



HAL
open science

Extension de la notion d'énumération : comment mieux rendre compte du caractère commun de certaines difficultés des sujets en situation

Olivier Rivière

► To cite this version:

Olivier Rivière. Extension de la notion d'énumération : comment mieux rendre compte du caractère commun de certaines difficultés des sujets en situation. Séminaire national de didactique des mathématiques 2019, ARDM, Mar 2019, Paris, France. hal-04217920

HAL Id: hal-04217920

<https://hal.science/hal-04217920>

Submitted on 26 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

EXTENSION DE LA NOTION D'ENUMERATION : COMMENT MIEUX RENDRE COMPTE DU CARACTERE COMMUN DE CERTAINES DIFFICULTES DES SUJETS EN SITUATION

Olivier RIVIERE

Laboratoire ACTé, ESPE Clermont, Université Clermont-Auvergne

olivier.riviere@uca.fr

Résumé

Des travaux de didactique des mathématiques, conduits par Briand, ont permis de montrer l'existence de connaissances spécifiques d'organisation dans le domaine des problèmes concernant le dénombrement et les opérations arithmétiques, connaissances qui relèvent de ce que Brousseau a appelé l'énumération.

Nous nous proposons dans ce texte de montrer comment l'étude de la situation fondamentale de l'énumération permet d'exhiber de nouvelles variables et de compléter l'étude des stratégies proposée par Briand. Une nouvelle définition de l'énumération est proposée, permettant d'unifier conceptuellement la description des difficultés rencontrées.

Cette nouvelle définition modifie le regard porté sur l'énumération en rendant cette connaissance visible dans de nombreuses situations, montrant ainsi que ces « connaissances d'énumération » ne sont spécifiques ni au champ numérique, ni même aux mathématiques.

Mots clés

Enumération, connaissance, savoir, situation, définition

I. LA PLACE DES SITUATIONS DANS NOTRE ETUDE

Commençons par préciser certaines aspects qui nous semblent caractéristiques de notre travail. Dans l'étude du processus de diffusion des connaissances, la fabrication de modèles de ces connaissances relève pour Brousseau (1997) d'une double dynamique :

« Les modèles doivent être alors envisagés sous deux formes qu'il s'agit de faire « coïncider » :

- Comme nécessité théorique, déduite du savoir lui-même, et d'un fonctionnement minimal supposé de l'élève,

- Comme représentation des situations réelles, didactiques ou non, où la connaissance devrait « se déduire » des décisions et des comportements du sujet » (G. Brousseau, 1997, p. 3)

Le premier point est fondamental pour nous car il fait de la situation un objet théorique dont une des fonctions est de décrire le savoir. Il installe comme élément premier du modèle de diffusion de la connaissance une modélisation du savoir par des situations.

Le second point nous fournit des clés d'observation de la connaissance. C'est par l'observation des décisions et des actions du sujet que nous pouvons en déduire des manifestations de la connaissance.

II. CONSTRUCTION D'UNE PREMIERE DEFINITION DE L'ENUMERATION

Dans cette première partie, en appui sur les travaux de Briand (1993, 1999), nous montrons comment l'observation des difficultés dans deux situations (la situation de dénombrement d'une collection de jetons et la situation des allumettes) nous conduisent à formaliser une première définition de l'énumération.

1. Modélisation de la situation en terme de relation entre deux collections

Le mot « énumération » est introduit par Brousseau (1984) dans différents contextes numériques. L'étude des difficultés d'élèves dans les situations de dénombrement par comptage permet à Briand (1993) de faire émerger l'énumération comme savoir.

Pour dénombrer une collection de jetons, il faut pouvoir en faire un inventaire. Chaque élément de la collection des jetons doit être compté une fois et une seule. Le dénombrement par comptage d'une collection peut être modélisé par la construction d'une relation entre les éléments de cette collection de jetons et la collection des mots nombres. Chacun des éléments de la collection des jetons doit être mis en relation avec un élément et un seul de la collection des mots nombres.

Quand la collection des jetons est bien comptée, une bijection a alors été construite entre cette collection et un sous-ensemble de la collection des mots nombres (Figure 1).

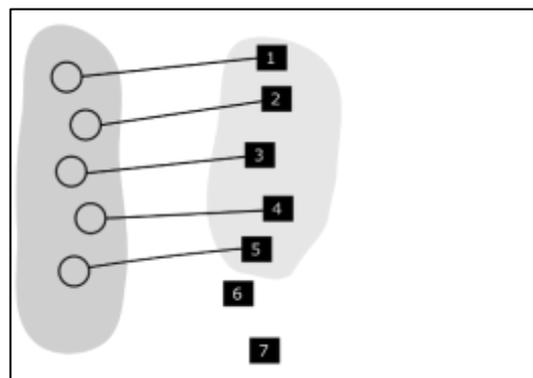


Figure 1: La situation des dénombrement des jetons - mise en évidence d'une bijection entre la collection de jetons et un sous-ensemble de l'ensemble des mots nombres

Dans l'étude de la construction de la relation entre ces deux collections, certains dysfonctionnements peuvent apparaître.

