

L'aiguille de Buffon, encore et encore

Karim ZAYANA^{1,2} et Ivan BOYER¹

¹ Ministère de l'Éducation nationale, Paris

² LTCI, Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris

Dans la lignée du paradoxe de Bertrand¹ [9] et des méthodes de Monte-Carlo [2], le problème de Buffon [5] appartient à la branche dite géométrique des probabilités. Énoncé en 1777, il fit l'objet de plusieurs démonstrations, volontiers techniques, parfois tortueuses, occasionnellement lacunaires ou fausses [1]. À l'aide d'un changement de paradigme, nous le traiterons ici avec le seul bagage mathématique d'un élève de Terminale [7, 8]. Notre approche, assez intuitive, sera complétée de simulations réalisées en Python. L'ensemble questionne l'approximation du nombre π , l'inégalité de concentration, l'histoire des sciences, la faisabilité d'une expérience, etc. et ne demande pour support que quelques croquis et scripts très simples. Aussi pourra-t-il servir de brique à la préparation du grand oral du futur bachelier sous la houlette de son professeur.

1 L'histoire revisitée

*Quelque chose vient de tomber
Sur les lames de ton plancher
C'est toujours le même film qui passe
T'es toute seule au fond de l'espace
T'as personne devant...*

C'est en portant un cigare [4] à ses lèvres que Francis laissa choir une boîte de 240 allumettes. À peine son contenu s'éparpillait-il en gros tas sur le parquet que Spinee (prononcer Spini) [6], le fidèle compagnon du chanteur, y donnait un bon coup de patte. Le labrador achevait ainsi de tout disperser dans la pièce. L'artiste aux quinze disques d'or, à l'époque inconnu du grand public, sortit pelle et balai. Tout en nettoyant le studio, fredonnant la mélodie qui ferait bientôt sa gloire [3], il entreprit de compter chaque allumette gisant à cheval sur deux

1. Joseph BERTRAND, mathématicien français du XIX^e siècle. Outre son paradoxe probabiliste, il s'est intéressé aux séries et intégrales qui portent son nom ainsi qu'à la distribution des nombres premiers.

lattes. Patiemment. Encore et encore. Il en (re)trouva 54, qu'il rapporta au total de 240. Soit la fraction

$$\frac{54}{240} = 0,225,$$

un nombre que Francis trouva étonnamment proche du quotient

$$\frac{2\ell}{\pi a} \simeq 0,2122$$

où $\ell = 5$ cm désignait la taille des allumettes et $a = 15$ cm la largeur des lattes.

Sans le savoir, notre vedette nationale venait de reproduire l'expérience que Buffon² imaginait quelque deux-cent-cinquante ans plus tôt avec des aiguilles.

2 Modélisation

Emboîtons les pas de Francis et du comte de Buffon : à notre tour, penchons-nous sur la probabilité qu'une aiguille de longueur ℓ tombée sur le sol rencontre une rainure. Ajoutons comme hypothèse l'inégalité $\ell < a$, du reste plausible et satisfaite au paragraphe précédent. Aussi, quand elle rencontre une rainure, l'aiguille n'en rencontre-t-elle qu'une, ce qu'on peut coder par une variable aléatoire témoin R à valeurs dans la paire $\{0, 1\}$. Signalons à toutes fins utiles que, le cas échéant, la rencontre entre l'aiguille et la rainure peut être de trois types, recensés sur la figure 1 :

- l'aiguille croise franchement la rainure en l'enjambant. Elle est donc à cheval sur deux lattes,
- l'aiguille s'étend sur la rainure,
- l'aiguille n'est au contact de la rainure que par l'une de ses extrémités.

2. Georges de BUFFON, naturaliste français du XVIII^e siècle. Il s'est intéressé aux mathématiques pour leurs applications en médecine et en sciences sociales. Outre l'expérience de l'aiguille décrite ici, il est également connu pour avoir tenté de dater la Terre en étudiant le refroidissement de boulets chauffés à blanc.

