



Dynamique de l'instabilité de Couette-Taylor en cylindres de longueur finie

Paul Manneville, Olivier Czarny

► To cite this version:

Paul Manneville, Olivier Czarny. Dynamique de l'instabilité de Couette-Taylor en cylindres de longueur finie. 17e Congrès Français de Mécanique, 2005, Troyes, France. pp.1-6. <hal-04216351>

HAL Id: hal-04216351

<https://hal.science/hal-04216351v1>

Submitted on 24 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Dynamique de l'instabilité de Couette–Taylor en cylindres de longueur finie

Paul Manneville¹ & Olivier Czarny²

¹ Laboratoire d'Hydrodynamique, École Polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex.

² LMSNM-GP, CNRS - Universités d'Aix-Marseille, Techn. de Château-Gombert, F13451 Marseille cedex 20
(Présente adresse : Association Euratom-CEA, DRFC, CEA Cadarache, F-13108 St Paul Lez Durance Cedex).
contacts : paul.manneville@ladhyx.polytechnique.fr, oczarny@drfccad.cea.fr

Résumé :

L'étude numérique détaillée des transitoires de l'instabilité de Couette–Taylor à la montée et à la descente fonction de la longueur des cylindres montre différents comportements d'échelle dont l'interprétation ne cadre pas avec la théorie de Landau naïve d'une bifurcation supercritique imparfaite.

Abstract :

The detailed numerical study of onset and decay transients of the Couette–Taylor instability as a function of the length of the cylinders shows different scaling behaviors that do not fit the naive Landau theory at an imperfect supercritical bifurcation.

Mots-clefs :

instabilité de Couette–Taylor ; théorie des bifurcations ; bifurcation imparfaite

1 Contexte

La théorie de Landau au voisinage du seuil d'une bifurcation supercritique ne pose *a priori* pas de problème dans le cas simple d'une instabilité cellulaire (mode normal stationnaire de vecteur d'onde critique non nul). La convection de Rayleigh–Bénard d'une couche fluide au repos chauffée par le bas ou l'instabilité de Couette–Taylor de l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux en rotation différentielle, en sont de bons exemples à condition de se limiter à la considération de solutions uniformes en milieu infini, idéalement périodiques et de longueur d'onde donnée à l'avance. Les choses se compliquent dès que l'on sort de ce cadre, en particulier dès que les effets de bord induisent des modulations, ce qui est toujours le cas quand l'extension latérale du système autorise un nombre de cellules élémentaires qui dépasse quelque unités. Ces problèmes ont été bien compris dans les années 1980, en particulier grâce au développement explicite des formalismes d'enveloppe (cf. [1, chap. 8 à 10]). On aurait pu penser que les choses en resteraient là mais une étude récente relative à l'instabilité de Couette–Taylor montre que cela n'est pas tout à fait le cas [2].

La difficulté principale vient de ce que, dans la réalisation concrète d'une expérience de Couette, l'entrefer des cylindres est généralement fermé à ses extrémités par des disques fixés au cylindre intérieur ou au cylindre extérieur, disques dont la présence déforme le profil de l'écoulement de base. Le pompage d'Ekman induit par ces disques génère des perturbations qui rendent la bifurcation *imparfaite*. Ces perturbations sont *a priori* d'ordre r^0 si $r = (R - R_c)/R_c$ est le paramètre de contrôle réduit, R le nombre de Reynolds de l'écoulement et R_c la valeur critique correspondant au seuil d'instabilité en milieu infini. L'origine de la difficulté tient à ce que, bien que “grandes” ces perturbations sont localisées dans le voisinage immédiat des disques, de sorte que leur effet global reste “petit” si le système est assez long. Ceci n'est vrai

qu'en ce qui concerne le mode primaire "normal" qui dérive par continuité de l'état de base car d'autres difficultés sont liées à la présence de cellules dites "anormales" appartenant à des branches bifurquées déconnectées de la branche principale. Une ré-analyse des conséquences de ces difficultés sur le régime stationnaire a été développée récemment par Rucklidge et Champneys [3]. Les expériences d'Abshagen et coll. [2] concernent au contraire le régime transitoire qui voit la solution converger vers les états stationnaires de la branche *normale*.