Ainsi, la non-maitrise par le sujet de la comptine orale va rendre indisponible certains éléments de la collection des mots nombres et par conséquent interdire toute construction d'une bijection dans laquelle un sous-ensemble de cette collection intervient. C'est ce qui peut être observé quand un sujet interrompt le comptage de la collection des jetons au dernier des mots nombres qu'il connaît alors qu'il reste des jetons à dénombrer.

Tous les dysfonctionnements du comptage ne portent pas sur la seule non-disponibilité de la collection des mots nombres. Ainsi, quand le sujet affecte soit plus d'un mot nombre, soit aucun mot nombre à certains éléments de la collection des jetons, le comptage échoue malgré la disponibilité de la collection des mots nombres (Figure 2).

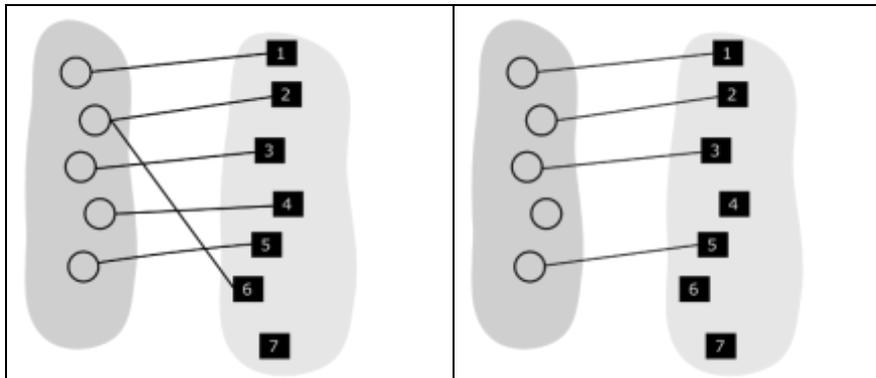


Figure 2 : La situation des dénombrement des jetons - mise en évidence de deux dysfonctionnements du comptage

Dans la situation de dénombrement par comptage, l'énumération apparaît comme une connaissance nécessaire à la réussite, sans pour autant qu'elle soit la seule connaissance en jeu dans la situation.

Ce qui caractérise une connaissance est l'existence d'une situation dans laquelle la connaissance est la solution optimale du problème posé. Briand cherche à construire une situation de ce type, qui s'affranchisse du recours au nombre.

« Comment alors mettre en place des situations dans lesquelles l'énumération d'une collection soit seule (indépendamment du nombre) la solution à un problème posé ? » (Briand, 1999, p. 57)

Même si Briand a pour objectif de produire une situation qui puisse permettre de fabriquer des ingénieries d'enseignement, c'est bien une nécessité théorique qui guide la fabrication de la situation. C'est dans ce contexte qu'il construit la situation des allumettes.

Briand (1999) donne une description de la situation.

« Un élève dispose devant lui (sur une table) d'un tas de boîtes d'allumettes identiques percées sur le côté d'un petit trou permettant le passage d'une allumette. Des bâtonnets (sans le phosphore) sont les allumettes. Ces bâtonnets, en grand nombre, sont dans une boîte plastique. Il s'agit de placer une allumette et une seule dans chaque boîte sans l'ouvrir, de savoir lorsque l'on a terminé, puis de s'assurer si l'on a réussi ou échoué en ouvrant les boîtes. S'il y a une seule allumette dans chaque boîte et si aucune boîte n'est vide, alors l'élève a réussi. » (Briand, 1999, p. 57)

Briand produit une ingénierie qui, par un jeu sur différentes variables (notamment boîtes d'allumettes mobiles ou bien fixées sur un support), propose un enseignement de l'énumération en moyenne section.

Formellement, la situation des allumettes peut être modélisée comme la construction d'une relation entre une collection de boîtes et une collection d'allumettes (Figure 3).

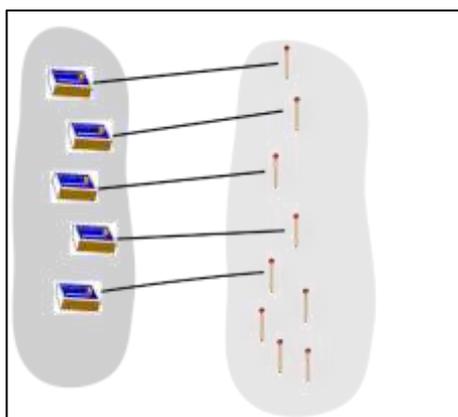


Figure 3 : Situation des allumettes- une modélisation en termes de collections

En éliminant toute dimension numérique de la situation, Briand rend les dysfonctionnements dans la construction de la relation encore plus visibles. C'est cette connaissance dans l'action de construction de cette relation sous contraintes que Briand nomme énumération.

