



HAL
open science

Implémentation pratique de codes éléments finis

Théodore Cherrière

► **To cite this version:**

Théodore Cherrière. Implémentation pratique de codes éléments finis. Master. Gif sur Yvette, France. 2022. hal-04213864

HAL Id: hal-04213864

<https://hal.science/hal-04213864>

Submitted on 25 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Implémentation pratique de codes éléments finis

M2 PIE – M2 CAT

Sommaire

- Introduction
- 1) Formulation du problème électrostatique
- 2) Maillage
- 3) Assemblage
- 4) Imposition des contraintes
- 5) Calcul
- 6) Post-traitements
- 7) Traitement des non-linéarités
- Conclusion, ouverture

Introduction

- Pourquoi cette séance ?

- Permettre de mieux comprendre ce qu'il se passe dans un logiciel EF
- Mieux utiliser les logiciels open-source ou « ouvert »
- Donner les bases d'implémentation de la méthode (au cas où vous en ayez besoin pour plus tard...)
- Peut aider pour l'examen



FreeFem++
Femm
OneLab
FEniCS
Cast3m

Ansys Autodyn	\$59K
Ansys Autodyn PrepPost	\$4K
Ansys Autodyn Single Task	\$27K
Ansys Composite PrepPost	\$12K
Ansys Design Space	\$5K
Ansys Explicit STR	\$13K
Ansys Fatigue Module	\$4K
Ansys Mechanical	\$22K
Ansys Mechanical CFD-Flo	\$29K
Ansys Mechanical Emag	\$29K
Ansys Mechanical PrepPost	\$9K
Ansys Mechanical Solver	\$22K
Ansys Multiphysics Solver	\$43K
Ansys Professional NLS	\$10K
Ansys Professional NLT	\$8.5K
Ansys Rigid Body Dynamics	\$4K
Ansys Structural	\$18K
Ansys Structural Solver	\$15K

*Prix licences Ansys 2013
mécanique uniquement !*

<https://www.howmuchisit.org/how-much-does-ansys-cost/>

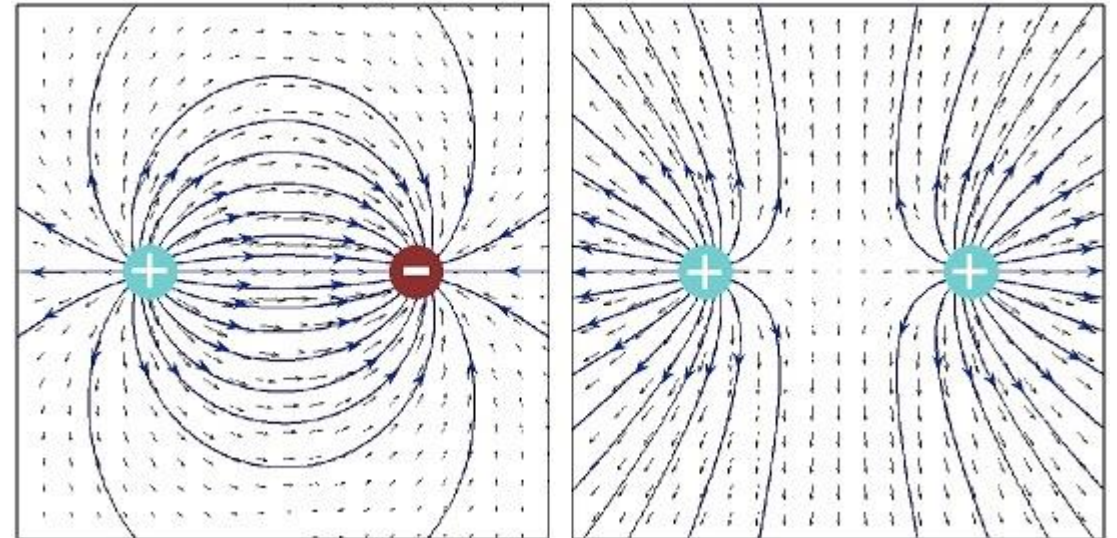
1) Formulation du problème

Exemple de l'électrostatique (cas le plus simple en EF)

- Equations de Maxwell :
 - $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$
 - $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$

Equation de comportement :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$



Si le matériau est linéaire, $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ d'où $\vec{D} = \epsilon_0 \underbrace{(1 + \chi)}_{\epsilon_r} \vec{E}$

1) Formulation du problème

- On obtient assez facilement deux équations:

- $\text{div}(\epsilon \vec{E}) = \rho$

- $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \quad \Rightarrow \exists V, \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$
???

Justification : Théorème de Helmholtz Hodge

$$\forall \vec{U}, \exists \vec{A}, \exists \phi, \text{ tel que } \vec{U} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

On a une expression (pas unique) de cette décomposition qui fait intervenir $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{U}$ dans l'expression de \vec{A} et $\text{div} \vec{U}$ pour ϕ .

1^{er} problème : 2 équations, une seule « inconnue » \vec{E} .

Solution : on introduit le potentiel scalaire électrique V

Certaines hypothèses non détaillées sont nécessaires, notamment sur la topologie du domaine où $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$.

1) Formulation du problème

- On obtient l'**équation forte** du problème :

$$-\operatorname{div}(\epsilon \overrightarrow{\operatorname{grad}} V) = \rho$$



L'utilisation du potentiel V est très pratique :

- **Réduction du nombre d'équations** : imposition **forte** d'une contrainte.
- **Réduction du nombre d'inconnues** (vecteur \rightarrow scalaire)

On résout directement ?

- Si ϵ scalaire et constant : **équation de Poisson**, qu'on peut résoudre avec les différences finies.
- Si ϵ matriciel ou variable, c'est plus compliqué...
- Si le domaine est un peu tordu, c'est compliqué de faire les différences finies...

1) Formulation du problème

Formulation faible

La méthode des éléments finis se base sur la résolution de la **formulation faible** du problème, qui est le **projeté** de l'équation forte sur une **base de fonctions tests** v :

$$\forall v \in H, \quad \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\epsilon \overrightarrow{\operatorname{grad}} V) + \int_{\Omega} v \rho = 0$$

H est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f g$.

Les théorèmes de Lax-Milgram et/ou Stampacchia garantissent l'existence d'une solution unique.

1) Formulation du problème

Formulation faible

On a des dérivées secondes ($\text{div } \overrightarrow{\text{grad}}$), on préfère avoir des dérivées simples. Pour cela, on utilise:

- $u \cdot \text{div}(\vec{v}) = \text{div}(u \vec{v}) - \overrightarrow{\text{grad}}(u) \cdot \vec{v}$ (formule de Leibniz)
- $\int_{\Omega} \text{div}(\vec{v}) = \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n}$ (théorème de la divergence)

Pour obtenir :

Terme de bord

$$\forall v \in H, \int_{\partial\Omega} v \in \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{n} - \int_{\Omega} \epsilon \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v + \int_{\Omega} v \rho = 0$$