Lorsque seul le cylindre intérieur tourne, le paramètre de contrôle naturel est le nombre de Reynolds $R = \omega_i r_i d / \nu$, où ω_i est le taux de rotation du cylindre intérieur de rayon r_i , d l'entrefer, ν la viscosité cinématique du fluide. La valeur critique R_c correspond au seuil de la bifurcation parfaite correspondante, valeur qui ne dépend alors que du rapport des rayons $\eta = r_i / (r_i + d)$. Les résultats expérimentaux et numériques pour $\eta = 0.5$ rapportés dans [2] ont été analysés dans le cadre d'une théorie de Landau pour une amplitude A gouvernée par :

$$\tau_0 \frac{d}{dt} A = rA - A^3 / A_0^2, \quad (1)$$

où r est le paramètre de contrôle réduit défini plus haut, τ_0 et A_0 des facteurs fixant les échelles de temps et d'amplitude. Comme on le sait, les changements d'échelle $t \mapsto |r|^{-1} \tau_0 \tilde{t}$, $A \mapsto |r|^{1/2} A_0 \tilde{A}$ mettent (1) sous forme universelle. La vitesse radiale à mi-gap et à mi-longueur des cylindres, notée plus loin V_m , a été jugée représentative de l'amplitude A et des temps caractéristiques ont été tirés de l'enregistrement de son évolution fonction du temps par ajustement sur la solution théorique du problème aux valeurs initiales issu de (1). Ces temps caractéristiques ont été déterminés pour différentes valeurs de r à la "montée" et à la "descente," c'est-à-dire lorsque, partant d'une solution stabilisée pour $R_i < R_c$, on impose brutalement $R_f > R_c$ dans le cas de la montée, intervertissant R_i et R_f dans le cas de la descente. Il découle de la mise sous forme universelle de (1) que ces temps caractéristiques devraient être identiques dès lors que les valeurs de R_i et de R_f sont disposées symétriquement par rapport à R_c . Les expériences ont montré que cela n'était le cas que si l'on adoptait des conditions aux limites fictives sur les disques d'extrémité autorisant le glissement, de manière à préserver le caractère "parfait" de la bifurcation décrite par (1). Restant dans le cadre strict de la théorie de Landau, il aurait donc fallu ajuster l'évolution des transitoires sur la solution du problème modifié :

$$\tau_0 \frac{d}{dt} A = rA - A^3 / A_0^2 + H, \quad (2)$$

introduisant un paramètre supplémentaire H mesurant l'imperfection introduite par le processus d'induction au bord. L'universalité de la description ne se retrouve alors qu'au prix d'une mise à l'échelle supplémentaire $H \mapsto A_0 |r|^{3/2} \tilde{H}$, ce qui complique l'ajustement mais ne peut toujours pas rendre compte de l'effet observé le plus remarquable, celui de la dépendance des temps caractéristiques en $\Gamma = 2h/d$, $2h$ mesurant la longueur des cylindres.

La figure 4 de [2] et le travail rapporté dans [3] conduisent à penser que les observations expérimentales et notamment l'allongement des temps caractéristiques observés, résultent du fait que la théorie de Landau *stricto sensu*, sous-jacente à (1,2), n'est pas applicable car elle repose sur un découplage des dépendances spatiale et temporelle de la solution physique $v(\mathbf{x}, t) = A(t) \hat{v}(\mathbf{x})$ qui n'est pas valide, la partie spatiale de l'expression fonctionnelle de la solution ne cessant d'évoluer tout au long du transitoire. Nous avons donc focalisé notre attention sur les aspects quantitatifs de cette évolution :

- Dès que Γ est suffisamment grand, pour la montée, on assiste tout d'abord à la propagation d'un front avançant des extrémités vers l'intérieur. Lorsque les fronts se sont rejoints au centre, l'amplitude s'uniformise sur toute la longueur du système et l'on observe une évolution de la longueur d'onde à amplitude quasi-constante selon une loi diffusive [1].

• Le transitoire de descente ne comporte à première vue qu’une seule phase correspondant à un effondrement sur place de l’amplitude. On aurait pu s’attendre à ce que cet effondrement soit indépendant de la longueur du système mais une étude fine montre que la relaxation finale de la solution est caractérisée par un temps convergeant vers la valeur attendue en milieu infini selon une loi en Γ_{eff}^{-2} où $\Gamma_{\text{eff}} = \Gamma - \delta\Gamma$, $\delta\Gamma$ rendant compte de la présence des tourbillons d’Ekman qui forcent l’écoulement de base aux extrémités du dispositif.