2. La fonction particulière de la seconde collection : évolution de la modélisation

Dans cette situation, comme dans la précédente, deux collections sont en jeu. Pour autant, les deux collections ne sont pas symétriques; elles ne jouent pas le même rôle. La fonction de la seconde collection (mots nombres et allumettes) est de rendre observable la relation qui est construite sur les éléments de la première (jetons, boîtes). Ainsi, dans chacune des deux situations, un traitement va être réalisé sur les éléments de la première collection. Ce traitement va consister à affecter un mot nombre à un jeton ou bien à insérer une allumette dans une boîte. C'est la réalisation de ce traitement sur les éléments de la première collection qui permet d'observer le processus de fabrication de la relation.

Dans ces deux situations, quand le sujet saisit un élément de la première collection et qu'il effectue le traitement demandé (en lui affectant un élément de la seconde collection), la seule chose qui importe du point de vue de l'énumération est que cet élément de la première collection ait été traité.

La modélisation proposée peut donc se dispenser de représenter la seconde collection pour ne plus laisser apparaître que les éléments de la première collection et les traces de la relation spécifiques aux éléments de cette première collection.

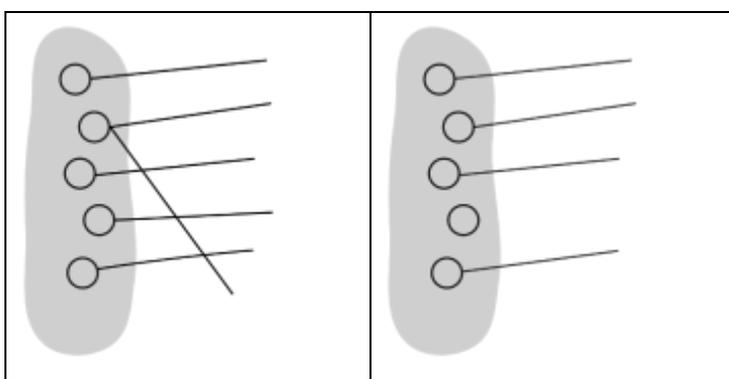


Figure 4 : La situation des dénombrement des jetons - modélisation ne montrant plus que la première collection et la relation

La Figure 4 reprend les modélisations des deux dysfonctionnements du comptage décrits dans la Figure 2. Cette nouvelle modélisation met en évidence que ce qui importe du point de vue de

l'énumération de la première collection est le nombre de traitements (nombre affecté à un jeton, allumette insérée dans un boîte) qui ont été réalisés sur chacun des éléments de cette collection. Finalement, du point de vue de l'énumération, la modélisation peut donc se réduire au codage du nombre de traitements réalisés sur chacun des éléments de la première collection. Par la suite, nous nommerons ordre de multiplicité de l'élément ce nombre.

3. Nouvelle formulation de la définition de l'énumération

Énumérer une collection, c'est traiter une fois et une seule chacun des éléments de cette collection. La modélisation développée permet de produire une définition de l'énumération en appui sur l'ordre de multiplicité.

Soit un ensemble E d'éléments.

Dans une situation mettant en œuvre un traitement T , cet ensemble E est bien énuméré si et seulement si :

$$\forall e \in E m(e) = 1$$

où m représente l'ordre de multiplicité du point de vue du traitement T .

Dans la Figure 4, les collections de ronds ne sont pas bien énumérées car il existe un élément dont l'ordre de multiplicité est égal à 2 dans le premier cas et à 0 dans le second cas.

III. UNE PREMIERE EVOLUTION DE LA DEFINITION

Dans cette partie, nous montrons comment les dysfonctionnements observés dans une nouvelle situation d'énumération nous conduisent à reformuler la définition de l'énumération.

Dans (Briand, 1999), nous disposons de commentaires détaillés sur la nature des gestes qui sont réalisés quand la collection des boîtes d'allumettes est déplaçable. L'influence de la position du tas d'allumettes est étudiée, tout comme l'effet produit par le secouage de chacune des boîtes. Par contre, dans le cas où les boîtes d'allumettes sont collées à un support, nous ne disposons que d'une analyse quantitative sur les progrès observés des sujets. Dans notre travail de thèse (Riviere, 2017), nous avons cherché à produire des analyses qualitatives sur les stratégies effectives mises en œuvre par les sujets dans le cas où les éléments de la collection énumérée ne sont pas déplaçables. Pour cela, nous avons construit une nouvelle situation d'énumération, la situation des sucres.

1. La situation des sucres

Commençons par décrire la situation étudiée.

« Une collection de ronds dessinés sur une feuille est présentée au sujet. Le sujet est invité à poser un sucre sur chaque rond et un chapeau sur chaque sucre. A l'issue de ce travail de préparation, chaque rond de la collection de départ est recouvert par un sucre qui est lui-même recouvert par un chapeau. Le jeu consiste à ramasser la totalité des sucres de la manière suivante : il faut attraper un chapeau, ramasser le sucre et reposer le chapeau sur le rond de la collection.

A chaque instant il ne peut y avoir plus d'un rond qui ne figure pas sous le chapeau qui lui est associé. Quand tous les chapeaux sont posés sur le support, aucun rond n'est visible. Quand le sujet soulève un chapeau et saisit le sucre qui y figurait, le rond qui était sous le sucre devient visible.