1) Formulation du problème

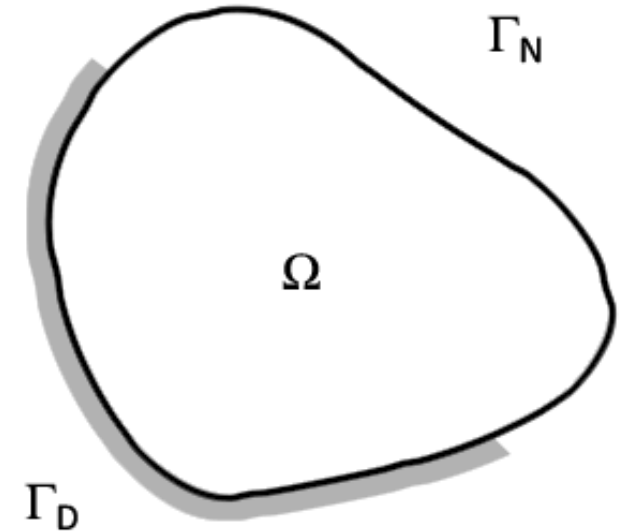
Conditions limites

Dans de nombreux cas (mais pas toujours), le terme de bord est nul. C'est le cas des conditions limites:

- De **Dirichlet** :
 - V est fixé mais pas $\overrightarrow{\text{grad}} V$, donc v est imposée nulle.
 - La dimension de l'espace fonctionnel H est donc « restreinte ».
- De **Neumann homogène** :
 - V n'est pas fixé, donc c'est l'autre terme $\overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{n}$ qui doit être nul.
 - La dimension de l'espace n'est pas restreinte, V reste une inconnue.

On obtient donc:

$$\forall v \in H, \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}}(v) \cdot \epsilon \overrightarrow{\text{grad}} V - \int_{\Omega} v \rho = 0$$



Problème : tout cela est bien beau, mais cela reste un **problème continu**.

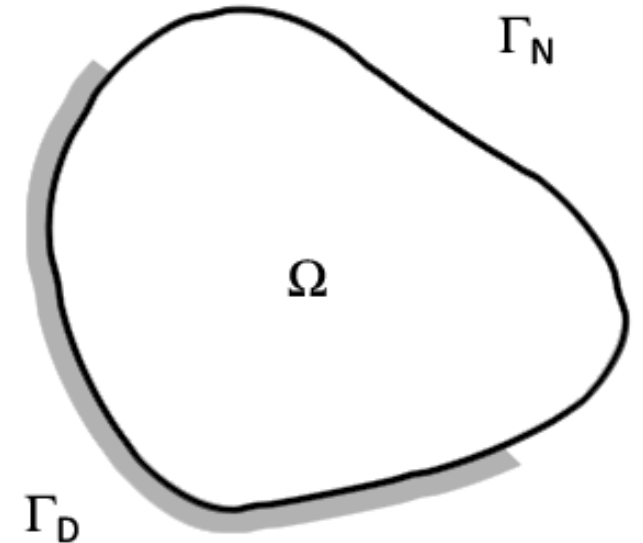
1) Formulation du problème

On suppose qu'on veut résoudre un **problème électrostatique** sans termes de bord, qui s'écrit :

$$\forall v \in H, \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}}(v) \cdot \epsilon \overrightarrow{\text{grad}} V - \int_{\Omega} v \rho = 0$$

Avec V le potentiel scalaire électrique, et v les fonctions tests appartenant à l'espace de Hilbert H , nulles sur Γ_D ; cf cours.

Problème : cela reste un **problème continu** qu'il faut discrétiser.

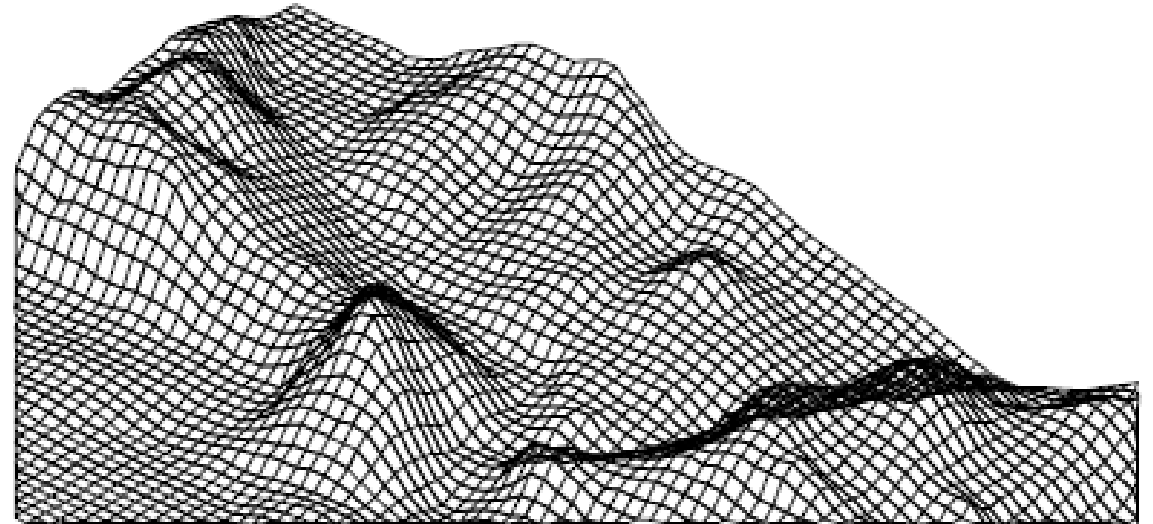


1) Formulation du problème

Discrétisation

Il faut discrétiser deux choses :

- Les fonctions tests v
- L'inconnue du problème V



Le plus simple est de discrétiser le support de ces fonctions Ω (espace géométrique) en un pavage de polygones.

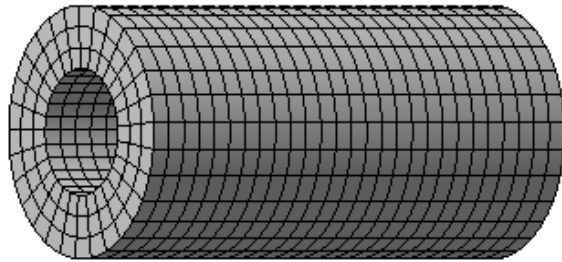
C'est l'étape de *maillage*.

2) Maillage

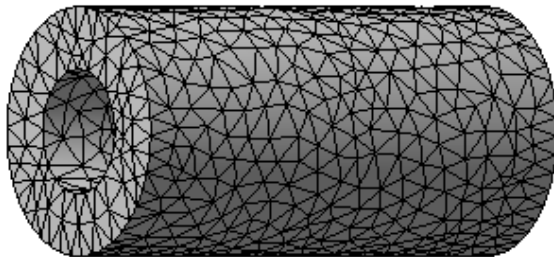
Ensemble de *polygones* qui *discrétisent* un espace continu.

Il en existe une grande diversité. Un même maillage peut contenir différents types de polygones.

