toutes deux égales à 1. De ce fait, ces matrices peuvent être approximées grâce à l’algorithme itératif de SINKHORN et KNOPP (1967), particulièrement bien adapté à être parallélisé sur GPU. Dans cet algorithme, augmenter la valeur du paramètre entropique $\epsilon > 0$ permet de se rapprocher d’une permutation, au coût de plus de complexité de calcul.

BONNEEL et COEURJOLLY (2019) présentent SPOT : une méthode de résolution du transport optimal par approximation. Leur méthode utilise un algorithme de résolution exacte de transport optimal en 1D sur des projections successives sur l’ensemble des directions \mathbb{S}^{d-1} : la boule unitaire en dimension d . Lorsque le problème du transport optimal de μ vers ν est unidimensionnel, alors la formulation de Monge du problème implique de trouver une permutation $\sigma : [0, n] \mapsto [0, n]$ des μ_i vers les ν_j telle que $\mu_0 \leq \dots \leq \mu_n$ et $\nu_{\sigma(0)} \leq \dots \leq \nu_{\sigma(n)}$.

En effectuant un ensemble de projections unidimensionnelles sur \mathbb{S}^{d-1} , il est possible d’approximer un appariement optimal des points de μ vers ν par descente de gradient comme décrit dans BONNEEL et al. (2015). La fonction à optimiser (le coût de leur transport optimal) est comme suit :

$$\text{EMD}_S = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} W(\text{Proj}_\theta \mu, \text{Proj}_\theta \nu) d\theta \quad (15)$$

De plus, les auteurs proposent un algorithme de recalage rigide suivant le cadre originel de l’ICP, en remplaçant l’appariement des points par une étape de transport optimal via leur méthode SPOT. Nous nous comparerons à leur méthode en Section 4.

Au travers de ces différents travaux, il est clair qu’il existe deux interprétations du transport optimal :

- selon la formulation de Monge, comme une généralisation d’algorithmes de tris en d dimensions, où les opérateurs \leq, \geq ne sont pas disponibles,
- selon la formulation de Kantorovich, comme un ensemble de masses en interactions, où le transport est une négociation d’un prix optimal

L'utilisation d'une méthode de résolution par rapport à une autre va donc être orientée par le point de vue donné par rapport à un problème posé.

3 Méthode

La simplicité et rapidité de calcul de la méthode ICP sont des avantages indéniables. Toutefois comme vu en Section 1, le critère d'appariement basé sur une distance euclidienne présente des minima locaux faussant le calcul de la transformation. La Section 2 nous a permis de voir que le transport optimal est une méthode de répartition de masses minimisant *globalement* la distance de déplacement d'une source vers une cible. Nous proposons ainsi une méthode de recalage rigide de nuages de points surfaciques utilisant une étape d'appariement par transport optimal régularisé, et est présentée dans l'algorithme 2.

Algorithme 2 : La méthode RIOT

Data : P et Q , deux nuages tridimensionnels

Result : \mathbf{A} matrice $\in \text{GL}(3)$ et $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$

$P_0 \leftarrow P$, $\mathbf{A} \leftarrow \text{Id}(3)$, $\mathbf{t} \leftarrow \mathbf{0}$, $\delta_0 \leftarrow \infty$

while $|\delta_i - \delta_{i-1}| > \tau$ **do**

```

    /*Transport optimal  $P_i \rightarrow Q$ : flou! */
     $C^\dagger = \text{OTreg}(P_i, Q)$ 
    /*Raccrochage à  $Q$  */
     $C = \text{Project}(C^\dagger, Q)$ 
    /*  $\delta_i$ : distance entre  $P$  et  $C$  */
     $\mathbf{A}_i, \mathbf{t}_i, \delta_i = \text{ICPSolveAffine}(P, C)$ 
     $P_{i+1} = \mathbf{A}P_i + \mathbf{t}$ 

```

return \mathbf{A} , \mathbf{t}

Tout comme la méthode ICP originelle, notre méthode comporte deux composantes principales : l'appariement des points de P sur Q (fonction OTreg), ainsi que le calcul d'une transformation minimisant l'erreur quadratique entre C les points transportés depuis P vers Q , et Q (fonction ICPSolveAffine).