Le sujet n'aura le droit de soulever un autre chapeau que lorsqu'il aura replacer le chapeau sur le rond qu'il recouvrait initialement. L'expérimentateur contrôle le ramassage effectif des sucres et le retour effectif des chapeaux dans leur position initiale.

Le jeu est constitué a priori de deux phases : une phase d'action pendant laquelle le sujet ramasse les sucres et une phase de validation pendant laquelle le sujet vérifie que tous les sucres ont bien été ramassés.

Dans la phase de validation, la règle sur les chapeaux évolue. Le sujet a alors le droit de ramasser tous les chapeaux. S'il ne reste pas de sucre, alors il a gagné. Par contre, s'il reste au moins un sucre, alors la partie est perdue.

Le jeu peut s'arrêter dans la phase d'action si le sujet soulève un chapeau et qu'il n'y a pas de sucre sous ce chapeau. Dans ce cas la partie est perdue. (Rivière, 2017, p. 56-57)



Figure 5: Situation des sucres - la configuration matérielle

Dans ce jeu, le sujet perd dans deux cas :

- Dans la phase de validation, quand il reste un sucre sous un des chapeaux (cas 1)
- Dans la phase d'action, le sujet soulève un chapeau sous lequel ne figure pas de sucre (cas 2)

Le cas 1 est rencontré quand un élément au moins de la collection des chapeaux n'a pas été traité (puisque le sucre n'a pas été enlevé).

Le cas 2 est rencontré quand un élément de la collection des chapeaux est traité deux fois par le sujet (une première fois quand le chapeau est soulevé et le sucre enlevé et une seconde fois quand ce même chapeau est de nouveau soulevé sans qu'il soit possible à ce moment-là d'enlever un sucre). Il y a donc dans ce cas un élément de la collection que le sujet essaye de traiter deux fois.

Le cas 1 correspond au non-respect de la contrainte « chaque élément doit être traité au moins une fois », alors que le cas 2 correspond au non-respect de la contrainte « chaque élément doit être traité au plus une fois ».

Quand ni le cas 1, ni le cas 2 ne sont rencontrés pour aucun des éléments, c'est que la collection a été bien énumérée.

Appliquons à cette situation la modélisation développée précédemment.

Pour cette situation des sucres, la première collection en jeu est la collection des points dessinés sur la feuille (ou la collection des chapeaux puisqu'on peut par bijection confondre les deux collections). La seconde collection en jeu est la collection des sucres posés sur chaque point.

Le traitement consiste à soulever un chapeau et enlever le sucre présent sur le point (et sous le chapeau). La fonction des chapeaux est de rendre le traitement non visible lors de la phase d'action.

2. Nouvelle formulation de la définition de l'énumération

Dans la situation des allumettes, la partie s'arrête quand le sujet le décide, quand il pense qu'il a terminé. Dans la situation des sucres, la partie peut également s'arrêter selon ce processus. Mais la partie peut aussi s'arrêter lorsque le sujet soulève un chapeau dont il a déjà enlevé le sucre.

Cette condition d'arrêt rend très visible l'erreur qui consiste à traiter plus d'une fois le même élément. Les règles du jeu créent une dissymétrie dans les raisons de l'échec à l'énumération de la collection. Dans notre volonté de décrire les erreurs effectuées par les sujets dans le jeu, cette dissymétrie nous conduit à décomposer les conditions de l'énumération en deux. La condition de l'énumération « chaque élément doit être traité une fois et une seule » se décompose en deux pour devenir « chaque élément doit être traité au moins une fois » (C1) et « chaque élément doit être traité au plus une fois » (C2).

La définition de l'énumération produite dans la première partie devient :

Soit un ensemble E d'éléments.

Dans une situation mettant en œuvre un traitement T , cet ensemble E est bien énuméré si et seulement si :

$$\forall e \in E m(e) \geq 1 \text{ (condition C1)}$$

$$\forall e \in E m(e) \leq 1 \text{ (condition C2)}$$

où m représente l'ordre de multiplicité du point de vue du traitement T .

Remarques :

Dans la situation des sucres, le second soulèvement d'un même chapeau provoque l'arrêt de la partie. Si on réduit le traitement au soulèvement d'un chapeau, l'ordre de multiplicité d'un élément ne peut pas être supérieur à 2.

La séparation en deux de la condition de l'énumération permet donc de décrire plus finement les dysfonctionnements de l'énumération dans cette situation.

