



HAL
open science

Un modèle L.E.S. préservant le groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes

Dina Razafindralandy, Aziz Hamdouni

► **To cite this version:**

Dina Razafindralandy, Aziz Hamdouni. Un modèle L.E.S. préservant le groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes. 17e Congrès Français de Mécanique, 2005, Troyes, France. hal-04216340

HAL Id: hal-04216340

<https://hal.science/hal-04216340>

Submitted on 24 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un modèle L.E.S. préservant le groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes

Dina Razafindralandy & Aziz Hamdouni

Laboratoire d'Étude des Phénomènes de Transfert Appliqués au Bâtiment
Avenue Michel Crépeau 17042 La Rochelle Cedex 01
drazafin@univ-lr.fr

Résumé :

Dans le but de respecter les propriétés physiques de l'écoulement (lois d'échelle, lois de conservation, ...) lors de la simulation, on construit une classe de modèles de sous-maille conservant le groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes. On raffine ensuite cette classe de telle sorte que les modèles satisfassent le second principe de la thermodynamique et qu'ils soient capables de prendre en compte la cascade inverse d'énergie.

Un modèle simple de la classe est testé dans le cas d'un écoulement dans une chambre ventilée. Les premiers calculs donnent des résultats nettement meilleurs que ceux obtenus avec le modèle de Smagorinsky et le modèle dynamique.

Abstract :

In order to preserve physical properties of the flow (scaling laws, conservation laws, ...) during the simulation, a class of subgrid-scale models respecting the symmetry group of Navier-Stokes equations is built. The class is then refined such that models satisfy the second law of thermodynamics and are suited to take into account the inverse energy cascade.

A simple model belonging to the class is tested and better results than those provided by the Smagorinsky and dynamic models are obtained.

Mots-clefs :

turbulence, modèle de sous-maille, groupe de symétrie

1 Introduction

Les équations de Navier-Stokes admettent des transformations (sur les variables de temps, d'espace, de vitesse, et de pression) qui conservent les solutions. L'ensemble de ces transformations est dénommé groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes. Ce groupe joue un rôle important dans l'existence des lois de conservation (quantité de mouvement, énergie, ...) et des lois d'échelle.

La modélisation de la turbulence par approche L.E.S. consiste à filtrer les équations de Navier-Stokes et à modéliser les termes supplémentaires apparaissant lors du filtrage. Une modélisation consistante de ces termes devrait respecter le groupe de symétrie des équations d'origine, afin d'assurer la conservation des grandeurs physiques contenues dans ces dernières. Malheureusement, de nombreux modèles de sous-maille existant dans la littérature (Smagorinsky, ...) ne respectent pas ce groupe de symétrie, comme l'a montré Oberlack dans [1]. Par ailleurs, parmi les modèles courants, beaucoup ne satisfont pas le second principe de la thermodynamique car ils induisent une dissipation négative (modèle dynamique, ...). Un forçage *a posteriori* devient alors indispensable.

Dans cette communication, on propose une classe de modèles qui, à la fois, préservent le groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes et respectent naturellement le second prin-

cipe de la thermodynamique. Ce document sera organisé comme suit. Dans la section 2, on rappellera les symétries des équations de Navier-Stokes. On construira ensuite, dans la section 3, une classe de modèles respectant ce groupe de symétrie. Puis, on raffinera cette classe dans la section 4 de manière à ne retenir que les modèles qui satisfont le second principe de la thermodynamique et on conclura avec une simulation de l'écoulement dans une chambre ventilée.

2 Groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes

Considérons un fluide newtonien incompressible, de densité ρ et de viscosité cinématique ν . Le mouvement de ce fluide est régi par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \operatorname{div} \tau \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad (1)$$

où τ est le tenseur des contraintes visqueuses, qui peut être relié au tenseur des taux de déformation $S = (\nabla u + \nabla u^T)/2$ par

$$\tau = \frac{\partial \psi}{\partial S}$$

ψ étant un potentiel convexe positif défini par :

$$\psi = \nu \operatorname{tr} S^2.$$

Soit $y = (t, x, u, p)$. Appelons transformations à un paramètre les transformations de la forme :

$$T_a : y \mapsto \hat{y} = \hat{y}(y, a)$$

dépendant de manière C^∞ du paramètre a . On dit alors que T_a est une symétrie de (1) si elle transforme une solution de (1) en une autre solution.