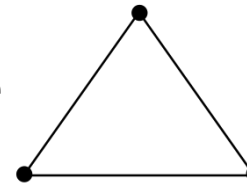
Structuré :



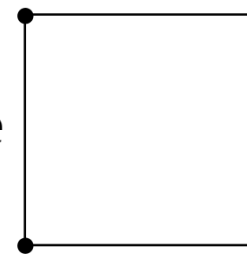
Non structuré :



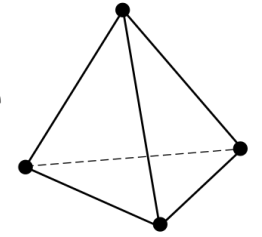
triangle



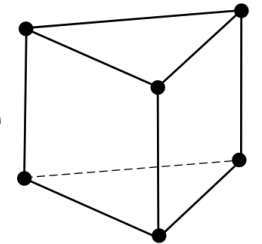
quadrilatère



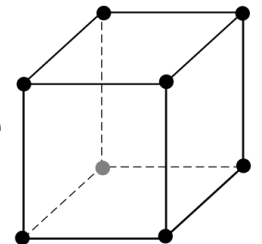
tétraèdre



prisme



hexaèdre



2) Maillage

Ces polygones sont pleinement caractérisés par les coordonnées de leurs sommets.
La représentation informatique d'un maillage contient deux éléments de base :

- La **liste des coordonnées** des nœuds
- La **table de connectivité** du maillage = sommets des polygones

Ex 2D, triangles :

liste de coordonnées des nœuds

	1 X	2 Y
1	0	0
2	0.3000	0
3	0.3000	0.2000
4	0	0.2000
5	0.1000	0.0600

Table de connectivité

	1	2	3
1	313	564	722
2	535	359	728
3	70	71	583
4	59	60	676
5	359	535	716
6	531	540	610
7	207	594	708

Ex : Élément n°1 constitués des nœuds 313, 564 et 722, dont les coordonnées peuvent être trouvées resp. à la 313^e, 564^e et 722^e lignes de la liste des coordonnées des nœuds.

Ex maillieurs gratuits : GMSH, Netgen, mmg3d, Triangle (mailleur de FEMM)...

2) Maillage

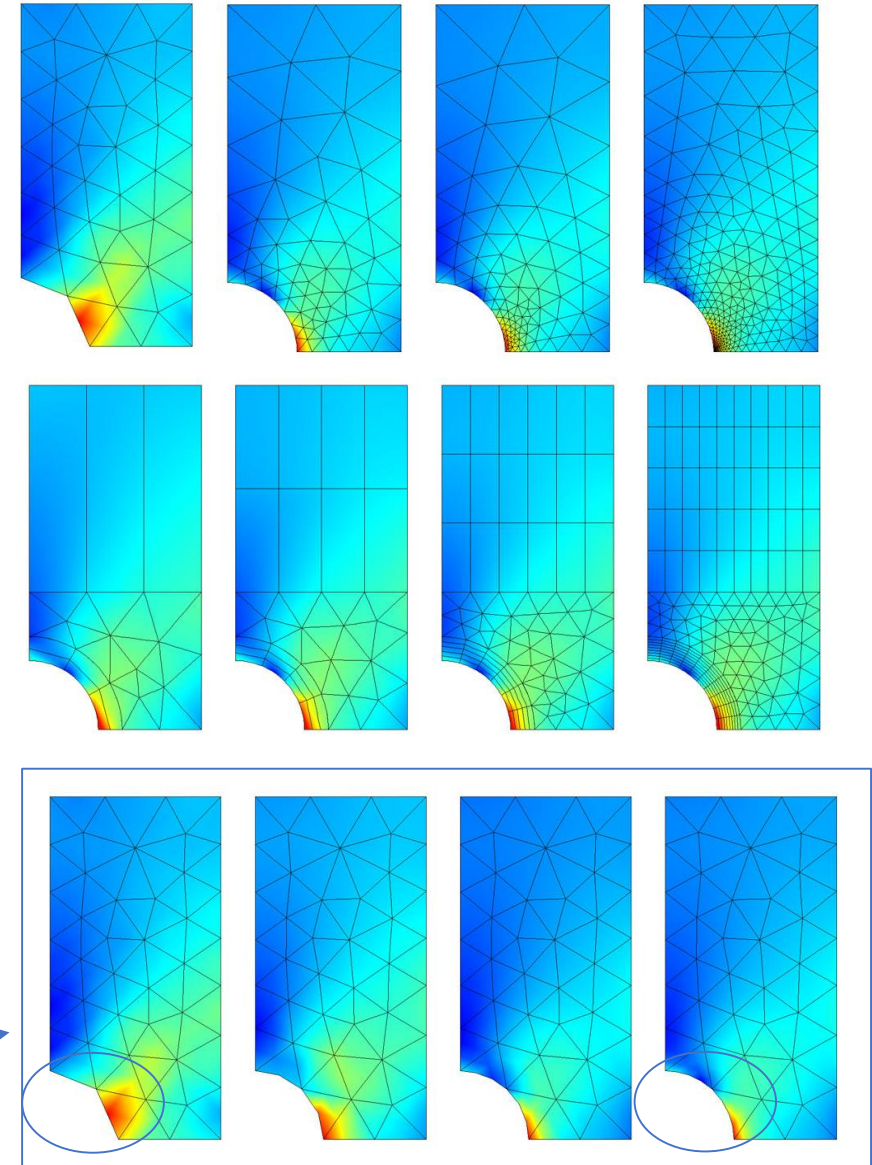
Le maillage est une **étape très importante**, c'est l'élément principal qui déterminera la qualité de la solution dans les logiciels commerciaux.

- Souvent, des étapes de **remailage** sont nécessaires, et peuvent être réalisées de manière automatique.
- Il faut **mailler finement** les zones soumises à de fortes variations de champ, en particulier au voisinage d'une singularité.

Mais le « maillage » ne fait pas tout ...



Ex tirés du site de Comsol



3) Assemblage

- Retour sur la formulation faible discrétisée sur les N_{elt} polygones T_k .

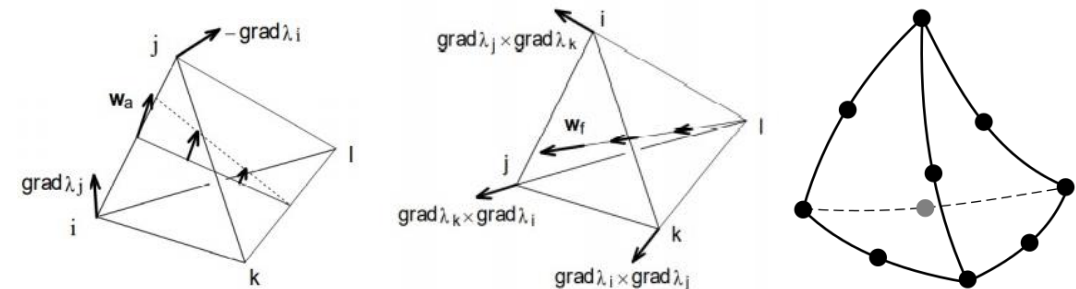
$$\forall v \in H, \sum_{k=1}^{N_{elt}} \int_{T_k} \overrightarrow{\text{grad}}(v) \cdot \epsilon \overrightarrow{\text{grad}} V_{T_k} - \int_{T_k} v \rho = 0$$

Il faut désormais discrétiser (et choisir) la base des v , ainsi que V .

Méthode de Galerkin : on choisit d'exprimer V sur la base des v . On a donc fonctions tests = fonctions d'interpolation (ou de forme)

On peut jouer sur :

- Leur type (Whitney, XFEM,...)
- Leur ordre



Il est important de choisir une base de fonctions adaptée au problème !