Notre méthode utilise pour son processus d'appariements une méthode de calcul de transport optimal régularisé originellement présenté dans FEYDY et al. (2019). Soient nos deux nuages de points P et Q représentés comme des mesures dans \mathbb{R}^3 selon :

$$\mathcal{P} = \sum_{i=0}^m \alpha_i \delta_{p_i} \quad \text{et} \quad \mathcal{Q} = \sum_{j=0}^n \beta_j \delta_{q_j} \quad (16)$$

La fonction de coût à minimiser est la suivante :

$$S_\epsilon(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \text{OT}_\epsilon(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) - \frac{1}{2}\text{OT}_\epsilon(\mathcal{P}, \mathcal{P}) - \frac{1}{2}\text{OT}_\epsilon(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}) \quad (17)$$

Avec OT_ϵ la fonction de transport définie comme l'équation (13) de CUTURI (2013).

Les termes de transport optimal $\text{OT}_\epsilon(\mathcal{P}, \mathcal{P})$ et $\text{OT}_\epsilon(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ servent à débiaiser le plan de transport π_ϵ . En effet, si le paramètre entropique ϵ tend vers l'infini, alors la fonction

$\text{OT}_\epsilon(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ tendra vers $\int \int C(x, y) d\mathcal{P}(x) d\mathcal{Q}(y)$. Un minimiseur possible de cette formulation est une distribution de Dirac située au point médian (resp. moyen) de \mathcal{Q} si $C = L_1$ (resp. $C = L_2$). Les termes d'auto-corrélation, inspirés des normes à noyaux (normes *MMD*, GRETTON et al. (2006)) permettent que le seul minimiseur possible soit le transport de \mathcal{P} sur l'intégralité du support de \mathcal{Q} .

Toutefois, dû au rajout du terme de régularisation entropique ϵ dans le calcul du plan de transport minimisant S_ϵ , les appariements sont rendus « flous ». En effet, même si π possède des marginales égales à α_i et β_j indiquant que toute la masse de \mathcal{P} est transportée sur \mathcal{Q} , aucune garantie n'est faite sur l'appartenance d'un point à \mathcal{Q} après sa transformation dû à la nature probabiliste des π . Ce manque de précision se manifeste par une oscillation des appariements C^\dagger et donc des matrices de transformations calculées d'une itération à l'autre. Afin de permettre une convergence des transformations plus stable, une étape de projection du nuage de point transformé C^\dagger au nuage de point cible Q est nécessaire.

Une fois les points appariés, il faut extraire une transformation permettant de minimiser l'erreur quadratique entre la source et les points appariés. Pour cela, nous utilisons la méthode décrite dans DU et al. (2008). Soient P^\perp et Q^\perp les deux nuages de points centrés à l'origine :

$$P^\perp = \{p_i^\perp = p_i - \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m p_i\}$$

$$\text{et } Q^\perp = \{q_j^\perp = q_j - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n q_j\}$$

La transformation affine (\mathbf{A}, \mathbf{t}) permettant de minimiser l'erreur quadratique peut donc être définie comme :

$$\mathbf{A} = \left(\sum_{i=0}^m q_i^\perp (p_i^\perp)^T \right) \left(\sum_{i=0}^m p_i^\perp (p_i^\perp)^T \right)^{-1} \quad (18)$$

$$\text{et } \mathbf{t} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n q_j - \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m \mathbf{A} p_i \quad (19)$$

4 Application, implémentation et résultats

Cette section détaille l'implémentation de notre méthode, le cadre applicatif au sein duquel elle fut développée avant de présenter des résultats de recalage obtenus par nos travaux, mis en comparaison avec ceux obtenus par la méthode SPOT (BONNEEL & COEURJOLLY, 2019).