2 Outils utilisés

Disposant d’une implémentation numérique satisfaisante des équations de Navier–Stokes en géométrie de Couette, nous avons préféré analyser la dynamique transitoire de l’instabilité de Taylor quantitativement sur cette base plutôt que semi-quantitativement en utilisant un modèle phénoménologique présentant des caractéristiques analogues comme dans [3]. L’approche numérique tire en effet profit d’un important travail antérieur de simulation effectué à Marseille. L’écoulement près du seuil restant axisymétrique, c’est une version bidimensionnelle en r et z du code utilisé dans [4] qui a été mise en œuvre. À la différence des études menées dans [2] où un paramètre d’homotopie permettait d’interpoler entre les cas avec et sans glissement, nous sommes limités au cas réaliste de conditions de non-glissement aux disques d’extrémité, supposés fixes. La méthode numérique repose sur une approximation des champs hydrodynamiques représentés par des séries tronquées de la forme $\sum_{n=0}^{N_r-1} \sum_{m=0}^{N_z-1} \Psi_{nm}(t) T_n(r^*) T_m(z^*)$, où les T_n, T_m sont les polynômes de Chebyshev fonction des coordonnées réduites $r^* \in [-1, 1]$ et $z^* \in [-1, 1]$, Ψ_{nm} les amplitudes correspondantes ($\Psi_{nm}(t) \propto A(t)$ de sorte qu’espace et temps sont effectivement découplés) et où N_r et N_z définissent le raffinement d’une grille de Gauss–Lobatto. Fixant $N_r = 31$, pour les différentes valeurs de Γ considérées, nous avons choisi les valeurs de N_z données dans le tableau suivant

Γ	8	12	16	24	32	40
N_z	151	181	201	251	301	351

Dans le cadre d’une méthode pseudo-spectrale, le schéma temporel est semi-implicite du second ordre en temps, le terme de dérivation temporelle est évalué par un schéma d’Euler implicite, les termes non-linéaires par un schéma d’Adams–Bashforth explicite et les termes visqueux par une formule implicite. Le couplage vitesse-pression est traité par un schéma de projection-correction.

Nous avons travaillé principalement avec les profils de solution à mi-gap, $V(z, t) \equiv v_r(r = r_i + d/2, z, t) = v_r(r^* = 0, z^*, t)$ mais aussi avec l’enveloppe de ce profil extraite par transformée de Hilbert (procédure `hilbert.m` sous MATLAB). Nous avons également suivi la vitesse au milieu de l’écoulement $V_m(t) = |V(0, t)|$, ainsi que la position z_j des nœuds successifs de la vitesse radiale à mi-gap pour mettre en évidence l’absence de découplage entre l’espace et le temps. Lorsque t tend vers l’infini, l’une quelconque de ces observables, notée b tend vers une limite b_∞ de sorte nous pouvons écrire $b(t) = b_\infty + \delta b(t)$. Pour nous affranchir de la constante b_∞ nous avons systématiquement considéré la dérivée $\frac{d}{dt}b$ et étudié plus particulièrement le taux instantané d’évolution donné par la dérivée logarithmique $\frac{d}{dt}(\ln b) = b^{-1} \frac{d}{dt}b$ en fonction de t . Dans ce contexte, une relaxation asymptotiquement exponentielle se traduit par des taux instantanés qui tendent vers des constantes. Si, comme nous l’escomptons, la relaxation est bien gouvernée par un processus global, l’ensemble de ces taux doit se réduire à une seule valeur, quelle que soit la grandeur considérée.

3 Résultats

Comportement à la montée. Comme il ressort déjà de la figure 4 de [2], en première approximation le transitoire de montée s'interprète comme résultant de la propagation de la solution bifurquée induite par le forçage d'Ekman aux extrémités de la cellule vers l'intérieur où, si celle-ci est assez longue, l'écoulement est encore dans l'état de base [5]. Ce phénomène est illustré sur la figure 1(a) pour $\Gamma = 40$ en portant le logarithme de l'enveloppe de la solution en fonction de z . Pour $t \sim 500$ on peut considérer que les fronts issus des extrémités se sont rejoins au centre. La vitesse d'avancée ne dépend *a priori* que de la distance au seuil mais le temps nécessaire pour atteindre la vitesse de croisière est long de sorte que, pour les tailles qui nous intéressent ici, il n'est pas facile de mettre en évidence le scaling en Γ qui gouverne ce processus. Puis l'amplitude s'uniformise, cf. figure 1(b), après quoi l'évolution se fait à amplitude sensiblement constante, cf. figure 1(c). Cette dernière étape est marquée par une dérive de la position des zéros de la vitesse radiale à mi-gap à un taux qui, asymptotiquement ne dépend pas du zéro considéré, cf. figure 1(d). Ce phénomène est caractéristique d'une *dynamique de phase* diffusive [1]. De la dérive des zéros en fonction du temps on trouve ici $\tau_{\text{diff}} \approx 1032$ par la méthode illustrée plus loin sur la figure 2(a).