3) Assemblage

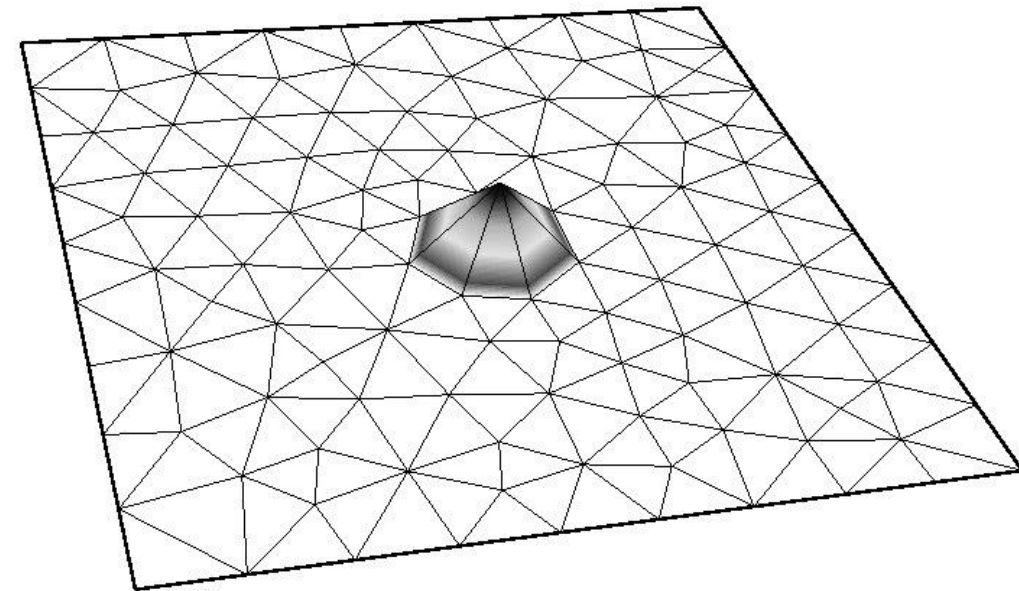
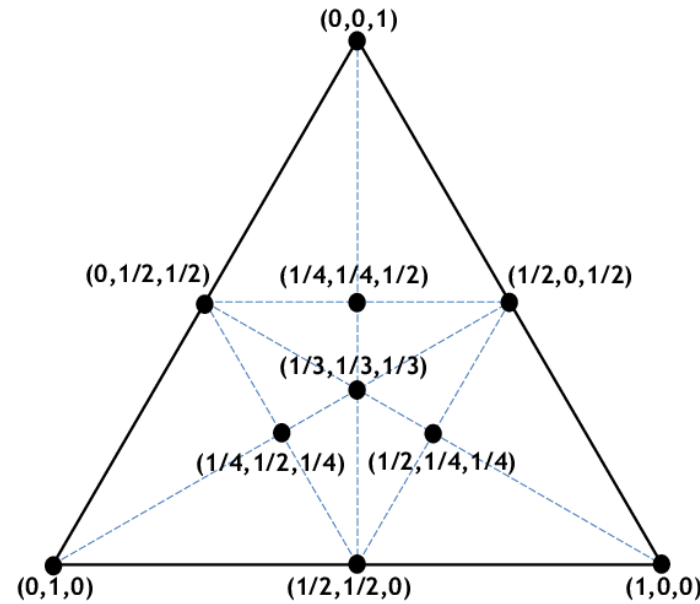
- En électrostatique, on choisit comme fonction d'interpolation les **coordonnées barycentriques** associées à un nœud sur les éléments adjacents (cf cours!).

Dans un élément T_k :

$$V_{T_k}(x, y) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(x, y) V_{i_{T_k}}$$

Potential inconnu au nœuds i de l'élément T_k

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \lambda_i(x, y) = 1 \\ \sum_{i=1}^3 \lambda_i(x, y) x_i = x \\ \sum_{i=1}^3 \lambda_i(x, y) y_i = y \end{array} \right.$$



3) Assemblage

- On peut alors projeter l'équation faible sur chaque fonction test :

$$\forall \mathbf{v}_i \in H_d, \quad \sum_{k=1}^{N_{elt}} \int_{T_k} \overrightarrow{\text{grad}}(\mathbf{v}_i) \cdot \epsilon \overrightarrow{\text{grad}} V_{T_k} - \int_{T_k} \mathbf{v}_i \rho = 0$$

On obtient autant d'équations que de nœuds : système matriciel $A \mathbf{V} = B$

Comment l'obtenir en pratique?

- **Idée 1** : Naïvement, on fait pour chaque nœud la somme de toutes les intégrales sur tous les éléments.

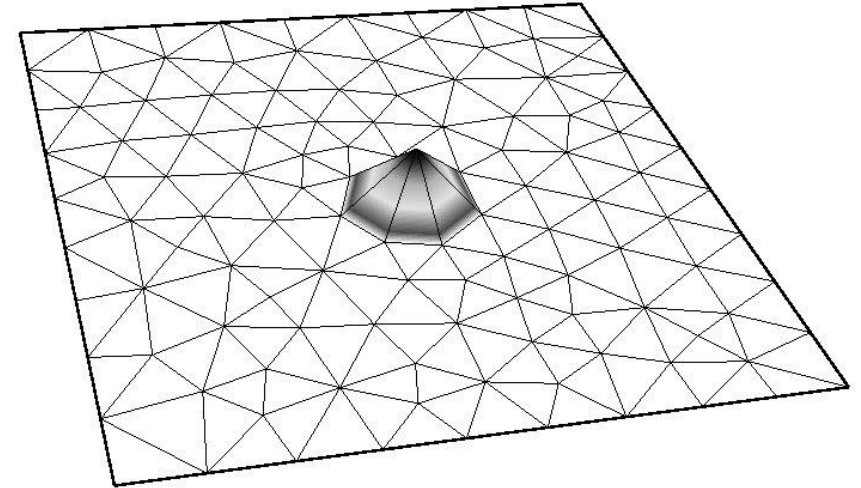
Problème :

Complexité : $\mathcal{O}(N_{elts} \times N_{noeuds})$; or $N_{elts} \propto N_{noeuds} \# 10^{5-6}$

3) Assemblage

- **Idée 2** : On remarque que les v_i ont un **support limité**. Pour chaque nœud, on veut se limiter au calcul des intégrales non nulles, sur les éléments adjacents au nœud i .

On peut réécrire l'équation faible :



$$\forall v_i \in H_d, \quad \sum_{k_i=1}^{N_i} \int_{T_{k_i}} \overrightarrow{\text{grad}}(v_i) \cdot \epsilon \overrightarrow{\text{grad}} V_{T_{k_i}} - \int_{T_{k_i}} v_i \rho = 0$$

Somme sur les éléments adjacents

Numérotation locale, qui dépend du nœud considéré.

Complexité en $O(N_{noeuds})$

Problème : il faut déterminer les éléments adjacents au nœud i (en nombre variable) : pénible.

3) Assemblage

- **Idée 3** : Au lieu de trouver les éléments adjacents à un nœuds, on trouve les nœuds qui appartiennent à un élément. On fait donc :

Contribution de l'élément T_k
à la matrice EF

Contribution de l'élément T_k
au second membre

$$\forall T_k \in \Omega_d, \text{ calculer : } \int_{T_k} [\overrightarrow{\text{grad}}(v_{i_k}) \cdot \epsilon \overrightarrow{\text{grad}} V_{T_k}] \quad \text{et} \quad \int_{T_k} [v_{i_k} \rho]$$

Complexité en $O(N_{elts})$

Numérotation locale
à l'élément T_k

Une fois toutes ces contributions calculées, il faut les **assembler** !