Nous venons de mettre à jour une variable qui permet de mieux caractériser les situations d'énumération :

- Dans certaines situations, les deux conditions de l'énumération sont considérées de manière symétrique : le non-respect de l'une ou de l'autre génère le même type de rétroaction (asynchrone pour les allumettes : c'est lors de la phase de contrôle du contenu des boîtes d'allumettes que nous pouvons vérifier que chacune de celles-ci ne contient ni plus, ni moins d'une allumette)
- Dans d'autres situations, les deux conditions de l'énumération sont considérées de manière dissymétrique : le non-respect de la condition C2 entraîne l'arrêt immédiat de la partie (dans la phase de ramassage des sucres, quand le sujet soulève un chapeau sous lequel ne figure plus aucun sucre), alors que le non-respect de la condition C1 n'entraîne pas l'arrêt immédiat (dans la phase de contrôle, quand le sujet soulève un chapeau sous lequel figure encore un sucre)

IV. EXTENSION DE LA NOTION D'ENUMERATION

Dans cette partie, nous montrons comment l'observation des difficultés rencontrées par les sujets en situations non didactiques nous conduit à proposer une extension de la définition d'énumération.

1. Une observation fondatrice

Nous nous appuyons sur la reconstitution d'une observation réalisée dans une classe de CP au mois de novembre. La situation est la suivante : le professeur a écrit au tableau une phrase. Les élèves doivent reconstituer cette phrase à partir d'un stock d'étiquettes-mots. Ils vont donc devoir sélectionner parmi l'ensemble de leurs étiquettes celles qui correspondent à des mots apparaissant dans la phrase modèle. Chaque élève dispose de son ensemble d'étiquettes stockées dans une boîte posée sur sa table.

Ce qui nous intéresse ici est la stratégie mise en œuvre par les élèves pour choisir les étiquettes qui conviennent. La phrase et le stock présentés ici ne correspondent pas à ce qui a été observé. Par contre, les gestes décrits ici sont ceux qui ont été observés en situation.



Figure 6 : Situation de la phrase (reconstitution) - stock d'étiquettes-mots et phrase modèle

Nous observons un élève qui, chaque fois qu'il saisit une étiquette, réussit à la comparer au mot de la phrase qu'il cherche et qui pour autant ne réussit pas à reproduire la phrase dans le temps donné par le maître (20 minutes).

Décrivons comment notre sujet procède. Le sujet saisit une étiquette dans le stock (étiquette-mot « Papa » dans notre exemple), compare le mot de cette étiquette avec le mot de la phrase qu'il cherche (mot « Je » ici). Les deux mots n'étant pas les mêmes, il repose l'étiquette qu'il tenait dans sa main dans sa boîte.



Figure 7 : Situation de la phrase (reconstitution) - traitement d'un élément

Ce sujet se retrouve ainsi à saisir les mêmes étiquettes à de nombreuses reprises, ce qui l'empêche de réaliser la tâche dans le temps imparti.

Formellement, pour trouver chaque mot de la phrase modèle, le sujet doit produire une partition de sa collection d'étiquettes en deux sous-ensembles, dont l'un est réduit à un seul élément, la seule étiquette du stock conforme au modèle. Comme chaque mot n'est présent que sur une seule étiquette, la partition est fabriquée dès lors que l'élément cherché a été trouvé. Il s'agit ici d'un tri dans lequel le critère est « le mot sur l'étiquette est-il conforme au mot modèle ? ».

Pour trouver un mot de phrase, la série d'actions réalisées par le sujet peut être décrite selon le même modèle que celui présenté pour les deux situations présentées précédemment.

Ici, la première collection est la collection des étiquettes-mots et la seconde collection est la collection des réponses produites dans la comparaison avec le mot de la phrase considérée. Le traitement consiste à comparer une étiquette-mot à un mot de la phrase. L'étiquette-mot est trouvée dès qu'une réponse positive à une des comparaisons est donnée.

Quand le sujet repose dans la boîte les étiquettes qu'il a déjà examinées, il peut se trouver dans la situation de réexaminer plusieurs fois les mêmes étiquettes, sans jamais saisir l'étiquette cherchée. Dans la figure suivante, les étiquettes sont représentées par des ronds, les saisies d'étiquettes et leur comparaison au modèle sont représentées par les traits issus de ces ronds et les rectangles sur lesquels pointent ces traits représentent le résultat de la comparaison.

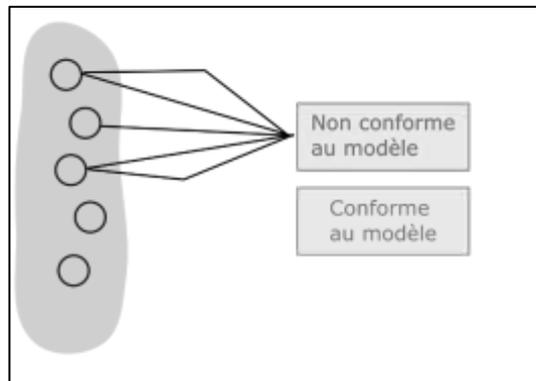


Figure 8 Situation de la phrase (reconstitution) - modélisation de la suite des actions du sujet

Décrivons maintenant la situation en terme d'ordre de multiplicité des traitements élémentaires (saisie et comparaison d'une étiquette au modèle). Certains éléments de la première collection ont un ordre de multiplicité supérieur à 1. La condition C2 de l'énumération n'est pas vérifiée. Si le sujet avait mis de côté les étiquettes qu'il avait saisies et qui n'étaient pas conformes au modèle, il se serait dispensé de traitements élémentaires qu'il avait déjà réalisés.