Grâce à la théorie des groupes de Lie ([2]), on peut calculer toutes les symétries à un paramètre des équations de Navier-Stokes. Ces symétries sont :

– la translation temporelle :

$$(t, x, u, p) \mapsto (t + a, x, u, p), \quad (2)$$

a étant un paramètre,

– la translation de pression :

$$(t, x, u, p) \mapsto (t, x, u, p + \zeta(t)) \quad (3)$$

où ζ est une fonction arbitraire du temps,

– la rotation :

$$(t, x, u, p) \mapsto (t, Rx, Ru, p), \quad (4)$$

R étant une matrice (constante) de rotation,

– la transformation galiléenne généralisée :

$$(t, x, u, p) \mapsto (t, x + \alpha(t), u + \alpha'(t), p - \rho x \cdot \alpha''(t)) \quad (5)$$

où α est une fonction arbitraire,

– et le changement d'échelle :

$$(t, x, u, p) \mapsto (a^2 t, ax, a^{-1} u, a^{-2} p). \quad (6)$$

Ces symétries ont un rôle important dans la description des phénomènes physiques. Elles traduisent l'existence de lois de conservation via le théorème de Noether ([3]). Elles servent aussi à trouver des lois d'échelle ([4]) ou même des solutions exactes ([5]), ou encore à retrouver le spectre de Kolmogorov ([6]). Aussi, il est important que les modèles de turbulence (RANS ou LES) conservent ces symétries. Pourtant, beaucoup de modèles de sous-maille existant dans la littérature (voir [7]) ne respectent pas cette propriété, comme l'a montré Oberlack ([1]).

Dans la section suivante, on va alors construire une classe de modèles de sous-maille qui conservent toutes les symétries de (1) mentionnées précédemment.

3 Construction d'une classe de modèles invariants

Après filtrage, les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} = \operatorname{div}(\bar{\tau} + \tau_{sm}) \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

où

$$\tau_{sm} = -\overline{u \otimes u} + \bar{u} \otimes \bar{u}.$$

Il s'agit maintenant de modéliser τ_{sm} de manière à ce que chaque symétrie de (1) soit aussi une symétrie de (7). On dira que τ_{sm} est invariant par rapport à une symétrie T_a de (1) lorsque T_a est aussi une symétrie de (7).

On suppose que τ_{sm} est uniquement fonction de \bar{S} :

$$\tau_{sm} = \mathcal{F}(\bar{S}).$$

De cette manière, l'invariance de τ_{sm} par rapport aux transformations (2), (3) et (5) est assurée.

D'autre part, on montre que le théorème de Cayley-Hamilton et l'invariance par la rotation (4) impose à τ la forme suivante :

$$\tau_{sm}^d = A(\chi, \zeta) \bar{S} + B(\chi, \zeta) \operatorname{Adj}^d \bar{S}$$

où $\chi = \operatorname{tr} \bar{S}^2$ et $\zeta = \det \bar{S}$ sont les invariants fondamentaux de \bar{S} , Adj est l'opérateur adjugé défini par

$$(\operatorname{Adj} \bar{S}) \bar{S} = (\det \bar{S}) I_d$$

et M^d désigne le déviateur $M^d = M - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} M) I_d$ d'un endomorphisme M .

Enfin, pour que τ_{sm} soit invariant par le changement d'échelle (6), il faut que

$$\hat{\tau}_{sm} = a^{-2} \tau_{sm}.$$

Cette condition, réécrite pour A et B , devient :

$$A\left(\frac{1}{a^4} \chi, \frac{1}{a^6} \zeta\right) = A(\chi, \zeta), \quad B\left(\frac{1}{a^4} \chi, \frac{1}{a^6} \zeta\right) = a^2 B(\chi, \zeta).$$

En dérivant par rapport à a et en prenant $a = 1$, il suit :

$$-4\chi \frac{\partial A}{\partial \chi} - 6\zeta \frac{\partial A}{\partial \zeta} = 0, \quad -4\chi \frac{\partial B}{\partial \chi} - 6\zeta \frac{\partial B}{\partial \zeta} = 2B.$$