3) Assemblage

Matrice  l mentaire

Pour des éléments triangulaires, on a trois contributions par élément du type :

$$\int_{T_k} [\overrightarrow{\text{grad}}(v_{i_k}) \cdot \epsilon \overrightarrow{\text{grad}} V_k]$$

On peut écrire le produit scalaire dans l'intégrale comme le produit :

$$[\overrightarrow{\text{grad}}(v_{i_k})]^T \epsilon \overrightarrow{\text{grad}} V_k$$

On peut facilement calculer $[\overrightarrow{\text{grad}}(v_{i_k})]$ et $\overrightarrow{\text{grad}} V_k$ dans un *** l ment de référence***.

3) Assemblage

Matrice élémentaire

On rappelle, dans un élément T_K :

- $v_{i_K}(x, y) = \lambda_i(x, y)$
- $V_{T_K}(x, y) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(x, y) V_{i_K}$

2 niveau de numérotation :
locale et globale

$$\vec{\nabla} \lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \lambda_3 = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

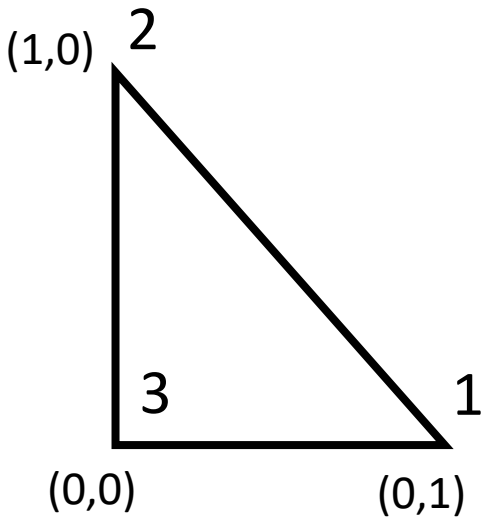
Vecteur
d'inconnues
locales à T_K
 $[V_{1K}, V_{2K}, V_{3K}]^T$

Dans ce cas *simple*, on a :

- $\lambda_1(x, y) = x$
- $\lambda_2(x, y) = y$
- $\lambda_3(x, y) = 1 - x - y$

\Rightarrow

$$\vec{\nabla} V = \sum_{i=1}^3 \vec{\nabla} \lambda_i(x, y) V_{i_K} = G \mathbf{V}_K = cste$$



$\widetilde{T}_K = \text{Élément de référence}$

3) Assemblage

Matrice élémentaire

- Les trois projections dans l'élément de référence T_K s'écrivent :

$$\begin{cases} \int_{T_K} [\vec{\nabla} \lambda_1]^T \in G V_k \\ \int_{T_K} [\vec{\nabla} \lambda_2]^T \in G V_k \\ \int_{T_K} [\vec{\nabla} \lambda_3]^T \in G V_k \end{cases}$$

Que vaut le résultat analytique de l'intégrale ?

$$\int_{\widetilde{T}_K} 1 = \int_{\lambda_2=0}^1 \int_{\lambda_1=0}^{1-\lambda_2} 1 \, d\lambda_1 \, d\lambda_2$$

On trouve l'aire du triangle = 1/2

Elles peuvent s'écrire sous la forme d'un produit **d'une matrice élémentaire M_K** avec le vecteur d'inconnues local V_K :

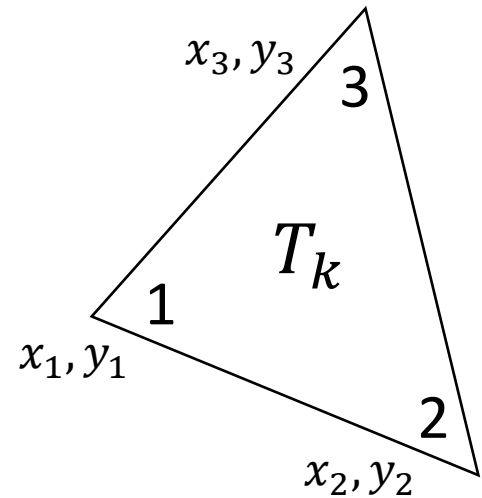
$$\frac{1}{2} \overbrace{G^T}^{M_K} \in G V_K$$

Et lorsque T_K est un triangle quelconque différent de l'élément de référence ?

3) Assemblage

Matrice élémentaire

Si T_K est un triangle quelconque, il faut effectuer un changement de variable dans l'intégrale pour se ramener à l'élément de référence \widetilde{T}_K



$$\int_{T_K} G_k \in G_k V_K = \int_{\widetilde{T}_K} \overbrace{|\det J_k| G^T J_k^{-1 T} \in J_k^{-1} G V_K}^{cste}$$

$$= \frac{|\det J_k|}{2} G^T J_k^{-1 T} \in J_k^{-1} G V_K$$

D'où $M_K = \frac{|\det J_k|}{2} G^T J_k^{-1 T} \in J_k^{-1} G$

J_k est la matrice jacobienne :

$$J_k = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix}$$

3) Assemblage

Explication jacobienne :

$$\begin{cases} x = x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + x_3\lambda_3 \\ y = y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2 + y_3\lambda_3 \\ \lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial y}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix}$$

Constante par élément

Gradient dans les coordonnées barycentriques

$$G = \overrightarrow{\text{grad}}_{\lambda}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial y}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = J \overrightarrow{\text{grad}}_x$$

« Vrai » gradient dans les coordonnées x-y

$$D'où : \overrightarrow{\text{grad}}_x = J^{-1}G$$

On applique ensuite la formule de changement de variables :

$$\iint_{T_k} f(x, y) dx dy = \iint_{\tilde{T}_k} f(g(\lambda_1, \lambda_2)) \underbrace{|\det J_g(\lambda_1, \lambda_2)|}_{\text{Constante } J_g = J} d\lambda_1 d\lambda_2 = \boxed{|\det J_k| f(g(\lambda_1, \lambda_2)) \iint_{\tilde{T}_k} 1 d\lambda_1 d\lambda_2}$$

Calcul précédent

$GJ^{-T} \in J^{-1}G V_K$ **constante**

3) Assemblage

Second membre élémentaire

Les trois projections dans l'élément de référence T_K s'écrivent :

$$\begin{cases} \int_{T_K} \lambda_1 \rho \\ \int_{T_K} \lambda_2 \rho \\ \int_{T_K} \lambda_3 \rho \end{cases}$$

Que vaut le résultat analytique de l'intégrale ?

$$\int_{\widetilde{T}_K} \lambda_1 = \int_{\lambda_2=0}^1 \int_{\lambda_1=0}^{1-\lambda_2} \lambda_1 d\lambda_1 d\lambda_2$$

On trouve 1/6 pour les 3 intégrales

Elles peuvent s'écrire sous la forme d'un vecteur élémentaire : $\frac{1}{6} \rho \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Et lorsque T_K est un triangle quelconque différent de l'élément de référence ?

3) Assemblage

Second membre élémentaire

Si T_K est un triangle quelconque, il faut effectuer un changement de variable dans l'intégrale par rapport à celle dans l'élément de référence \widetilde{T}_K

$$\int_{T_K} \lambda \rho = \int_{\widetilde{T}_K} \lambda \rho |\det J| = \frac{|\det J|}{6} \rho \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a donc les contributions de chaque élément au système global sous forme de matrice et de vecteur élémentaire.

