



**HAL**  
open science

# Utilisation des tenseurs d'inertie globaux dans le cas de liaisons complexes et pseudo-paramètres

Michel Fayet, Arnaud Sandel, Lionel Maiffredy

► **To cite this version:**

Michel Fayet, Arnaud Sandel, Lionel Maiffredy. Utilisation des tenseurs d'inertie globaux dans le cas de liaisons complexes et pseudo-paramètres. 17e Congrès Français de Mécanique, Aug 2005, Troyes, France. hal-04215910

**HAL Id: hal-04215910**

**<https://hal.science/hal-04215910>**

Submitted on 22 Sep 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Utilisation des Tenseurs d'Inertie Globaux dans le cas de systèmes à liaisons complexes et pseudo-paramètres.

Michel Fayet, Arnaud Sandel, Lionel Maiffredy

Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides (LaMCoS), INSA de Lyon  
Bâtiment J. Jacquard, 27 avenue Jean Capelle  
69621 VILLEURBANNE CEDEX

## Résumé :

Le tenseur d'inertie global, présenté sous la forme nouvelle d'une matrice  $4 \times 4$ , conduit à des expressions très condensées des coefficients des équations du mouvement. L'étude comprend les cas des liaisons complexes, réalisées par un assemblage de corps sans masse, et des pseudo-paramètres. Cette théorie aboutit à une méthode systématique d'obtention du modèle dynamique d'un système multicorps, programmée sous Maple.

## Abstract :

A new presentation of the global inertia tensor is given under a form of  $4 \times 4$  matrix. It leads to a very condensed form of the coefficients which appear in the equations of motion. The case of complex joints realised by an assembling of massless bodies is incorporated as well as this of pseudo-parameters. This theory leads to a systematic method for obtaining the dynamic model of Multibody Systems (MBS). Its computation with Maple is presented.

## Mots clefs :

Dynamique des systèmes multicorps ; Tenseurs d'inertie globaux ; Coordonnées homogènes ; Liaison complexe ; Paramètres non holonomes.

## 1 Introduction

Les pseudo-paramètres (ou paramètres non holonomes) sont utilisés classiquement pour décrire le mouvement d'objets tels une toupie ou un satellite : dans ce cas, les pseudo-vitesses sont les projections du vecteur taux de rotation dans un repère lié au solide. Par ailleurs, certains systèmes mécaniques peuvent présenter des liaisons complexes, réalisées par des mécanismes à chaînes fermées, à barres, à un seul degré de mobilité et dont la masse peut être négligée.

Ces deux situations se rencontrent simultanément dans un véhicule automobile : le mouvement de la caisse est décrit par les projections  $V_x$ ,  $V_y$  et  $V_z$  du vecteur vitesse de son centre d'inertie dans un repère lié à la caisse (figure 1), et par les angles de lacet, tangage et roulis ; cette description est non holonome.

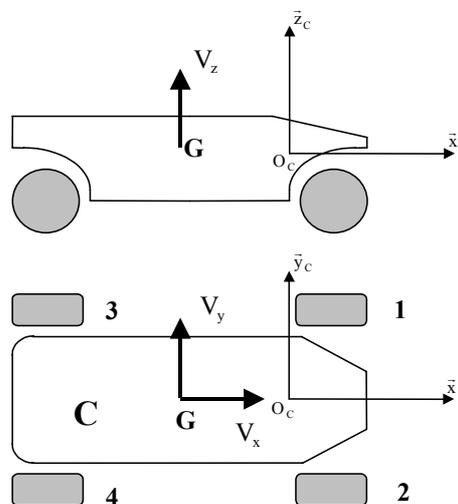


FIG. 1 – Définition de  $V_x$ ,  $V_y$  et  $V_z$ .