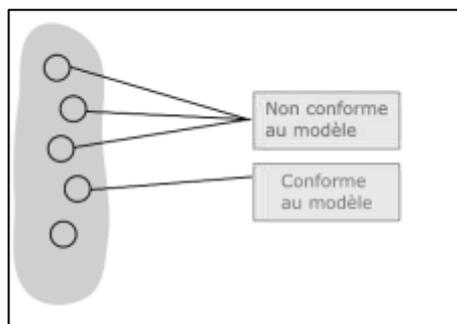


Figure 9: Situation de la phrase (reconstitution) - modélisation d'une suite d'actions optimales

Dans cette suite d'actions, la recherche de l'étiquette conforme au modèle s'interrompt dès le quatrième essai. Chaque étiquette saisie l'a été au plus une fois. Certaines des étiquettes n'ont pas été saisies et comparées au modèle car le mot avait été préalablement trouvé.

Dans ce cas, aucun des éléments de la collection des étiquettes n'a un ordre de multiplicité supérieur à 1. La condition C2 de l'énumération est ici réalisée.

Pour trouver l'étiquette cherchée, le sujet est conduit à réaliser un tri dans lequel il peut mettre en œuvre la condition C2 de l'énumération.

2. Retour sur la situation des allumettes

Revenons maintenant à la situation des allumettes et aux données produites par Briand (2004). Nous disposons de vidéos des deux essais d'un même élève de MS, Romain.

Commençons par nous intéresser au premier de ces deux essais, essai au cours duquel il échoue.

00 :07,13		<p><i>Il pose sur la table la boîte qu'il tenait dans la main gauche pendant qu'il saisit une nouvelle boîte avec sa main droite.</i></p>
00 :08,00		<p><i>Il porte à son oreille droite la boîte qu'il tient dans sa main droite et la secoue.</i></p>
00 :08,21		<p><i>Alors que la boîte qu'il tient dans sa main droite est toujours à côté de son oreille droite, il saisit avec sa main gauche une nouvelle boîte.</i></p>

Figure 10 : Situation des allumettes - extraits du premier essai de Romain

Comme l'élève de CP observé dans la situation de reproduction de la phrase, Romain saisit plusieurs fois les mêmes éléments (des boîtes d'allumettes ici). Il secoue pour vérifier que celles-ci sont vides. Quand le secouage ne produit pas de bruit, il insère une allumette. Dans tous les cas, il repose la boîte d'allumettes sur la table, à un endroit indifférencié.

*« Romain ne construit pas deux ensembles qui permettraient de séparer les éléments traités des éléments non encore traités. Sa difficulté tient à l'absence de mise en œuvre d'un tri. »
(Rivière, 2017, page 341)*

Outre le fait que l'organisation mise en œuvre ne lui permet pas de réussir, celle-ci ne minimise pas le nombre de saisies de boîtes. Si le traitement considéré est la saisie d'une boîte, la condition C2 de l'énumération n'est pas vérifiée.

Examinons maintenant comment Romain fait évoluer sa stratégie pour son second essai.

00:26,12		<i>Il a maintenant une allumette dans sa main droite. Il attrape avec sa main gauche une boîte.</i>
00:27,03		<i>Il met avec sa main droite l'allumette dans l'orifice latéral de la boîte qu'il tient dans sa main gauche.</i>
[...]		[...]
00:32,23		<i>Il pose la boîte qu'il tenait dans sa main gauche juste à côté des boîtes qu'il avait posées les unes à côté des autres.</i>

Figure 11 : Situation des allumettes - extraits du second essai de Romain

Le sujet a décidé de placer près de lui les boîtes dans lesquelles il a mis une allumette. D'autres boîtes restent au centre de la table. Il a donc de fait structuré sa collection de boîtes d'allumettes en deux sous-ensembles disjoints : les boîtes qu'il a déjà traitées et les boîtes qu'il n'a pas encore traitées ».



Photo 1 : Situation des allumettes - agrandissement de la photo 1; zoom sur l'organisation mise en œuvre – essai 2

Si le traitement considéré est la saisie d'une boîte, Romain met en œuvre une stratégie qui, à partir d'un certain moment, respecte la condition C2 de l'énumération. Par ailleurs, comme cet essai est gagnant, la condition C1 est elle aussi respectée..

3. Stratégies de tri

Nous allons maintenant exhiber les modalités de tri que nous avons produites dans notre thèse. Pour cela, nous nous appuyons sur la situation des jetons marqués. Disposant d'une collection de jetons dont certains ont une gommette collée sur une des faces, il s'agit de trier les jetons marqués. Formellement, il s'agit de construire une partition de la collection en deux sous-ensembles, les jetons qui ont une gommette et ceux qui n'en n'ont pas.