3) Assemblage

Cas général (éléments quelconques (quadrangles, etc) et/ou d'ordre ≥ 1)

- Le calcul analytique précédent n'est possible que dans le cas de **triangles d'ordre 1**. Si ce n'est pas le cas, on utilise :
 - Le formalisme des éléments **isoparamétrique** : expression de la « déformation » de l'élément à l'aide des **fonctions de formes** N (données par la littérature avec leurs dérivées) → **J n'est plus constante**
 - La méthode de calcul d'intégrale par **quadrature de Gauss** → nécessite les coordonnées de **points de Gauss** λ_G dans l'élément de référence et des **poïds associés** w_G (donnés dans la littérature)

En pratique les formules sont presque les mêmes. La procédure est la suivante :

1. Calcul de J aux points de Gauss : $J_{Gij} = \sum_{k \in \text{noeuds}} \frac{\partial N_k(\lambda_G)}{\partial \lambda_i} x_{kj}$ ← Coordonnées des noeuds $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$

2. Calcul des matrices / second membre élémentaires par une somme sur les points de Gauss :

$$\int \frac{\partial N(\lambda)^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial N(\lambda)}{\partial x} |\det J(\lambda)| d\tilde{v} = \sum_{G \in p. \text{ de Gauss}} w_G \frac{\partial N(\lambda_G)^T}{\partial \lambda} \cdot J_G^{-T} J_G^{-1} \frac{\partial N(\lambda_G)}{\partial \lambda} |\det J_G|$$

3) Assemblage

On a calculé les contributions élémentaires. **Comment construire le système global ?**

- i^e ligne de la matrice élémentaire = projection sur la fonction test associée au i^e sommet dans la numérotation locale de l'élément.
- j^e colonne associée à l'inconnue associée au j^e sommet dans la numérotation locale de l'élément.

➤ **Lien entre numérotation locale et globale ?** → table de connectivité

Obtention de la matrice EF et du second membre par somme de ses termes élémentaires.

$$\begin{bmatrix} M_{K11} & M_{K12} & M_{K13} \\ M_{K21} & M_{K22} & M_{K23} \\ M_{K31} & M_{K32} & M_{K33} \end{bmatrix}$$

Matrice élémentaire de l'élément K

	1	2	3
⋮	⋮	⋮	⋮
K^e ligne	n_1	n_2	n_3
⋮	⋮	⋮	⋮

Table de connectivité
(issue du maillage)

theodore.cherriere@ens-paris-saclay.fr

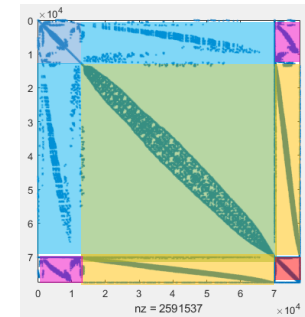
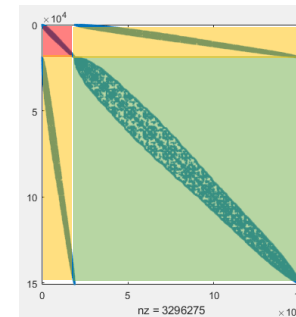
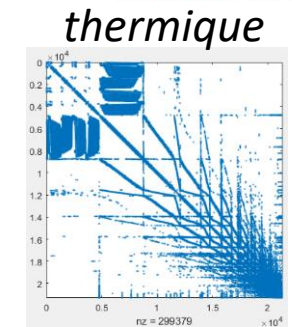
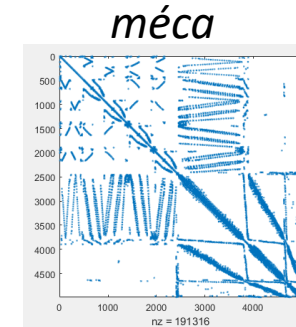
$$n_1 \begin{bmatrix} \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \dots & \dots & +M_{K13} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Matrice élément finis

3) Assemblage

Optimisations :

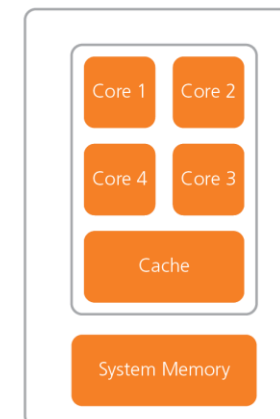
- **Mémoire** : matrices EF creuses, on la stocke sous forme de « sparse matrix » : seuls les éléments non nuls sont stockés, avec leur position dans la matrice.
- **Parallélisation** : Calcul des matrices élémentaires indépendants, qui peuvent être lancés en même temps sur plusieurs cœurs de calculs (notamment sur GPU)



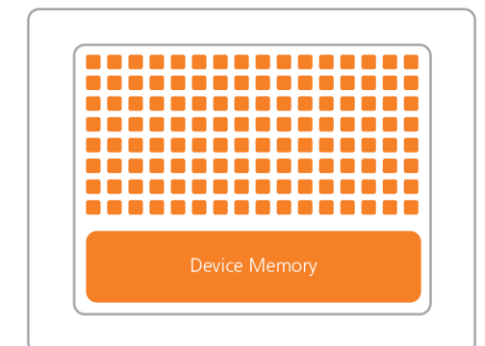
Magnéto-dynamique

Magnéto-électrique

CPU (Multiple Cores)



GPU (Hundreds of Cores)

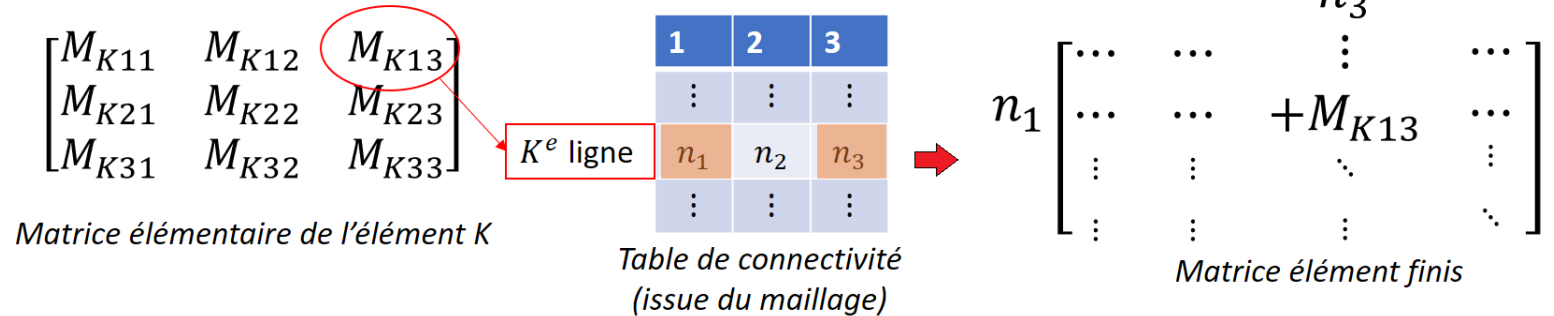


3) Assemblage

Résumé : On procède élément par élément:

- $J_k = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix}$
- $M_k = \frac{|\det J_k|}{2} G^T J_k^{-1 T} \epsilon J_k^{-1} G$
- $b_k = \frac{|\det J|}{6} \rho \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Puis on assemble le système global élément par éléments à l'aide de la table de connectivité du maillage.



Exemples Matlab

Comparaison code naïf et code optimisé.