D'autre part la suspension des roues est assurée par un système de barres de faibles masses (Mac Pherson ou double-triangle). Le mouvement complexe du porte-fusée est alors décrit en fonction du seul débattement  $z_i$  du centre  $O_i$  de la roue  $i$ . Le torseur cinématique du porte-fusée  $i$  par rapport à la caisse  $c$  a la

$$\text{forme : } \mathcal{V}_i^c(O_i) = \begin{cases} \vec{\Omega}_i^c = \dot{z}_i \vec{\phi}_i \\ \vec{V}^c(O_i) = \dot{z}_i \vec{t}_i \end{cases} = \dot{z}_i \mathcal{S}_i(O_i) \quad \text{où } \mathcal{S}_i \text{ est le torseur géométrique associé à } \dot{z}_i \quad (1)$$

Le formalisme de Newton-Euler est mal adapté à cette description, et les méthodes d'Appel et Hamel sont connues pour être très pénibles. Nous sommes donc conduits à utiliser le théorème de D'Alembert ou des puissances virtuelles. Mais le paramétrage non holonome de la caisse interdit d'utiliser sa conséquence que sont les équations de Lagrange. Comme solution alternative, l'utilisation des tenseurs d'inertie globaux (TIG), basée sur le théorème de d'Alembert et la forme *brute* des équations de Lagrange, est présentée ici. Elle a été proposée par Fayet et Renaud en 1989, et sous une nouvelle forme par Fayet et Pfister en 1992.

## 2 Liaisons complexes et paramétrage holonome

### 2.1 Géométrie, cinématique

Envisageons le cas de chaînes ouvertes de solides. Pour l'instant le mouvement est supposé être décrit par de "vrais" paramètres de position. La position du repère  $F_i$  par rapport à  $F_{i-1}$  est une fonction de  $q_i$ :  $q_i \rightarrow F_i / F_{i-1}$  et le mouvement instantané est décrit, comme dans la relation (1), par le torseur cinématique :

$$\mathcal{V}_i^{i-1}(O_i) = \begin{cases} \vec{\Omega}_i^{i-1} = \dot{q}_i \vec{\phi}_i \\ \vec{V}^{i-1}(O_i) = \dot{q}_i \vec{t}_i \end{cases} \quad O_i \text{ étant un point lié à } F_i. \quad (2)$$

La numérotation des paramètres  $q_i$  suit l'ordre naturel depuis la base jusqu'à l'extrémité de la chaîne. L'indice  $i$  du repère  $F_i$  est égal à l'indice du solide  $S_i$  auquel il est lié ; cependant, lorsque des liaisons sont à plus de un degré de liberté, les repères intermédiaires ne sont pas liés à l'un des solides de la chaîne. Dans le cas de liaisons simples uniquement, les vecteurs  $\vec{\phi}_i$  et  $\vec{t}_i$  sont fixes à la fois dans  $F_i$  et dans  $F_{i-1}$ .

### 2.2 Rappel sur la forme brute des équations de Lagrange

En appliquant le principe de d'Alembert, on obtient la forme brute des équations de Lagrange  $\boxed{Q_i = A_i}$  (3), valable pour un paramétrage holonome ou non. Les forces généralisées  $Q_i$  et les quantités d'accélération  $A_i$  s'écrivent :

$$\bullet \quad Q_i = \int_{\Sigma} \vec{f}(M) \cdot \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i} dm \quad (4) \quad \text{avec } \vec{f}(M) \text{ la densité massique de force au point } M ;$$

$$\bullet \quad \boxed{A_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{i,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k} \quad (5) \quad \text{où les } a_{ij} \text{ sont les coefficients de la matrice d'énergie cinétique et les } \Gamma_{i,jk}$$

$$\text{les symboles de Christoffel : } a_{ij} = \int_{\Sigma} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_j} dm \quad (6) \quad \text{et} \quad \Gamma_{i,jk} = \int_{\Sigma} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial^2 \overline{OM}}{\partial q_j \partial q_k} dm \quad (7)$$

Il s'ensuit que pour connaître les coefficients dynamiques  $a_{ij}$  et  $\Gamma_{i,jk}$ , il suffit de connaître  $\frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i}$  et  $\frac{\partial^2 \overline{OM}}{\partial q_j \partial q_k}$ .