4.1 Implémentation

Afin de pouvoir accélérer et paralléliser les calculs desdits plans de transport à un moindre coût de développement, nous avons choisi d'implémenter notre méthode en Python. Nous utilisons ainsi PyTorch (PASZKE et al., 2019)










	État initial	SPOT	RIOT (nôtre)
bun_zipper_res2 ↓ bun_zipper_res2			
dragon_vrip_res2 ↓ dragon_vrip_res2			
mandible ↓ patient			

TABLE 1 – Illustrations graphiques des résultats obtenus par notre méthode ainsi que par SPOT (BONNEEL & COEURJOLLY, 2019). En jaune, le maillage source utilisé pour le nuage de points P . En bleu, le maillage cible utilisé pour le nuage de points Q . En rouge, le maillage source transformé avec la transformation obtenue avec SPOT. Idem en vert pour notre méthode. *Note* : lorsque le maillage transformé est trop aligné avec la cible, celle-ci est cachée.

	# points
bun_zipper	35 947
bun_zipper_res2	8 171
dragon_vrip	437 645
dragon_vrip_res2	100 250
mandible	35 632
patient	820 344

TABLE 2 – Les différentes tailles des modèles utilisés pour tester les performances de notre méthode. Les modèles *patient* et *mandible* sont extraits de notre cadre applicatif. Le reste des modèles ont été obtenus depuis la base de données de Stanford.

pour représenter nos données ainsi que pour ses capacités de calcul tensoriels, parallélisable sur GPU. Nous utilisons également PyKeops (CHARLIER et al., 2021) afin de pouvoir effectuer les calculs de PyTorch de façon symbolique (*lazily-evaluated*). Enfin, nous utilisons la bibliothèque GeomLoss (FEYDY et al., 2019) pour calculer la divergence de Sinkhorn (17) comme expliqué en section 3.

4.2 Recalage de mandibules

La planification virtuelle pré-opératoire est utile dans le cadre de certaines opérations longues et/ou coûteuses. Dans notre cadre applicatif, nous souhaitons recalculer un modèle surfacique générique de mandibule à un maillage issu d’une segmentation de l’image CT pré-opératoire de la mandibule d’un patient. Ce recalage nous permettra par la suite de proposer une interface de planification pré-opératoire interactive permettant de découper et déformer ce modèle générique librement.

Les détériorations présentes sur les mandibules patient sont toutefois très variables. La forme et taille de chaque sous-partie de la mandibule peut changer, et certains patients peuvent présenter des parties manquantes.

4.3 Résultats

Afin d’illustrer les performances de notre algorithme, nous l’appliquons sur un ensemble de nuages de points issus de maillages surfaciques 3D. Ces maillages ont plusieurs provenances : une partie d’entre eux ont été extraits de la base de maillages surfaciques de Stanford³. Le reste des jeux de données, relatifs à notre cadre applicatif ont été extraits d’un ensemble d’images patients issus de scans tomogra-

		$\ i\ $	$\frac{1}{i}t_i$	$\ \cdot - \cdot\ _F(\%)$	RMSE
bun_zipper	SPOT	75	746ms	1.11×10^{-6}	4.4×10^{-3}
→ bun_zipper	RIOT	21	407ms	6.12×10^{-6}	5.8×10^{-3}
bun_zipper_res2	SPOT	75	160ms	9.34×10^{-7}	1.5×10^{-2}
→ bun_zipper_res2	RIOT	18	271ms	2.3×10^{-5}	7.4×10^{-3}
dragon_vrip	SPOT	75	10254ms	1.79×10^{-6}	5.11×10^{-8}
→ dragon_vrip	RIOT	22	23637ms	4.64×10^{-5}	2.6×10^{-2}
dragon_vrip_res2	SPOT	75	2143ms	1.79×10^{-6}	2.5×10^{-2}
→ dragon_vrip_res2	RIOT	21	1739ms	5.9×10^{-6}	2.5×10^{-2}
mandible	SPOT	75	1585ms	N/A	8.32
→ patient	RIOT	75	4417ms	N/A	2.59