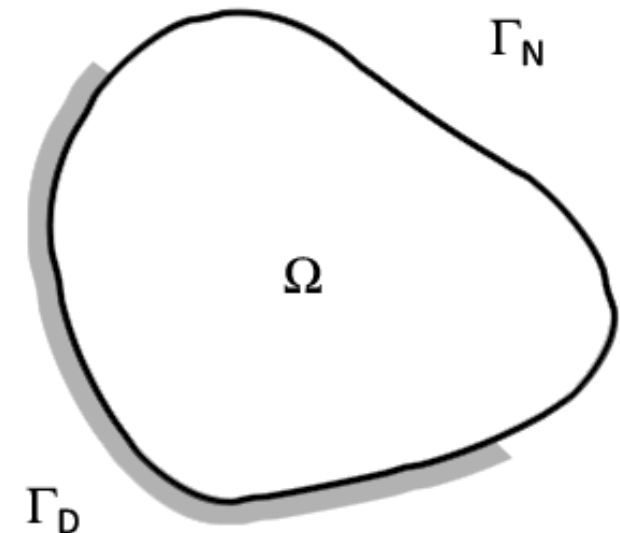
- [Assemblage naïf](#) (boucle for)
- [Assemblage optimisé](#)

4) Imposition des contraintes

Situation : Après l'assemblage, on doit inverser une matrice carrée de taille N mais **de rang** $< N$

Il faut prendre en compte des **conditions limites** et/ou d'autres contraintes pour pouvoir résoudre.

- **Condition de Neumann** : on n'a rien de plus à faire, l'annulation du terme de bord entraîne naturellement $\text{grad } V \cdot \vec{n} = 0$
- **Conditions de Dirichlet et autres contraintes linéaires** : Plusieurs méthodes sont possibles.



4) Imposition des contraintes

Substitution

- **Idée intuitive** (Dirichlet) : on connaît certaines inconnues du système :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_D \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}\mathbf{x}_D + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}\mathbf{x}_D + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}\mathbf{x}_D + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

On a un système à 3 équations mais 2 inconnues.

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 - a_{11}\mathbf{x}_D \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 - a_{21}\mathbf{x}_D \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 - a_{31}\mathbf{x}_D \end{cases}$$

Une ligne est combinaison linéaire des autres ! **Peut-on supprimer n'importe laquelle?**

4) Imposition des contraintes

Substitution

NON ! Contre-exemple simple : $\begin{cases} l_1 \\ l_2 \\ 2l_2 \end{cases}$, si on supprime l_1 on ne peut pas résoudre.

Condition d'annulation du terme de bord : **la fonction test associée à un nœud de Dirichlet est nulle.**

L'information de la projection sur cette fonction test est donc inutile (elle vaut 0 !). Or la projection sur une fonction test i_D est associée à la ligne i_D de la matrice. Ici, $i_D = 1$:

$$\begin{cases} \cancel{a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 - a_{11}x_D} \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 - a_{21}x_D \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 - a_{31}x_D \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancel{x_D} \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{b_1} \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 - a_{21}x_D \\ b_3 - a_{31}x_D \end{bmatrix}$$

La nouvelle matrice EF est égale à l'ancienne à laquelle on a enlevé la i_D^e ligne et la i_D^e colonne.

Attention : Le second membre change aussi !

4) Imposition des contraintes

Substitution

Et pour les conditions autres contraintes linéaires?

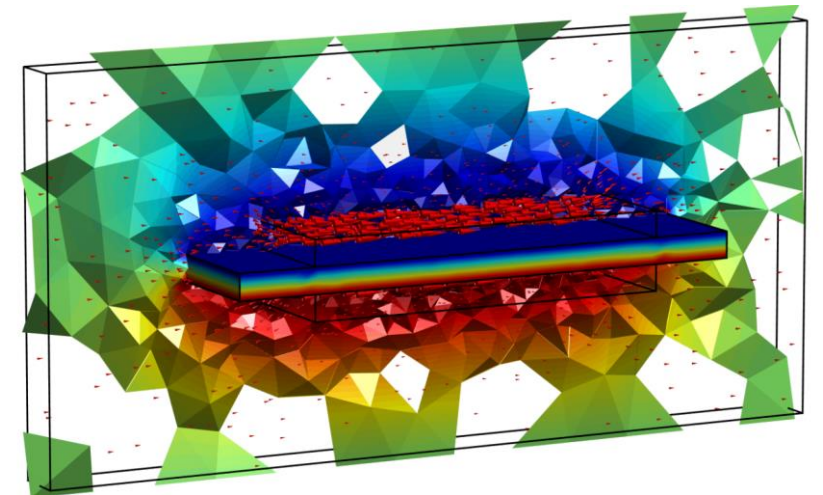
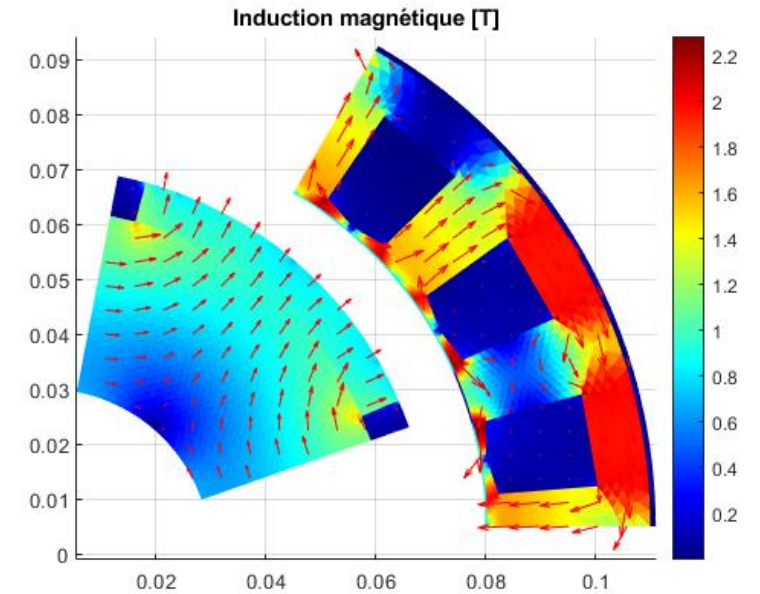
- périodicité (champ dans les machines électriques)
- égalité (potentiel sur une électrode)
- ...

On peut les écrire sous la forme :

$$C x = d$$

C n'est pas carrée, elle comporte autant de lignes que de contraintes.