### 2.3 Expression de $\frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i}$

$$\text{A partir de (2): } \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i} = P_{iM} (\vec{t}_i + \vec{\phi}_i \times \overline{O_i M}) \quad (8) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i} = P_{iM} \left[ \hat{\phi}_i, \vec{t}_i \right] \begin{bmatrix} \overline{O_i M} \\ 1 \end{bmatrix} = P_{iM} \left( \begin{bmatrix} \overline{O_i M}^T \\ 1 \end{bmatrix}, 1 \right) \begin{bmatrix} -\hat{\phi}_i \\ -\vec{t}_i \end{bmatrix} \right)^T \quad (9)$$

où  $P_{iM}$  est égal à 1 si  $M$  est lié à  $\Sigma_i$  – le corps généralisé relatif à  $q_i$ , composé de tous les solides successeurs de la liaison  $F_{i-1}$ - $F_i$ , et égal à 0 dans les autres cas ;  $\hat{\phi}_i$  est le tenseur antisymétrique associé à  $\vec{\phi}_i$ . On remarque que l'écriture de (9) utilise des coordonnées homogènes.

## 2.4 Expression de $\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i}$

Après dérivation par rapport à  $q_j$ , la relation (8) devient :

- si  $j > i$  : 
$$\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i} = P_{jM} \bar{\varphi}_{i,x} \frac{\partial \overline{O_i M}}{\partial q_j} = P_{jM} \bar{\varphi}_{i,x} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_j} \quad (10) \quad \text{car } \frac{\partial \bar{t}_i}{\partial q_j} = \bar{0} \text{ et } \frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial q_j} = \bar{0}$$

- si  $j < i$  : 
$$\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i} = P_{iM} \bar{\varphi}_{j,x} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i} \quad (11)$$

On notera que, selon (10) et (11), 
$$\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \overline{OM}}{\partial q_i \partial q_j} = P_{[i,j]M} \bar{\varphi}_{[i,j],x} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_{[i,j]}} \quad (12)$$

où  $[i,j] = \text{Max}(i,j)$  et  $|i,j| = \text{Min}(i,j)$ . La relation de Schwarz est vérifiée : c'est la marque du caractère holonome de ce paramétrage.

- si  $j = i$  : 
$$\frac{\partial^2 \overline{OM}}{\partial q_i^2} = P_{iM} \left( \bar{t}'_i + \bar{\varphi}'_{i,x} \overline{O_i M} + \bar{\varphi}_{i,x} (\bar{\varphi}_{i,x} \overline{O_i M}) \right) \quad \text{où } \bar{\varphi}'_i = \frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial q_i} \text{ et } \bar{t}'_i = \frac{\partial \bar{t}_i}{\partial q_i} \quad (13)$$

## 2.5 Expressions de $a_{ij}$ et $\Gamma_{i,jk}$

### 2.5.1 Présentation générale

A partir des expressions (6,7,12,13), on peut écrire : 
$$a_{ij} = \int_{\Sigma_{[i,j]}} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_j} dm \quad (14) \quad \text{et}$$

$$\Gamma_{i,jk} = (1 - \delta_{jk}) \int_{\Sigma_{[i,j,k]}} \left( \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i} \cdot \bar{\varphi}_{[j,k]} \right) dm + \delta_{jk} \int_{\Sigma_{[i,j]}} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i} \cdot \left( \bar{t}'_j + \bar{\varphi}'_{j,x} \overline{O_j M} + \bar{\varphi}_{j,x} (\bar{\varphi}_{j,x} \overline{O_j M}) \right) dm = (1 - \delta_{jk}) \Gamma^1_{i,jk} + \delta_{jk} \Gamma^2_{i,jj} \quad (15)$$

Nous ne calculerons  $a_{ij}$  que dans les cas où  $i \leq j$  puisque  $a_{ij} = a_{ji}$ . Quant aux  $\Gamma^1_{i,jk}$ , ils ne seront déterminés que dans les cas où  $i < k$  et  $j \leq k$ . En effet, tous les autres cas peuvent être déduits de ceux-ci grâce à la relation de Schwarz :  $\Gamma^1_{i,jk} = \Gamma^1_{i,kj}$ , et à la relation  $\Gamma^1_{i,jk} = -\Gamma^1_{k,ji}$  lorsque  $j \leq k$  et  $j \leq i$ .