TABLE 3 – Ensemble des résultats présentés ici. Les tests détaillés ci-dessus furent conduits sur un ordinateur portable possédant un Intel Core i7-8850H, une carte graphique NVIDIA Quadro P2000 Mobile, ainsi que 32Go de mémoire vive.

phiques. Dans un premier temps, les nuages seront issus des modèles de Stanford avec un seul et même modèle utilisé comme source et cible. Le nuage cible sera transformé grâce à une matrice de rotation et un vecteur de translation générés aléatoirement. Par la suite, les nuages de points seront issus de données patient : la source sera un maillage de mâchoire de référence utilisée dans notre cas d’étude et la cible sera une mâchoire patient parmi plusieurs avec des pathologies différentes. Le Tableau 2 répertorie les tailles des nuages de points utilisés dans le cadre de nos expériences. Pour chacun des nuages en toutes situations, l’intégralité de points fut utilisée pour le calcul du recalage.

Le Tableau 3 répertorie les résultats obtenus grâce à notre méthode, ainsi que ceux obtenus avec la méthode SPOT : la colonne $\|i\|$ représente le nombre d’itérations effectué pour le recalage, $\frac{1}{i}t_i$ le temps moyen par itération, $\|\cdot - \cdot\|_F(\%)$ le pourcentage d’erreur relative entre la matrice de transformation originellement appliquée aux modèles cible et la matrice de transformation extraite, et RMSE est l’erreur quadratique entre les deux modèles. Lorsque les deux modèles diffèrent, le RMSE est défini entre la source et la projection au plus proche de la source sur la cible.

Comme le montrent les résultats, notre méthode permet d’obtenir un compromis entre performance et précision non présent dans la méthode SPOT. De plus, l’utilisation de calcul symbolique grâce à la bibliothèque PyKeops, il est possible de réduire le temps de calcul moyen par itération.

5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons présenté une nouvelle méthode de recalage rigide basée sur la méthode ICP permettant le recalage rigide de nuages de points. Cette méthode fut utilisée dans un cadre applicatif clinique : le recalage d’un modèle moyen de mandibule sur des mâchoires patient directement. Notre méthode présente quelques limitations, notamment un manque de robustesse aux données manquantes dans certaines configurations. En effet, la formulation de la méthode de coût de transport (17) implique un

comportement non-désirable des plans de transport générés : ceux-ci vont répartir la masse de la source sur l’intégralité de la masse de la cible. Comme montré en Figure 4, ce comportement se manifeste lorsque les données manquantes altèrent le support d’une des mesures.

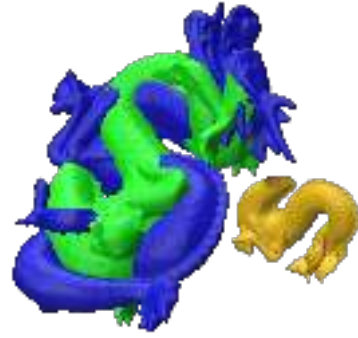


FIGURE 4 – Un exemple de recalage partiel erroné. La source (jaune) recalée (vert) sur la cible (bleu) présente le phénomène d’attache au support : le transport optimal a étendu le nuage source P à tout le support de la cible Q , faussant la transformation calculée par la suite.

L’utilisation du transport optimal présente deux intérêts principaux :

1. son caractère d’optimisation global est utile dans le cadre de recalage rigide afin d’éviter un ensemble de minima locaux lié à l’appariement des points,
2. sa formulation sous forme de masses en interaction permet de recalier des nuages de points admettant étant des discrétisations variées.

Il est cependant important d’observer le comportement du transport optimal sous l’action d’un recalage rigide.