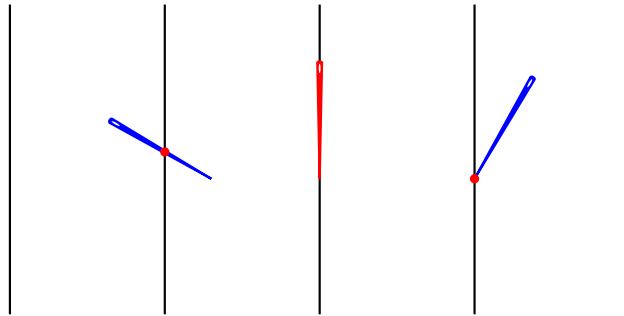


FIGURE 1 – Les trois croisements possibles. Les deux derniers sont négligeables au sens probabiliste du terme.

Toutefois, si l'on néglige l'épaisseur des traits, nous pourrions considérer que les deux dernières éventualités ne sont pas vraisemblables : on les qualifie justement de négligeables et leurs probabilités sont nulles.

Ces informations en tête, il s'agit donc d'établir que

$$\mathbb{P}(R = 1) = \frac{2\ell}{a\pi}. \quad (1)$$

Comme R est une variable de Bernoulli³, cette formule revient à prouver que

$$E(R) = \frac{2\ell}{a\pi}. \quad (2)$$

Ceci s'avérera plus aisé car nous bénéficierons, à bon escient, des propriétés de l'espérance.

Le parquet sera vu comme un réseau au motif périodique. L'aiguille, une fois lancée, chute n'importe où à sa surface, et dans une direction absolument quelconque.

Le modèle habituel consiste à adjoindre à l'aiguille deux paramètres pour en décrire la position (modulo la lame) : un angle θ et un écart x comme sur la figure 2, tous deux uniformément distribués – le premier, par symétries - translations, sur l'intervalle $]0, a/2]$ et le second pour la même raison sur l'intervalle $]0, \pi/2]$.

3. Jakob BERNOULLI vécut en Suisse au XVII^e siècle et fut le premier d'une lignée de mathématiciens.

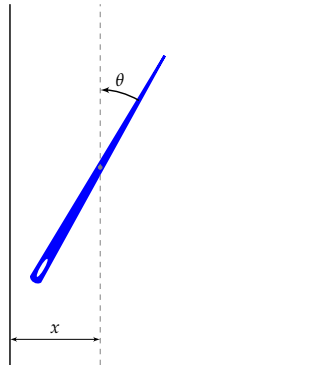


FIGURE 2 – La mise en équation de la preuve « classique ». Le paramètre θ mesure l'écartement angulaire de l'aiguille à la direction des lames. Le paramètre x mesure l'écartement du centre de l'aiguille à la rainure la plus proche.

Nous allons raisonner autrement, à partir d'une aiguille fixe et en faisant plutôt vibrer le sol de façon totalement erratique (translations, rotations). Les mouvements étant relatifs, cette approche duale revient au même.

3 La preuve

Adoptons toujours notre point de vue : c'est donc le parquet qui tremble (par la pensée) un peu dans tous les sens. Mais imaginons cette fois deux aiguilles fixes, en suspension (de sorte qu'elles n'accrochent pas au sol). Dans un premier temps du moins, ne prêtons aucune attention à leurs placements respectifs. Notons R_1 et R_2 les variables aléatoires binaires associées à chacune. Bien entendu, elles peuvent être étroitement dépendantes. Quoi qu'il en soit, leurs espérances sont égales à l'espérance générique $E(R)$ et par linéarité de l'espérance nous aurions donc

$$E(R_1 + R_2) = 2E(R).$$

Ce qui vaut pour 2 aiguilles vaudrait pour n . Avec n aiguilles fixes et sans même nous préoccuper de leur disposition nous aurions cette fois

$$E(R_1 + R_2 + \dots + R_n) = nE(R). \quad (3)$$

Juxtaposons maintenant les n aiguilles habilement, comme autant de côtés d'un polygone régulier. Ce dernier s'inscrit naturellement dans un cercle, figure 3.