Dans cette hypothèse, on a : 
$$\Gamma^1_{i,jk} = -\bar{\varphi}_j \cdot \int_{\Sigma_k} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_k} dm \quad (16)$$

### 2.5.2 Introduction du tenseur cinétique

Les produits scalaire et vectoriel intervenant dans les expressions (14,15,16) peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_j} = \text{tr} \left( \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i} \otimes \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_j} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i} \times \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_j} = -2 \text{vec} \left( \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i} \otimes \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_j} \right)$$

$$\text{où, par définition, } \overline{\text{vec}}(\overline{\overline{T}}) = \text{skewsym}(\overline{\overline{T}}) = \frac{1}{2} \left( \overline{\overline{T}} - \overline{\overline{T}}^T \right)$$

Les coefficients dynamiques  $a_{ij}$  et  $\Gamma^1_{i,jk}$  s'expriment donc à l'aide d'un même « tenseur cinétique » :

$$\overline{\overline{K}}_{ij} = \int_{\Sigma_j(i \leq j)} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i} \otimes \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_j} dm \quad (\text{matrice } 3 \times 3) \quad (17)$$

d'après les relations :  $\overline{a}_{ij} = a_{ji} = \text{tr} \overline{\overline{K}}_{ij} \quad (i \leq j) \quad (18)$  et  $\overline{\Gamma}_{i,jk}^1 = 2 \overline{\phi}_j \cdot \text{vec}(\overline{\overline{K}}_{ik}) \quad (i < k, j \leq k) \quad (19)$

L'obtention des équations de la dynamique se ramène donc à la détermination des tenseurs cinétiques  $\overline{\overline{K}}_{ij}$ .

### 2.5.3 Expression des tenseurs cinétiques $\overline{\overline{K}}_{ij}$

A partir de la définition (17) de  $\overline{\overline{K}}_{ij}$  et des expressions (9) de  $\frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i}$ , on obtient :

$$\overline{\overline{K}}_{ij}(i \leq j) = \left[ \begin{array}{c} \hat{\phi}_i, \vec{t}_i \end{array} \right] \left( \int_{\Sigma_j} \left[ \begin{array}{c} \overline{O_i M} \\ 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \overline{O_j M^T} \\ 1 \end{array} \right] dm \right) \left[ \begin{array}{c} -\hat{\phi}_j \\ \vec{t}_j^T \end{array} \right] \quad (20) \quad \text{ou} \quad \boxed{\overline{\overline{K}}_{ij}(i \leq j) = \tilde{\mathcal{S}}_i(O_i) \cdot \overline{\overline{G}}_{ij} \cdot \tilde{\mathcal{S}}_j^T(O_j)} \quad (21)$$

en identifiant  $\tilde{\mathcal{S}}_i$  le tenseur géométrique associé à  $q_i$  :  $\tilde{\mathcal{S}}_i(O_i) = \left[ \begin{array}{c} \hat{\phi}_i, \vec{t}_i \end{array} \right]$  (matrice 3x4)

et  $\overline{\overline{G}}_{ij}$  le tenseur d'inertie global du second ordre du système  $\Sigma_j$  aux points  $O_i$  et  $O_j$  :

$$\overline{\overline{G}}_{ij}(i \leq j) = \int_{\Sigma_j} \left[ \begin{array}{c} \overline{O_i M} \\ 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \overline{O_j M^T} \\ 1 \end{array} \right] dm = \left[ \begin{array}{cc} \int_{\Sigma_j} \overline{O_i M} \otimes \overline{O_j M} dm & \int_{\Sigma_j} \overline{O_i M} dm \\ \int_{\Sigma_j} \overline{O_j M^T} dm & M_j \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \overline{\overline{\Pi}}_{ij} & \overline{\overline{U}}_{ij} \\ \overline{\overline{U}}_{ij}^T & M_j \end{array} \right] \quad (\text{matrice } 4 \times 4) \quad (22)$$

où  $M_j$ ,  $\overline{\overline{U}}_{ij}$  et  $\overline{\overline{\Pi}}_{ij}$  sont les tenseurs d'inertie globaux d'ordre 0, 1 et 2 déjà présentés dans [1,2]. Cependant, représentés dans [1,2] par des matrices 3x3, ces TIG sont désormais mis sous la forme de matrices 4x4, ce qui explique la présentation simple et compacte des relations (21,18,19).