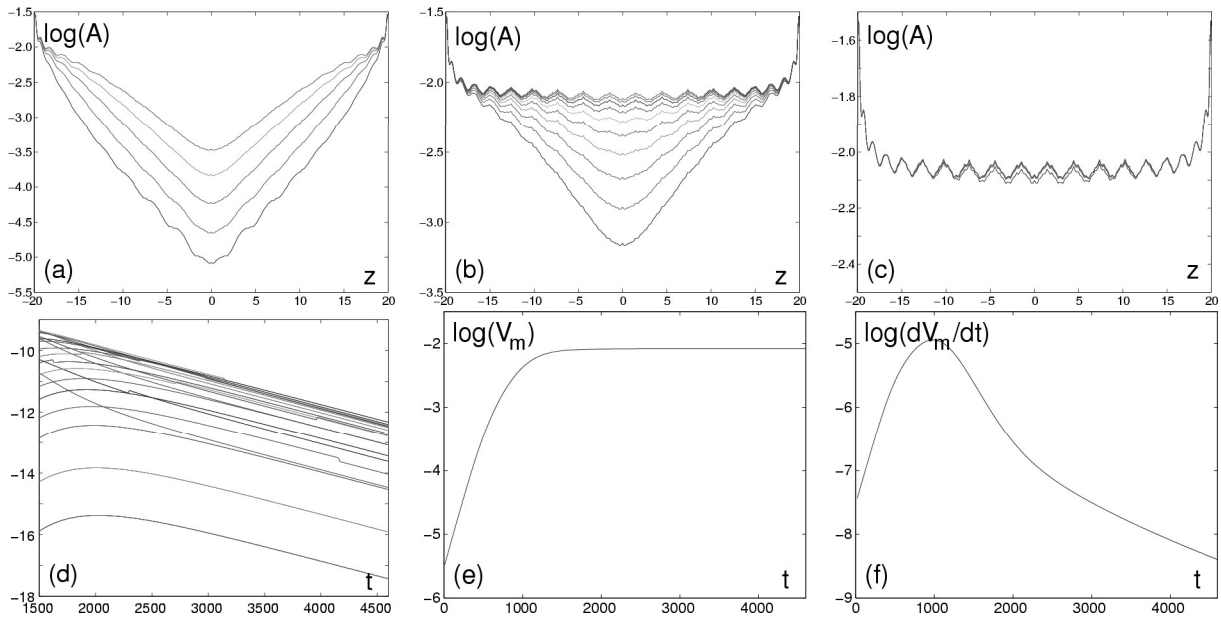


FIG. 1 – Montée de $R_i = 67.2$ à $R_f = 68.7$ pour $\Gamma = 40$ partant d'une solution stationnaire à $R = R_i$. (a,b,c) Évolution de l'enveloppe. (a) $t = 100$ à 500, $\Delta t = 100$. (b) $t = 600$ à 1500, $\Delta t = 100$. (c) $t = 1600$ à 4600, $\Delta t = 500$. (d) Relaxation des zéros de V aux temps long tiré de la dérivée de leur position fonction du temps en échelle semi-logarithmique. (e,f) L'amplitude au centre et sa dérivée fonction du temps.