Pour satisfaire ces égalités, on peut prendre

$$A(\chi, \zeta) = A_1 \left(\frac{\zeta}{\chi^{3/2}} \right), \quad B(\chi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{\chi}} B_1 \left(\frac{\zeta}{\chi^{3/2}} \right).$$

Finalement, si on note $v = \frac{\zeta}{\chi^{3/2}}$ alors on obtient

$$\boxed{\tau_{sm}^d = A_1(v) \bar{S} + \frac{1}{\sqrt{\chi}} B_1(v) \text{Adj}^d \bar{S}.} \quad (8)$$

Un modèle de sous-maille de la forme (8) respecte donc nécessairement le groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes.

Revenons maintenant à des considérations plus spécifiques à la L.E.S. On sait que τ_{sm} représente l'échange d'énergie entre les échelles résolues et les échelles de sous-maille. Il engendre donc une certaine dissipation. Mais pour satisfaire le second principe de la thermodynamique, il faut s'assurer que la dissipation totale reste positive, ce qui n'est pas toujours vérifié par les modèles existant dans la littérature. En vue de satisfaire cette condition, on va raffiner la classe (8).

4 Conséquences du second principe de la thermodynamique

A l'échelle moléculaire, la contrainte visqueuse vaut :

$$\tau = \frac{\partial \psi}{\partial S}.$$

Le « potentiel » $\psi = \nu \text{tr} S^2$ est convexe et positif, ce qui assure que la dissipation est positive :

$$\Phi = \text{tr}(\tau S) \geq 0.$$

De son côté, τ_{sm} peut être considéré comme une contrainte de sous-maille induisant une dissipation

$$\Phi_{sm} = \text{tr}(\tau_{sm} \bar{S}).$$

Pour rester compatible avec les équations de Navier-Stokes, on va supposer qu'il a la même forme que τ :

$$\tau_{sm} = \frac{\partial \psi_{sm}}{\partial \bar{S}}. \quad (9)$$

où ψ_{sm} est un potentiel dépendant des invariants χ et ζ . Cette hypothèse va restreindre la classe (8) de la manière suivante.

Comme $\text{tr} \bar{S} = 0$, de (9), on déduit :

$$\tau_{sm}^d = 2 \frac{\partial \psi_{sm}}{\partial \chi} \bar{S} + \frac{\partial \psi_{sm}}{\partial \zeta} \text{Adj}^d \bar{S}.$$

En comparant à (8), on tire :

$$\frac{1}{2} A_1(v) = \frac{\partial \psi_{sm}}{\partial \chi}, \quad \frac{1}{\sqrt{\chi}} B_1(v) = \frac{\partial \psi_{sm}}{\partial \zeta}.$$

Cela entraîne que

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{2} A_1(v) \right) = \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{1}{\sqrt{\chi}} B_1(v) \right).$$

Si g est une primitive de B_1 , cette équation a pour solution :

$$A_1(v) = 2g(v) - 3vg'(v) \quad \text{et} \quad B_1(v) = g'(v). \quad (10)$$

L'hypothèse (9) se traduit simplement donc par l'existence d'une fonction g telle que :

$$\boxed{\tau_{sm}^d = \left[2g(v) - 3vg'(v) \right] \bar{S} + \frac{1}{\sqrt{\chi}} g'(v) \text{Adj}^d \bar{S}.} \quad (11)$$

Notons maintenant Φ_T la dissipation totale. On a :

$$\Phi_T = \text{tr}[(\bar{\tau} + \tau_{sm})\bar{S}].$$

En utilisant (8) et (10), on montre alors que

$$\begin{aligned} \Phi_T \geq 0 &\Leftrightarrow \nu + A_1(v) + 3vB_1(v) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \nu + g(v) \geq 0. \end{aligned}$$

En résumé, pour peu que

$$\nu + g \geq 0, \quad (12)$$

un modèle appartenant à la classe (11) est un modèle respectant le groupe de symétrie de (1) et vérifiant le second principe de la thermodynamique.