- le transport optimal n’est pas invariant à l’action du groupe $SO(3)$ (et par extension $GL(3)$) : la distance minimisée selon le transport est toujours la distance euclidienne, ou sous certaines formulations la distance de *Wassertein-p* ($\frac{1}{p}\|\cdot\|^p$, $p \in \mathbb{R}_+$),

3. <https://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/>

- si l'on se concentre sur les plans de transports π avec régularisation entropique $0 \leq \epsilon \leq \infty$ il n'existe aucune garantie qu'un point $p' = \int_{\mathcal{X}} p\pi(p, dy)$ ne soit présent sur la surface qu'un nuage de point représente.

Ces problèmes ouverts dans le domaine du transport optimal sont tous deux liés à l'interprétation géométrique de celui-ci. Comme toute méthode d'optimisation, l'applicabilité à un domaine donné dépend de la quantité minimisée et de l'espace dans lequel se déplacer : dans le cas du recalage rigide, il serait utile d'explorer l'effet du plongement des nuages de points dans des espaces de plus haute dimension. Dans notre cadre applicatif par exemple, nous pourrions essayer d'utiliser les informations supplémentaires apportées par le maillage : les normales au points, ou bien les courbures principales. Plonger le nuage dans un espace de dimension $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ pour représenter les positions des points ainsi que leurs normales sur le maillage pourrait potentiellement permettre un recalage de meilleure qualité. Une extension à ce travail pourra être proposée, afin de permettre un transport partiel des nuages de points. Plusieurs possibilités s'offrent à nous pour cette problématique : une modification de la fonction de transport suivant les travaux de FIGALLI (2010) pourrait permettre de ne considérer qu'une sous-partie des distributions à transporter. Une estimation d'un « masque » partiel de points à considérer pourrait également être extrait de façon semi-automatique, comme présenté par DUMONCEL et al. (2016).