### 2.5.4 Détermination récursive des tenseurs d'inertie globaux

#### • Récursion des $\overline{\overline{G}}_{ii}$

Par définition on a :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{G}}_{i-1,i-1} &= \int_{\Sigma_{i-1}} \left[ \begin{array}{c} \overline{O_{i-1} M} \\ 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \overline{O_{i-1} M^T} \\ 1 \end{array} \right] dm = \int_{F_{i-1}} \left[ \begin{array}{c} \overline{O_{i-1} M} \\ 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \overline{O_{i-1} M^T} \\ 1 \end{array} \right] dm + \int_{\Sigma_i} \left( \left[ \begin{array}{c} \overline{O_{i-1} O_i} \\ 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \overline{O_i M} \\ 1 \end{array} \right] \right) \left( \left[ \begin{array}{c} \overline{O_{i-1} O_i^T} \\ 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \overline{O_i M^T} \\ 1 \end{array} \right] \right) dm \\ &= \overline{\overline{g}}_{i-1} + M_i \left[ \begin{array}{cc} \overline{O_{i-1} O_i} \otimes \overline{O_{i-1} O_i} & \overline{O_{i-1} O_i} \\ \overline{O_{i-1} O_i^T} & 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} (\overline{O_{i-1} O_i} \otimes \overline{U}_{ii} + \overline{U}_{ii} \otimes \overline{O_{i-1} O_i}) & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] + \overline{\overline{G}}_{ii} \end{aligned}$$

où  $\overline{\overline{g}}_{i-1}$  est le tenseur d'inertie global (4x4) du solide  $F_{i-1}$  (pris seul) au point  $O_{i-1}$ .

Soit, en définitive : 
$$\overline{\overline{G}}_{i-1,i-1} = \overline{\overline{G}}_{ii} + \overline{\overline{g}}_{i-1} + \left[ \begin{array}{cc} (\overline{O_{i-1} O_i} \otimes \overline{U}_{ii} + \overline{U}_{ii} \otimes \overline{O_{i-1} O_i}) & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \quad (23)$$

où  $\overline{\overline{g}}_{i-1} = \left[ \begin{array}{cc} \overline{\overline{\pi}}_{i-1} & \overline{\overline{u}}_{i-1} \\ \overline{\overline{u}}_{i-1}^T & m_{i-1} \end{array} \right]$  est le tenseur d'inertie (4x4) caractérisant la géométrie des masses du corps

augmenté  $F_{i-1}^+$  [4], constitué de  $F_{i-1}$  et du point massique  $(O_i, M_i)$  ;  $\overline{\overline{\pi}}_{i-1}$  est le tenseur d'inertie brut et  $\overline{\overline{u}}_{i-1}$  le moment statique de  $F_{i-1}^+$  (évalués tous deux au point  $O_{i-1}$ ) ;  $m_{i-1}$  est la masse de  $F_{i-1}$ .

- **Récursion sur i des  $\overline{\overline{G}}_{ij}$**

En reprenant la définition:

$$\overline{\overline{G}}_{i-1,j} = \int_{\Sigma_j} \left( \begin{bmatrix} \overline{O_{i-1}O_i} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{O_iM} \\ 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \overline{O_jM^T}, 1 \end{bmatrix} dm \quad \text{soit} \quad \boxed{\overline{\overline{G}}_{i-1,j} = \overline{\overline{G}}_{i,j} + \begin{bmatrix} \overline{O_{i-1}O_i} \otimes \overline{U}_{jj} & \overline{M}_j \overline{O_{i-1}O_i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad (24)$$

### 2.5.5 Symboles de Cristoffel de type $\Gamma_{i,j}^2$

A partir de la relation (15), on obtient :

$$\Gamma_{i,j}^2 = \text{tr} \left( \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_i & \vec{t}_i \end{bmatrix} \left( \int_{\Sigma_{[i,j]}} \begin{bmatrix} \overline{O_iM} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{O_jM^T}, 1 \end{bmatrix} dm \right) \begin{bmatrix} -\hat{\varphi}_j + \hat{\varphi}_j \cdot \hat{\varphi}_j \\ \vec{t}_j \end{bmatrix} \right) \quad (25) \quad \text{ou} \quad \boxed{\Gamma_{i,j}^2 = \text{tr} \left( \tilde{\$}_i(O_i) \cdot \overline{\overline{G}}_{[i,j]} \cdot \tilde{\$}_j(O_j) \right)} \quad (26)$$

en identifiant :

$$\overline{\overline{G}}_{[i,j]} = \int_{\Sigma_{[i,j]}} \begin{bmatrix} \overline{O_iM} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{O_jM^T}, 1 \end{bmatrix} dm \quad (27) \quad \text{et} \quad \tilde{\$}_j^T(O_j) = \begin{bmatrix} -\hat{\varphi}_j + \hat{\varphi}_j \cdot \hat{\varphi}_j \\ \vec{t}_j \end{bmatrix}.$$