Notons que Φ_{sm} peut prendre des valeurs négatives. Les modèles sont donc aptes à prendre en compte la cascade inverse d'énergie. Par ailleurs, on peut montrer que $|v|$ est borné. Par conséquent, on n'a besoin de satisfaire (12) que sur un intervalle borné.

5 Test numérique et conclusion

Le modèle (qu'on désignera par « modèle invariant ») a été testé dans le cas simple où g est linéaire :

$$g(v) = Cv, \quad \text{et} \quad C = \nu(C_s \bar{\delta} / \ell)^2,$$

C_s étant la constante de Smagorinsky, $\bar{\delta}$ la longueur de coupure et ℓ une longueur de référence liée à la taille du domaine. Il a été validé sur un écoulement tridimensionnel dans une chambre ventilée (la cavité de Nielsen), pour lequel on dispose de résultats de référence, et qui nous intéresse pour les applications dans le bâtiment. La géométrie de la chambre est représentée sur la figure FIG. 1. Le nombre de Reynolds est d'environ 5000. ℓ est pris égal à 1m.

La figure FIG. 2 donne une comparaison des profils de vitesse au deux tiers de la longueur de la chambre, et à la demi-largeur. On peut y constater que les résultats obtenus avec le modèle invariant sont nettement meilleurs que ceux donnés par le modèle de Smagorinsky et le modèle dynamique, sans que le calcul du coefficient ait besoin d'un filtrage test.

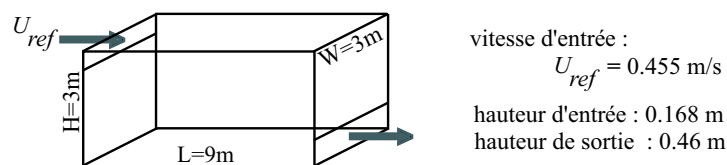


FIG. 1 – Géométrie de la chambre ventilée

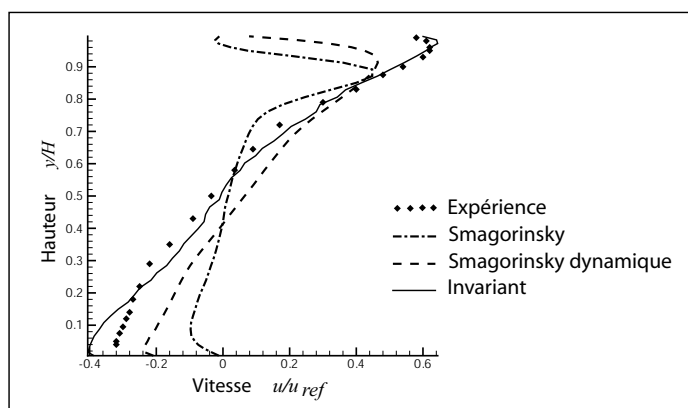


FIG. 2 – Profil de la vitesse horizontale au 2/3 de la longueur de la chambre

On peut espérer qu'une étude plus fine sur la fonction g conduira à des résultats encore meilleurs. On pourrait aussi introduire d'autres grandeurs, comme la pseudo-dissipation, dans les modèles. Mais au delà de ces validations, l'approche qu'on a choisie permet surtout la construction de modèles LES consistants avec les propriétés des équations de Navier-Stokes.

Références

- [1] M. Oberlack. Invariant modeling in large-eddy simulation of turbulence. In *Annual Research Briefs*. Stanford University, 1997.
- [2] N.H. Ibragimov. *CRC handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol 1 : Symmetries, exact solutions, and conservation laws*. CRC Press, 1994.
- [3] P.J. Olver. *Applications of Lie groups to differential equations*. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1986.
- [4] M. Oberlack. Symmetries, invariance and scaling-laws in inhomogeneous turbulent shear flows. *Flow Turb. Comb.*, 62(2) :111–135, 1999.
- [5] N.H. Ibragimov. *CRC handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol 2 : Applications in engineering and physical sciences*. CRC Press, 1995.
- [6] G. Ünal. Application of equivalence transformations to inertial subrange of turbulence. *Lie Group Appl.*, 1(1) :232–240, 1994.
- [7] P. Sagaut. *Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible*, volume 30 of *Mathématiques et Applications*. Springer-Verlag, 1998.