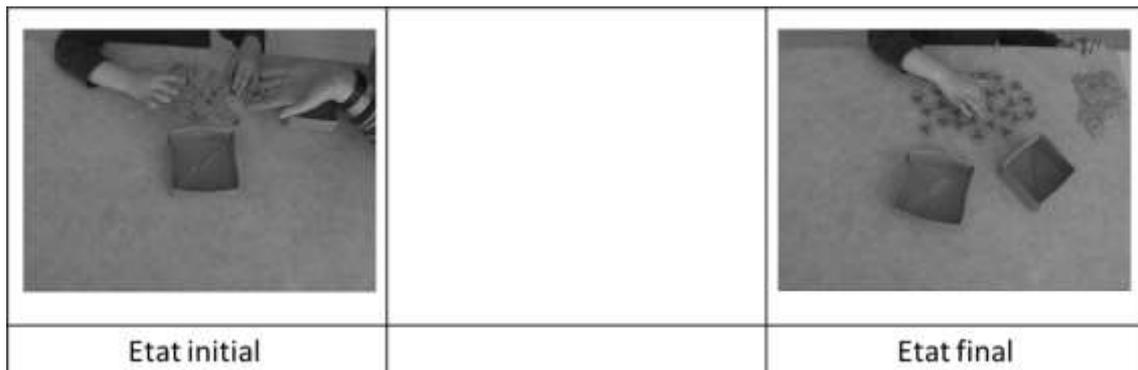


Figure 12: Situation des jetons marqués - description en termes d'états

L'étude des données (Riviere, 2017) a permis d'exhiber plusieurs stratégies mises en œuvre par les sujets :

- La stratégie de tri systématique : cette stratégie consiste à saisir et examiner un à un chacun des jetons marqués et à les placer dans un des deux tas constitués : le tas des jetons marqués et le tas des jetons non marqués.

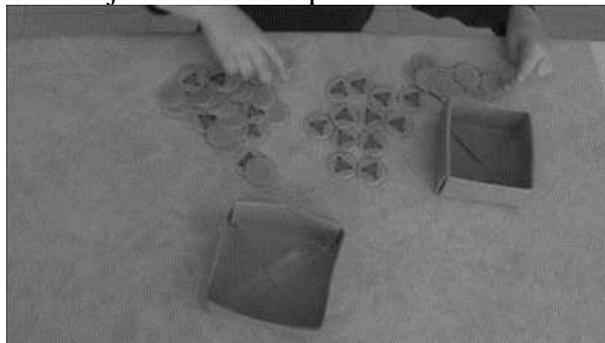


Figure 13 : Situation des jetons marqués - sujet 1 PS:

- La stratégie de tri par extraction : cette stratégie consiste à extraire du tas de jetons placés devant le sujet ceux qui ont une gommette sur la face visible (et donc à laisser là où ils se trouvent les jetons sans gommette sur la face visible). Le tas des jetons marqués est ainsi constitué et il se remplit par des extractions successives du tas principal. Dans cette situation, cette stratégie est rarement gagnante.



Figure 14 : Situation des jetons marqués - sujet 3 (PS)

Dans le cadre de la mise en œuvre d'un tri systématique, chaque jeton est saisi et examiné une fois et une seule. L'ordre de multiplicité de chaque élément de l'ensemble est 1. Les conditions C1 et C2 sont alors toutes les deux respectées.

Dans le cadre de la mise en œuvre d'un tri par extraction, nous avons montré que certains jetons pouvaient être examinés plusieurs fois : une fois que tous les jetons qui avaient une gommette sur la face visible du jeton, le sujet est conduit à saisir les jetons qui restent, examiner la face non visible et reposer le jeton dans le tas dans lequel il a été saisi s'il est sans gommette. Ce sont ces jetons que le sujet est susceptible de saisir plusieurs fois). Dans ce cas, la condition C2 n'est pas vérifiée. Par ailleurs, le sujet peut être conduit à ne pas extraire de ce tas tous les jetons ayant une gommette (puisqu'il ne sait pas quels sont dans ce cas les jetons qu'il a déjà examinés et ceux qu'il n'a pas encore examinés). Dans ce cas, la condition C1 peut donc ne pas être vérifiée.

4. Nouvelle définition de l'énumération

Au-delà du fait qu'une action matérielle doit être réalisée (dans la situation des boîtes d'allumettes ou des sucres, les difficultés rencontrées et les stratégies mises en œuvre dans chacune des situations que nous venons d'évoquer se ressemblent. Certains éléments sont traités plusieurs fois alors que d'autres ne sont pas traités.

La volonté d'unifier la description de ces difficultés fait émerger la nécessité d'une nouvelle définition de l'énumération, qui permette d'unifier conceptuellement des situations proches.

Pour réussir, dans la situation des sucres ou dans la situation des allumettes, le sujet doit réaliser simultanément les deux conditions de l'énumération pour chaque élément. Nous dirons dans ces cas que l'énumération réalisée est forte.