A partir de la relation (27), il est clair que si  $j \leq i$ ,  $\overline{\overline{G}}_{[i,j]} = \overline{\overline{G}}_{[j,i]}^T = \overline{\overline{G}}_{ji}^T$ . Ce dernier tenseur ayant déjà été évalué pour obtenir  $\Gamma_{i,j,k}^1$ , tout est déjà connu pour calculer l'expression (25).

## 3 Paramétrage non holonome

### 3.1 Présentation

Pour certains couples de paramètres, l'inégalité  $j > i$  ne signifie plus que  $q_j$  est un successeur de  $q_i$ . En conséquence la variation de  $q_j$  affecte  $\vec{t}_i$  et  $\hat{\varphi}_i$  même si  $j > i$ . Par exemple, lorsque les dérivées des paramètres sont les composantes du vecteur taux de rotation, le troisième paramètre n'est pas le successeur du premier et  $\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial q_3} \neq \vec{0}$ . Dans ce cas, la relation de Schwarz n'est plus vérifiée (voir paragraphe 2.4) et le couple de paramètres est dit non holonome. Les paramètres, renommés pseudo-paramètres [3], sont notés  $\pi_i$  au lieu de  $q_i$ .

### 3.2 Paramétrage adopté en Dynamique du Véhicule

Afin de repérer la caisse, on peut décrire la position de G, centre d'inertie de la caisse, par ses coordonnées  $\pi_4 = x_g$ ,  $\pi_5 = y_g$ ,  $\pi_6 = z_g$  dans le repère galiléen : le paramétrage est holonome. Mais les paramètres traditionnellement utilisés dans le secteur pour repérer la caisse c sont les composantes  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  de la vitesse galiléenne de G, projetée dans le repère lié à la caisse  $F_c = \{G, \vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c\}$  (figure 1), et les angles d'Euler de type II  $\psi$ ,  $\phi$ ,  $\theta$  qui évaluent les rotations autour des axes  $\vec{\varphi}_1 = \vec{z}_g$  vertical,  $\vec{\varphi}_2 = \vec{y}_1$  orienté vers la gauche, et  $\vec{\varphi}_3 = \vec{x}_2 = \vec{x}_c$  l'axe longitudinal.

Notons  $\pi_1 = \psi$ ,  $\pi_2 = \theta$ ,  $\pi_3 = \phi$ ,  $\pi_4 = \int_0^t V_x dt$ ,  $\pi_5 = \int_0^t V_y dt$ ,  $\pi_6 = \int_0^t V_z dt$  et  $E_R = \{1,2,3\}$ ,  $E_T = \{4,5,6\}$ .

Pour  $i \in E_T$  et  $j \in E_R$  :

$$\frac{\partial \overline{OM}}{\partial \pi_i} = P_{iM} \vec{t}_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \pi_i} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial \pi_j} = P_{jM} \vec{\varphi}_j \cdot \vec{t}_i \quad \text{avec} \quad \vec{t}_1 = \vec{x}_c, \quad \vec{t}_2 = \vec{y}_c, \quad \vec{t}_3 = \vec{z}_c \quad (\text{on notera que } P_{iM} = P_{jM})$$

tandis que 
$$\frac{\partial \overline{OM}}{\partial \pi_i} = P_{jM} \overline{\varphi}_j \wedge \overline{O_j M} \text{ et } \frac{\partial}{\partial \pi_i} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial \pi_j} = P_{jM} \left( \underbrace{\frac{\partial \overline{\varphi}_j}{\partial \pi_i}}_{=0} \wedge \overline{O_j M} + \overline{\varphi}_j \wedge \underbrace{\frac{\partial \overline{O_j M}}{\partial \pi_i}}_{=0} \right) = \vec{0}$$

car  $\pi_i$  engendre une translation et  $O_i \equiv O_j$ .