Son périmètre étant voisin de $n\ell$, son diamètre D_n vaut en bonne approximation

$$D_n \simeq \frac{n\ell}{\pi}.$$

Plus précisément et avec un zeste de trigonométrie,

$$D_n = \frac{\ell}{\sin(\frac{\pi}{n})}. \quad (4)$$

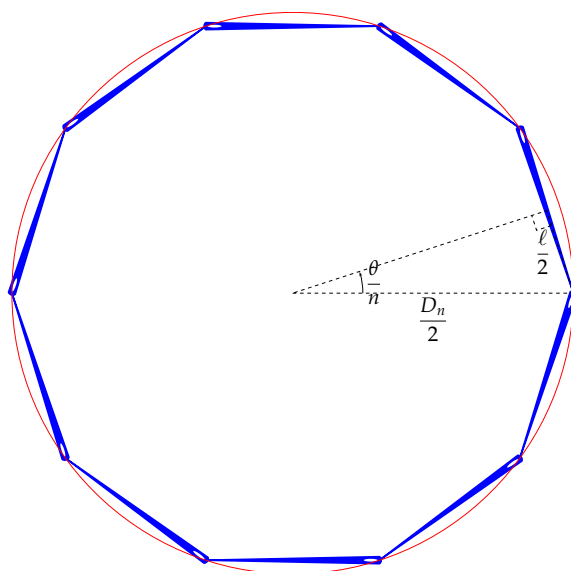


FIGURE 3 – Disposition des aiguilles en cercle. Dans notre approche, les aiguilles sont statiques. C'est le sol qui bouge aléatoirement.

Posons le polygone et son cercle circonscrit sur le sol. Dans la mesure où aucun côté ni sommet n'est vraisemblablement pris dans une rainure, la somme

$$R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

représente exactement le nombre de fois que le polygone est intercepté. C'est aussi « presque » le nombre de fois que le cercle rencontre le parquet : il peut y avoir 2 ou 4 intersections de plus, lorsque les premières et dernières rainures intersectent un arc, sans couper d'aiguille, comme l'illustre la figure 4.

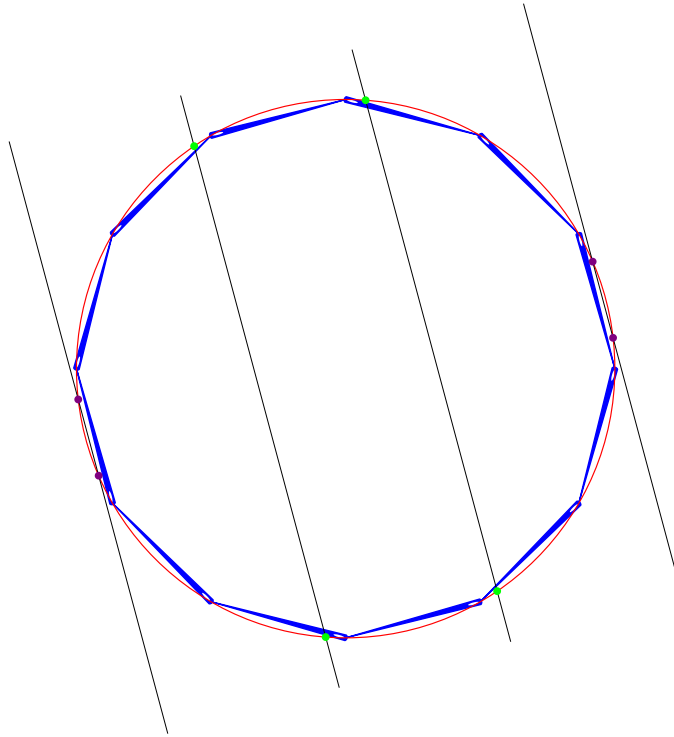


FIGURE 4 – Les points en violet ne correspondent pas à des intersections d'aiguilles, contrairement aux verts.