Dans les situations de tri, nous ne sommes pas la plupart du temps dans la mise en œuvre d'énumération forte. Nous avons observé qu'en réalisant des extractions successives, des sujets finissent par examiner et éventuellement traiter tous les éléments de la collection. Ils n'ont alors oublié aucun des éléments de celle-ci. La condition C1 de l'énumération est vérifiée. Pour autant, certains éléments sont pu être saisis et traités plus d'une fois (un jeton sans gommette reposé dans le tas de départ). La condition C2 de l'énumération n'est alors pas vérifiée. Nous sommes dans une forme affaiblie d'énumération. Nous dirons qu'une énumération faible a été réalisée.

Nous introduisons donc des variations dans la notion d'énumération en dissociant la réalisation effective de chacune des conditions de l'énumération.

Revenons sur la notion d'énumération faible. Nous la définissons comme réalisation d'une seule des deux conditions de l'énumération.

Dans l'exemple que vous avons choisi pour illustrer cette forme d'énumération, seule la condition C1 était vérifiée. Considérant un traitement, l'ordre de multiplicité par rapport à ce traitement de certains éléments pouvait donc être supérieur à 1. Nous choisissons de qualifier cette énumération de faible +.

De la même manière, des énumérations faibles pourraient être réalisées en ne vérifiant que C2. Du point de vue d'un traitement, l'ordre de multiplicité des éléments serait alors au plus égal à 1. Nous choisissons de qualifier cette énumération de faible -.

5. Analyse des situations en appui sur cette nouvelle définition

La nouvelle définition de l'énumération nous permet de porter un nouveau regard sur les situations sur lesquelles nous nous sommes appuyés.

Dans le jeu des sucres, pour gagner, le sujet doit mettre en œuvre une énumération forte de la collection des points. Dans ce jeu, le soulèvement du chapeau et le ramassage du sucre sont des gestes qui, en matérialisant le traitement d'un point, peuvent être considérés de manière solidaire. En effet, le ramassage d'un sucre est nécessairement accompagné d'un soulèvement de chapeau. et tout soulèvement de chapeau sans ramassage de sucre interrompt la partie.

Quand un sujet gagne la partie, il a énuméré fortement la collection de points, la collection de chapeau ou la collection de sucres.

Dans le jeu des allumettes, pour gagner, le sujet doit mettre en œuvre une énumération forte de la collection des boîtes. Cette énumération forte porte ici sur l'insertion d'une allumette. Le traitement élémentaire considéré (l'insertion d'une allumette dans la boîte) est toujours accompagné de la saisie d'une boîte (dans le cas déplaçable). Par contre, la réciproque est fautive. Briand montre que, dans son second essai, Romain saisit parfois des boîtes sans pour autant insérer d'allumettes dans celles-ci. Les deux gestes (saisie d'une boîte et insertion d'une allumette) ne peuvent pas être considérés de manière solidaire.

Lors de son second essai, Romain réalise une énumération forte si le traitement considéré est l'insertion d'une allumette dans une boîte ; il réalise une énumération faible + si le traitement considéré est la saisie d'une boîte. C'est ce Briand décrit dans l'étude du secouage.

Les situations de tri ne sont pas des situations d'énumération. Pour autant les sujets mettent en œuvre des énumérations fortes ou faibles pour trier les éléments d'une collection. Ces situations de tri permettent le traitement d'un élément sans sa saisie. En effet, quand un jeton a une gommette apparente sur sa face visible, il n'est pas nécessaire de l'examiner pour savoir qu'il est marqué. Il n'est donc pas toujours possible pour l'observateur de se prononcer sur la réalisation de la condition C1.

La réalisation d'une action matérielle sur chaque élément de la collection est donc la garantie de l'observabilité de l'énumération effective.

V. CONCLUSION

A ce stade de notre travail, nous disposons d'une définition de l'énumération qui permet de rendre compte des difficultés et des stratégies mises en œuvre par les sujets dans des situations beaucoup plus variées et nombreuses que les seules situations d'énumération forte, objet initial de notre étude.

Des connaissances d'énumération faible sont en jeu dans de nombreuses situations. Ces situations ne relèvent pas toutes de contexte mathématique. Nous en avons exhibé quelques-unes dans ce texte.

Le travail d'indentification de situations d'énumération faible – reste à conduire.

Les variations que nous avons introduites en étendant la définition de l'énumération nous permettent de mieux comprendre la continuité des connaissances d'énumération.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(2/3), 309–336.
- BRIAND, J. (1993). L'énumération dans le mesurage des collections. *Université de Bordeaux I, Didactique des mathématiques, Bordeaux*.
- BRIAND, J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 41-76.
- BRIAND, J., LOUBET, M., & SALIN, M.-H. (2004). Apprentissages mathématiques en maternelle. *Paris: Hatier*.
- BROUSSEAU, G. (1984). L'enseignement de l'énumération. Congrès C.I.A.E.M., Adélaïde.
- BROUSSEAU, G. (1997). La théorie des situations didactiques. *Cours donné lors de l'attribution du titre de docteur honoris causa de l'Université de Montréal*
- RIVIERE, O. (2017). Continuité des connaissances d'énumération et conséquences sur les savoirs : mieux comprendre les difficultés des élèves confrontés à des problèmes d'énumération (*Thèses, Université Clermont Auvergne*). Consulté à l'adresse <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01754817>