Références

- BESL, P., & MCKAY, N. D. (1992). A method for registration of 3-D shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(2), 239-256. <https://doi.org/10.1109/34.121791>
- BIRKHOFF, G. (1946). Three observations on linear algebra. *Univ. Nac. Tucumán. Revista A.*, 5, 147-151.
- BONNEEL, N., & COEURJOLLY, D. (2019). SPOT : Sliced Partial Optimal Transport. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH)*, 38(4). <https://doi.org/10.1145/3306346.3323021>
- BONNEEL, N., RABIN, J., PEYRÉ, G., & PFISTER, H. (2015). Sliced and radon wasserstein barycenters of measures. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 51(1), 22-45. <https://doi.org/10.1007/s10851-014-0506-3>
- BRENIER, Y. (1991). Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. *Communications on pure and applied mathematics*, 44(4), 375-417.
- CHARLIER, B., FEYDY, J., GLAUNÈS, J. A., COLLIN, F.-D., & DURIF, G. (2021). Kernel Operations on the GPU, with Autodiff, without Memory Overflows. *Journal of Machine Learning Research*, 22(74), 1-6. <http://jmlr.org/papers/v22/20-275.html>
- CHEN, Y., & MEDIONI, G. (1992). Object modelling by registration of multiple range images. *Image and vision computing*, 10(3), 145-155. [https://doi.org/10.1016/0262-8856\(92\)90066-C](https://doi.org/10.1016/0262-8856(92)90066-C)
- CUTURI, M. (2013). Sinkhorn distances : Lightspeed computation of optimal transport. *Advances in neural information processing systems*, 26. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1306.0895>
- DU, S., ZHENG, N., MENG, G., & YUAN, Z. (2008). Affine registration of point sets using ICP and ICA. *IEEE Signal Processing Letters*, 15, 689-692.
- DUMONCEL, J., SUBSOL, G., DURRLEMAN, S., JESSEL, J.-P., BEAUDET, A., & BRAGA, J. (2016). How to build an average model when samples are variably incomplete? Application to fossil data. *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops*, 101-108.
- EGGERT, D., LORUSSO, A., & FISHER, R. (1997). Estimating 3-D rigid body transformations : a comparison of four major algorithms. *Machine Vision and Applications*, 9(5-6), 272-290. <https://doi.org/10.1007/s001380050048>
- FEYDY, J., SÉJOURNÉ, T., VIALARD, F.-X., AMARI, S.-i., TROUVE, A., & PEYRÉ, G. (2019). Interpolating between Optimal Transport and MMD using Sinkhorn Divergences. *The 22nd International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*, 2681-2690.
- FIGALLI, A. (2010). The optimal partial transport problem. *Archive for rational mechanics and analysis*, 195(2), 533-560. <https://doi.org/10.1007/s00205-008-0212-7>
- GRETTON, A., BORGHARDT, K., RASCH, M., SCHÖLKOPF, B., & SMOLA, A. (2006). A kernel method for the two-sample-problem. *Advances in neural information processing systems*, 19. <https://doi.org/10.7551/mitpress/7503.003.0069>
- KANTOROVICH, L. V. (1942). On the translocation of masses. *Dokl. Akad. Nauk. USSR (NS)*, 37, 199-201.
- MONGE, G. (1781). Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. *Mem. Math. Phys. Acad. Royale Sci.*, 666-704.
- NUCHTER, A., LINGEMANN, K., & HERTZBERG, J. (2007). Cached kd tree search for ICP algorithms. *Sixth International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling (3DIM 2007)*, 419-426. <https://doi.org/10.1109/3DIM.2007.15>
- ORLIN, J. (1988). A faster strongly polynomial minimum cost flow algorithm. *Proceedings of the Twentieth annual ACM symposium on Theory of Computing*, 377-387. <https://doi.org/10.1145/62212.62249>
- PASZKE, A., GROSS, S., MASSA, F., LERER, A., BRADBURY, J., CHANAN, G., KILLEEN, T., LIN, Z., GIMELSHEIN, N., ANTIGA, L., DESMAISON, A., KOPF, A., YANG, E., DEVITO, Z., RAISON,

- M., TEJANI, A., CHILAMKURTHY, S., STEINER, B., FANG, L., ... CHINTALA, S. (2019). PyTorch : An Imperative Style, High-Performance Deep Learning Library. In H. WALLACH, H. LAROCHELLE, A. BEYGELZIMER, F. D'ALCHÉ-BUC, E. FOX & R. GARNETT (Éd.), *Advances in Neural Information Processing Systems 32* (p. 8024-8035). Curran Associates, Inc. <http://papers.nips.cc/paper/9015-pytorch-an-imperative-style-high-performance-deep-learning-library.pdf>
- PELE, O., & WERMAN, M. (2009). Fast and robust Earth Mover's Distances. *2009 IEEE 12th International Conference on Computer Vision*, 460-467. <https://doi.org/10.1109/ICCV.2009.5459199>
- RANGARAJAN, A., CHUI, H., & BOOKSTEIN, F. L. (1997). The softassign procrustes matching algorithm. *Information Processing in Medical Imaging : 15th International Conference, IPMI'97 Poultney, Vermont, USA, June 9-13, 1997 Proceedings 15*, 29-42. https://doi.org/10.1007/3-540-63046-5_3
- RUSINKIEWICZ, S., & LEVOY, M. (2001). Efficient variants of the ICP algorithm. *Proceedings third international conference on 3-D digital imaging and modeling*, 145-152. <https://doi.org/10.1109/IM.2001.924423>
- SINKHORN, R., & KNOPP, P. (1967). Concerning nonnegative matrices and doubly stochastic matrices. *Pacific Journal of Mathematics*, 21(2), 343-348.
- ZHANG, Z. (1994). Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces. *International journal of computer vision*, 13(2), 119-152. <https://doi.org/10.1007/bf01427149>