Il y a l'espace pour $\frac{D_n}{a}$ lattes sous le cercle, ce qui représente aussi « presque » le nombre entier de rainures recouvertes, qui l'approche par défaut ou par excès d'une unité au plus. En le doublant, on estime alors d'une deuxième façon le nombre de fois que le cercle est rencontré. En joignant les deux bouts nous obtenons

$$R_1 + R_2 + \dots + R_n = \frac{2D_n}{a} + \varepsilon \quad (5)$$

où le réel ε agrège une incertitude comprise entre -6 et 2 . Si bien que

$$\frac{1}{n} \times (R_1 + R_2 + \dots + R_n) = \frac{2\ell}{an \sin(\frac{\pi}{n})} + \frac{\varepsilon}{n}. \quad (6)$$

Passons à l'espérance ainsi qu'à la limite. Automatiquement,

$$\frac{1}{n} E(\varepsilon) \rightarrow 0$$

et

$$\frac{2\ell}{an \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \rightarrow \frac{2\ell}{a\pi}.$$

Comme annoncé

$$\mathbb{P}(R = 1) = E(R) = \frac{2\ell}{a\pi}$$

phénomène que Francis constata donc en vertu de la loi des grands nombres.

4 Et si l'on change la disposition ?

Nous l'avons souligné, la disposition initiale des aiguilles ne modifie pas le résultat. Elle facilite en revanche plus ou moins les calculs à mener. Dans la configuration du problème, le cercle cumulait deux atouts : une invariance par translation ainsi qu'une invariance par rotation. Si l'on met par exemple les aiguilles en file indienne, on conserve le premier avantage mais on perd le second. On doit donc paramétrer le tremblement du sol avec l'angle $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ du parquet comme on le voit sur la figure 5.

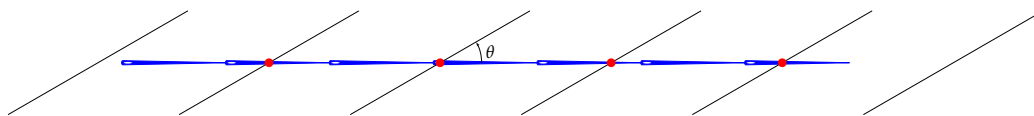


FIGURE 5 – L'angle θ entre le parquet et les aiguilles, ici déposées en ligne droite.

S'il est ici plus simple de compter les intersections, au nombre de $\frac{n\ell \sin \theta}{a} + \epsilon$ où ϵ est borné, nous n'échappons plus à l'intégration d'une densité, certes uniforme. On a

$$\frac{1}{n}(R_1 + R_2 + \dots + R_n) = \frac{\ell \sin \theta}{a} + \frac{\epsilon}{n}$$

puis, comme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell \sin \theta}{a} \frac{d\theta}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\ell}{a\pi}$$

on retrouve le même résultat quand n tend vers $+\infty$. Ouf!

5 L'approximation de π

L'espérance $E(R) = \mathbb{P}(R = 1) = \frac{2\ell}{a\pi}$ de R maintenant démontrée, estimons-la tout en contrôlant son erreur et son risque. Ceci permettra (tout théoriquement) d'approcher $\frac{1}{\pi}$ puis π . Considérons à cet effet n épreuves R_i , $1 \leq i \leq n$, de même loi que R . L'inégalité de Bienaymé⁴-Tchebychev⁵ fournit l'inégalité dite de concentration

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{R_1 + R_2 + \dots + R_n}{n} - \frac{2\ell}{a\pi}\right| \geq \delta\right) \leq \frac{V}{n\delta^2} \quad (7)$$

où

$$V = \frac{2\ell}{a\pi} \left(1 - \frac{2\ell}{a\pi}\right)$$

désigne la variance (commune) des R_i .

La propriété (7) exige cependant l'indépendance des variables R_1, R_2, \dots, R_n . Il convient donc de revenir à la première expérience, quand les aiguilles sont tirées au hasard encore et encore et que le sol est stable ou bien à la deuxième, quand il n'y a qu'une aiguille et que le sol s'en dérobe une multitude de fois.