Par raison de symétrie, la valeur de V_m est un bon indicateur de l'amplitude au centre de la cellule. Comme on le voit sur la figure 1(e), celle-ci croît exponentiellement (temps caractéristique $\tau_i \approx 100$) puis sature. L'observation de la dérivée de V_m par rapport au temps, cf. figure 1(f), permet d'identifier les différentes étapes ultérieures de son évolution. Après être passé par un maximum pour $t \sim 945$ (point d'inflexion pour V_m), celle-ci décroît d'abord rapidement puis plus lentement. Le temps caractéristique déduit du taux local d'évolution passe

par un minimum $\tau_{\text{int}} \approx 200$ en $t \approx 1500$ puis ré-augmente pour atteindre $\tau_f \approx 1000$ en accord raisonnable avec la détermination directe déduite de la dérive de la position des zéros. Passé le point d'inflexion, l'étape initiale de décroissance rapide est conforme à ce que l'on attend de la théorie de Landau naïve car à une croissance exponentielle initiale de taux r/τ_0 correspond une relaxation vers le point fixe attracteur à un taux $2r/\tau_0$. Le ralentissement observé se manifeste alors que l'enveloppe a pratiquement atteint sa forme définitive pour $t \sim 1500$, ce qui correspond bien au passage vers un régime où l'évolution est commandée par la phase de la solution. L'amplitude reste alors esclave de cette dernière, ce que confirme la valeur trouvée pour τ_f . Le fait que la solution ne cesse d'évoluer et que la valeur de l'amplitude au centre mesurée par V_m n'est pas un bon traceur de la dynamique globale explique que τ_{int} ne soit pas égal à $\tau_i/2$ comme le voudrait la théorie naïve.

La même analyse a été pratiquée pour les autres valeurs de Γ considérées. La figure 2(a) montre comment ont été extraits les temps caractéristiques partant de la dérive des zéros de V , plus précisément de la pente des courbes portant la dérivée de leur position en fonction du temps en coordonnées semi-logarithmiques. La figure 2(b) qui présente les temps caractéristiques de la relaxation terminale mis à l'échelle par le carré de Γ , pour Γ variant de 8 à 40, supporte notre interprétation de la relaxation terminale en termes d'un processus de diffusion de phase sur un mode de longueur d'onde la plus grande possible dans le système, et donc à un temps caractéristique variant en Γ^2 . Le rapport $\tau_{\text{diff}}/\Gamma^2$ varie rapidement jusque vers $\Gamma \sim 20$, valeur au delà de laquelle il semble rester sensiblement constant, ce qui montre que le comportement qui vient d'être décrit ne vaut que pour $\Gamma \geq 16$, conformément à l'analyse au cas par cas des évolutions observées qualitativement.

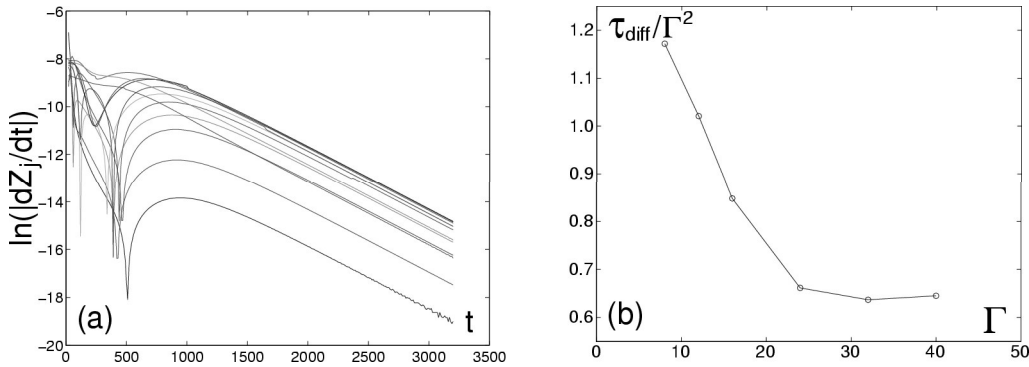


FIG. 2 – (a) Exemple de détermination du temps de relaxation τ_{diff} en phase diffusive pour $\Gamma = 24$, ici $\tau_{\text{diff}} \approx 381$. (b) Temps de relaxation normalisé $\tau_{\text{diff}}/\Gamma^2$ fonction de $\Gamma = 8$ à 40.