On constate que l'égalité de Schwarz n'est pas vérifiée. Donc  $\pi_i$  et  $\pi_j$  forment un couple de paramètres non holonomes si  $i$  et  $j$  appartiennent l'un à  $E_T$ , et l'autre à  $E_R$ . Dans toutes les autres situations, les couples de paramètres seraient holonomes.

Les paramètres non holonomes ne modifient pas l'expression (18) des coefficients  $a_{ij}$ , puisque (6) ne fait pas intervenir de dérivée partielle d'ordre 2. En revanche, si  $j \in E_R$  et  $k \in E_T$ , les symboles de Christoffel  $\Gamma_{i,jk}$

deviennent (avec  $\Sigma_{[i,j,k]} = \Sigma_{[ij]} = \Sigma_{[i,k]}$ ) :

$$\Gamma_{i,jk} = \int_{\Sigma_{[i,j,k]}} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial \pi_i} \cdot (\overline{\varphi}_j \wedge \overline{t_k}) dm = \int_{\Sigma_{[i,j,k]}} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial \pi_i} \cdot \left( \overline{\varphi}_j \wedge \frac{\partial \overline{OM}}{\partial \pi_k} \right) dm$$

soit 
$$\Gamma_{i,jk} = 2 \overline{\varphi}_j \cdot \text{vec} \left( \overline{\overline{K}}_{[ik]} \right) \quad (28) \quad \text{avec} \quad \overline{\overline{K}}_{[i,k]} = \tilde{\$}_i(O_i) \cdot \overline{\overline{G}}_{[i,k]} \cdot \tilde{\$}_k(O_k) \quad (29)$$

alors que 
$$\Gamma_{i,kj} = 0.$$

## 4 Conclusion

Le présent papier présente les tenseurs d'inertie globaux sous la forme nouvelle de matrices 4x4, regroupant toutes les caractéristiques inertielles (masse, moment du 1<sup>er</sup> ordre et tenseur). Leur utilisation permet d'obtenir le modèle dynamique explicite pour une chaîne simple ouverte en donnant aux coefficients dynamiques  $a_{ij}$  et  $\Gamma_{i,jk}$  des formes très condensées. De plus, le cas des liaisons complexes est traité au moyen des torseurs géométriques associés, écrits dans le cadre de la théorie des coordonnées homogènes. Enfin, les expressions des symboles de Christoffel sont données dans le cas particulier où des paramètres non holonomes, utilisés en Dynamique du Véhicule, sont choisis.

Les opérations successives (formules encadrées) peuvent être résumées comme suit : après avoir déterminé les tenseurs d'inertie globaux (4x4)  $\overline{\overline{G}}_{ij}$  par récursion, on en déduit les tenseurs cinétiques  $\overline{\overline{K}}_{ij}$ . Puis les éléments de la matrice d'énergie cinétique  $a_{ij}$  et les symboles de Christoffel  $\Gamma_{i,jk}$  sont calculés et permettent finalement d'écrire les quantités d'accélération généralisées. Seuls les symboles de Christoffel diffèrent en fonction du caractère holonome ou non des couples de paramètres.

## Références :

- [1] **M.Fayet and M.Renaud**, Quasi-minimal computation under an explicit form of the inverse dynamic model of a robot manipulator, *Mech. Mach. Th.*, 24 pp.165-174-1989
- [2] **M.Fayet and F.Pfister**, Analysis of multi-body systems with indirect coordinates and global inertia tensor, *Eur. Jour. Mech. A/ Solids*, 13, pp. 431-457- 1994
- [3] **F. Pfister**, Contribution à la Mécanique Analytique des Systèmes Multi-Corps- Thèse de Doctorat – INSA de LYON –266 p.-1995
- [4] **O. Fischer**, Theoretische Grundlagen für eine Mechanik lebender Körper, Leipzig, Teubner, 1906, 83 p.
- [5] **G. Hamel**, Theoretische Mechanik, Berlin, Springer 1949, 243p.
- [6] **P. Appel**, Sur une forme générale des équations de la dynamique, *Compte-rendu de l'Académie des Sciences*, Vol 129, 1899, pp. 317-320, 423-427, 459-460