En fixant le risque $\frac{V}{n\delta^2}$ à 5%, c'est-à-dire en choisissant $\delta = \frac{\sqrt{20V}}{\sqrt{n}}$, on obtient via la moyenne empirique $\frac{R_1 + R_2 + \dots + R_n}{n}$ une approximation de $\frac{2\ell}{a\pi}$ à la précision de $\frac{\sqrt{20V}}{\sqrt{n}}$ et avec 95% de chance.

On dispose donc d'un algorithme probabiliste dont on dit qu'il approche $\frac{2\ell}{a\pi}$ en $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Cela signifie, entre autres, que multiplier le nombre d'aiguilles par 100 fait gagner une décimale dans 95% des cas.

```
1 l=5 , a=15
2
3 from numpy import pi, sin
4 from numpy.random import random
5 from matplotlib.pyplot import hist, show
6
```

4. Irénée-Jules BIENAYMÉ, mathématicien français des XVIII^e et XIX^e siècles. Il s'est notamment intéressé aux processus stochastiques.

5. Pafnouti TCHEBYCHEV, mathématicien russe du XIX^e siècle. Son œuvre, immense, touche aux probabilités, aux polynômes ou encore à la théorie des nombres.


```

7 def buffon(): # une aiguille
8     x=random()*a/2
9     theta=random()*pi/2
10    if sin(theta)*l/2 > x:
11        return 1
12    return 0
13
14 def approx(n): # approximation de pi
15     r=0 # avec n aiguilles
16     for i in range(n):
17         r += buffon()
18     return n/s*2*l/a
19
20 def distrib(N,n): # répartition de N
21     res = [] # approximations de pi
22     for i in range(N): # avec n aiguilles
23         res.append(approx(n))
24     hist(res,20,density=True)
25     show()

```

Puisque l'on peut choisir ℓ et a , on obtient une valeur approchée de $\frac{1}{\pi}$ puis de π (on perd une décimale dans l'inverse⁶). Ainsi, pour espérer égaler la précision de 10^{-3} connue des Grecs, Francis devra dépenser de l'ordre de... 334 millions d'allumettes⁷. Encore faudra-t-il se contenter d'une valeur probable à 95%... Il va sans dire que les cent mille milliards de décimales connues en 2023 de π s'obtiennent par d'autres méthodes!

Karim ZAYANA est inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche (groupe des mathématiques) et professeur invité à l'institut polytechnique de Paris (Palaiseau) et Ivan BOYER est professeur en MPSI au lycée Champollion (Grenoble).

6. Si $|s - \frac{1}{\pi}| \leq \epsilon$ alors $|\frac{1}{s} - \pi| \leq \frac{\pi}{s}\epsilon$ et $\frac{\pi}{s} \approx \pi^2 \approx 10$.

7. On veut $\delta = 10^{-4}$ et $\frac{V}{n\delta^2} = 5\%$, ce qui conduit à $n = 20V \cdot 10^8 \approx 334 \cdot 10^6$ avec les valeurs de ℓ et a , et donc du paramètre $p = E(R)$ puis de la variance V qu'utilise l'estimation de Francis.

Références

- [1] « Aiguille de Buffon ». In : *Wikipédia* (2023). URL : https://fr.wikipedia.org/wiki/Aiguille_de_Buffon.
- [2] Walter APPEL. *Mathématiques pour la physique et les physiciens !* H & K, 2017.
- [3] Francis CABREL. « Encore et encore ». In : *Photos de voyage* (1985).
- [4] « Cannabis ou Pastis ? Francis Cabrel s'exprime ». In : *Le Parisien* (2012).
- [5] Richard ISAAC. *The Pleasure of Probability*. Springer, 1996.
- [6] « Le labrador de Francis Cabrel aurait été opéré ». In : *Médiamass* (2022).
- [7] « Programme de l'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de terminale de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm>.
- [8] « Programme de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires de la classe de terminale de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019* (2019). URL : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921265A.htm>.
- [9] Victor RABIET. « Du vocabulaire courant en probabilité à une axiomatisation rigoureuse ». In : *CultureMath* (2020). URL : <https://culturemath.ens.fr/thematiques/probabilites/du-vocabulaire-courant-en-probabilite-a-une-axiomatisation-rigoureuse>.