Comportement à la descente. Nous n'illustrons ici la descente que pour $\Gamma = 40$, le comportement pour les autres valeurs considérées étant à première vue similaire. L'équidistance des courbes en coordonnées semi-logarithmiques sur la figure 3(a) semble montrer que le transitoire consiste essentiellement en une relaxation exponentielle sur place de l'enveloppe de la solution, ce que confirmerait le comportement de $\ln(|V_m|)$ pour les différentes valeurs de Γ considérées. Lorsque t augmente, les $|V_m|$ convergent cependant vers des valeurs finies mais petites, reliquats au centre de l'effet d'induction par le pompage d'Ekman au bord. L'étude de la dérivée par rapport au temps de V_m sur la figure 3(b) montre un effet de taille supplémentaire inattendu. En effet, si le temps initial de décroissance apparaît bien indépendant de Γ aux temps courts,

le système finit par “sentir” la présence des extrémités. Asymptotiquement, le taux de relaxation $1/\tau$ rejoint alors sa valeur limite pour $\Gamma \rightarrow \infty$ par une loi en $1/\tau \sim \Gamma_{\text{eff}}^{-2}$, dans laquelle $\Gamma_{\text{eff}} = \Gamma - \delta\Gamma$. La quantité Γ_{eff} se présente comme un facteur de forme effectif qui rend compte de la présence des tourbillons d’Ekman, tourbillons dont la largeur —sensiblement constante car ils sont peu modifiés par le mécanisme de l’instabilité de Taylor— vient réduire d’autant la longueur Γ du système. Ce comportement est bien illustré sur la figure 3(c) qui correspond à un ajustement empirique donnant $\delta\Gamma \approx 1.95$.

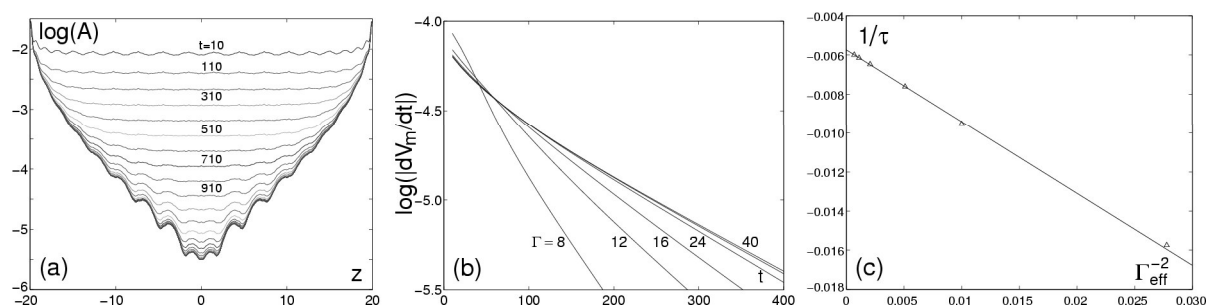


FIG. 3 – Descente de $R_i = 68.7$ à $R_f = 67.2$ pour $\Gamma = 40$. (a) Relaxation de l’amplitude de la solution fonction de la coordonnée axiale z à différents instants. (b) Variation de $|\frac{d}{dt}V_m|$ fonction du temps. (c) Valeur asymptotique du taux de relaxation de $|V_m|$ en fonction de Γ_{eff}^{-2} .

Conclusion. L’ensemble de ces résultats nous place dans une posture favorable en vue de l’interprétation théorique des expériences d’Abshagen *et al.* [2] et justifie pleinement notre intuition sur les limites d’une interprétation trop naïve de la théorie de Landau lorsque des perturbations locales *fortes* sont responsables de la *faible* imperfection d’une bifurcation supercritique, telle que celle induite par les tourbillons d’Ekman sur l’instabilité de Taylor de l’écoulement de Couette cylindrique.

Remerciements. Les simulations numériques ont été effectuées dans le cadre de l’allocation de temps de calcul #04242 accordée par l’IDRIS (Orsay) au laboratoire MSNM-GP, auquel appartenait le second auteur.

Références

- [1] P. Manneville. *Dissipative Structures and Weak Turbulence*. Academic Press, 1990.
- [2] J. Abshagen, O. Meincke, G. Pfister, K.A. Cliffe, and T. Mullin. Transient dynamics at the onset of Taylor vortices. *J. Fluid Mech.*, 476 :335–343, 2003.
- [3] A.M. Rucklidge and A.R. Champneys. Boundary effects and the onset of Taylor vortices. *Physica D*, 191 :282–296, 2004.
- [4] O. Czarny, E. Serre, P. Bontoux, and R.M. Lueptow. Interaction of wavy cylindrical Couette flow with walls. *Phys. Fluids*, 16 :1140–1148, 2004.
- [5] M. Niklas, M. Lücke, and H. Müller-Krumbhaar. Velocity of a propagating Taylor-vortex front. *Phys. Rev. A*, 40 :493–496, 1989.