L'idée générale de la substitution est de ***réduire la dimension du système en exprimant certaines inconnues en fonction des autres.***



4) Imposition des contraintes

Substitution (méthode générale)

On réécrit les contraintes $Cx = d$ sous la forme :

Inconnues qui seront éliminées $v = C_S u - d_S$

- On peut réorganiser les inconnues et le système pour avoir $x = \begin{bmatrix} u \\ C_S u - d \end{bmatrix}$
- La solution de $\begin{bmatrix} A_{uu} & A_{uv} \\ A_{vu} & A_{vv} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_u \\ b_v \end{bmatrix}$ minimise aussi « l'énergie » :

$$E = \frac{1}{2} x^T A^T x - b^T x$$

Le résultat de la minimisation de E donne pour A symétrique :

Dans le cours on a vu la version « continue » de l'énergie sous la forme d'une fonctionnelle :

$$J(v) = \frac{1}{2} \langle Av, v \rangle - \langle b, v \rangle$$

$$\boxed{[A_{uu} + A_{uv}C_S + C_S^T A_{vu} + C_S^T A_{vv}C_S]u = [b_u + C_S^T b_v + A_{uv}b_v + C_S^T A_{vv}b_v]}$$

4) Imposition des contraintes

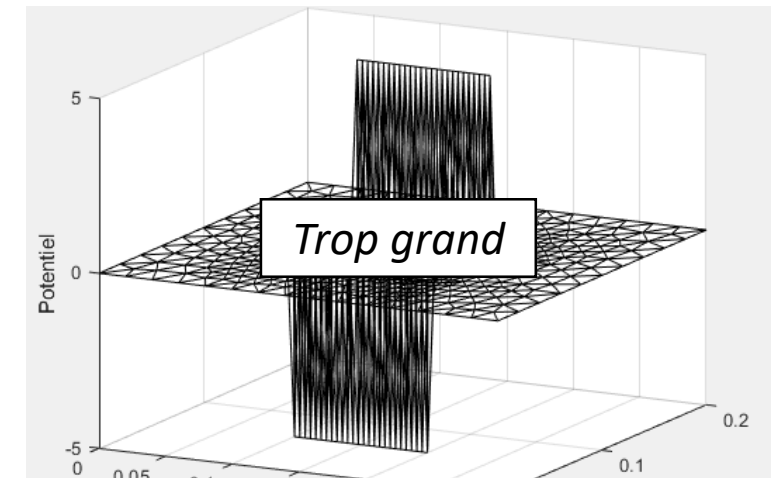
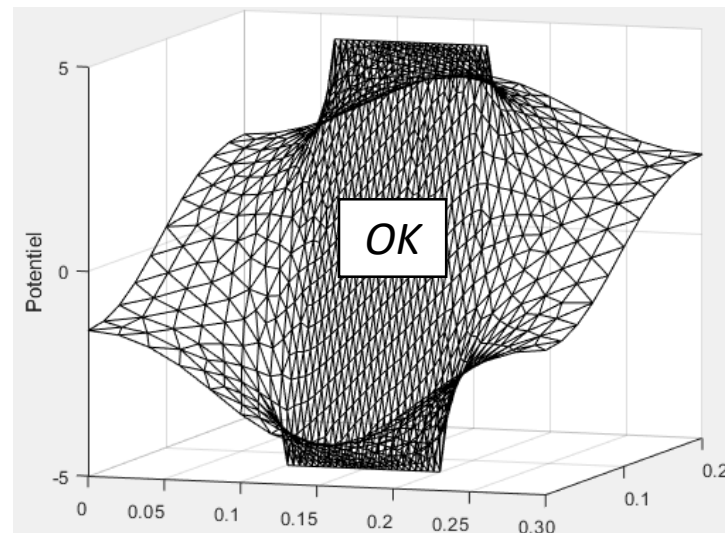
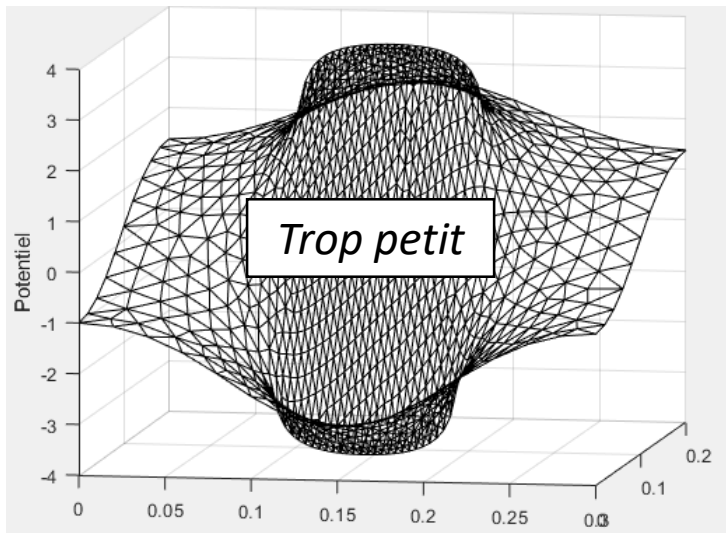
Pénalisation

Le principe est toujours de minimiser E , à laquelle on a rajouté un terme qui pénalise plus ou moins fortement toute solution qui s'éloigne des contraintes par un coefficient g . C'est la solution **la plus simple**, mais pas la plus robuste...

$$E = \frac{1}{2} x^T A^T x - x^T b + \frac{1}{2} g (Cx - b)^T (Cx - b) \Rightarrow [A + g C^T C]x = b + g C^T b$$

Problème : choix de g ...

EXEMPLE MATLAB



Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may be inaccurate. RCOND = 2.636848e-23.

4) Imposition des contraintes

Multiplicateurs de Lagrange

Méthode tirée de l'optimisation sous contrainte.

On cherche le point selle du Lagrangien défini par :

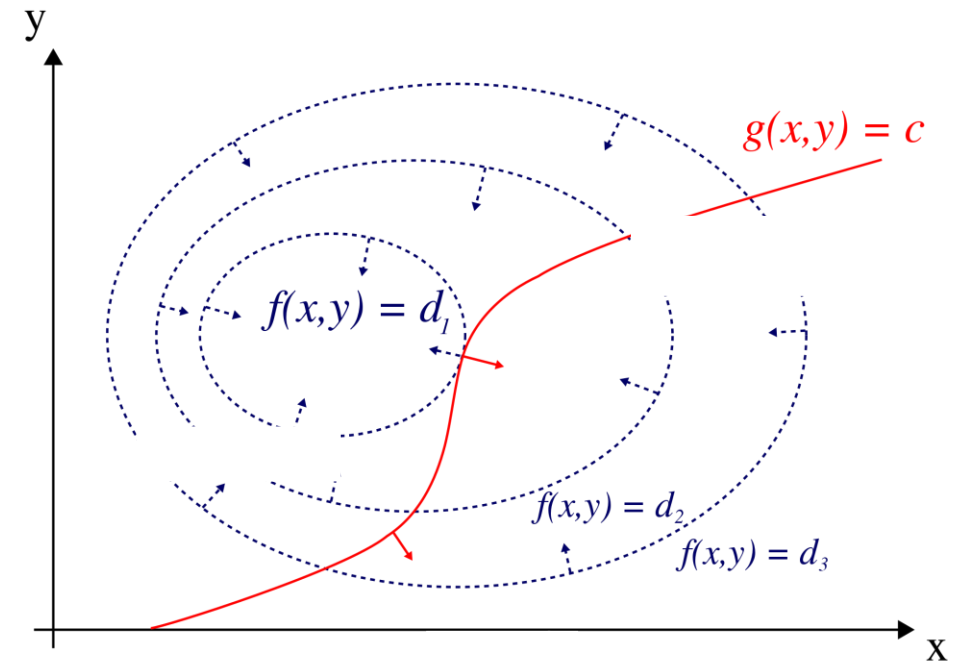
$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2} x^T A^T x - x^T b + \lambda^T (Cx - d)$$

$$\nabla L = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = Ax - b + C^T \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = Cx - d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} A & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}}$$

λ est appelé « multiplicateur de Lagrange », et sa valeur peut avoir une signification physique (grandeur **duale**). Dimensionnellement : λ est la **grandeur conjuguée** de x car le produit de λ et x donne une énergie. Cela peut permettre d'obtenir ces grandeurs intéressantes sans post-traitement ; mais cela *rajoute des inconnues*.

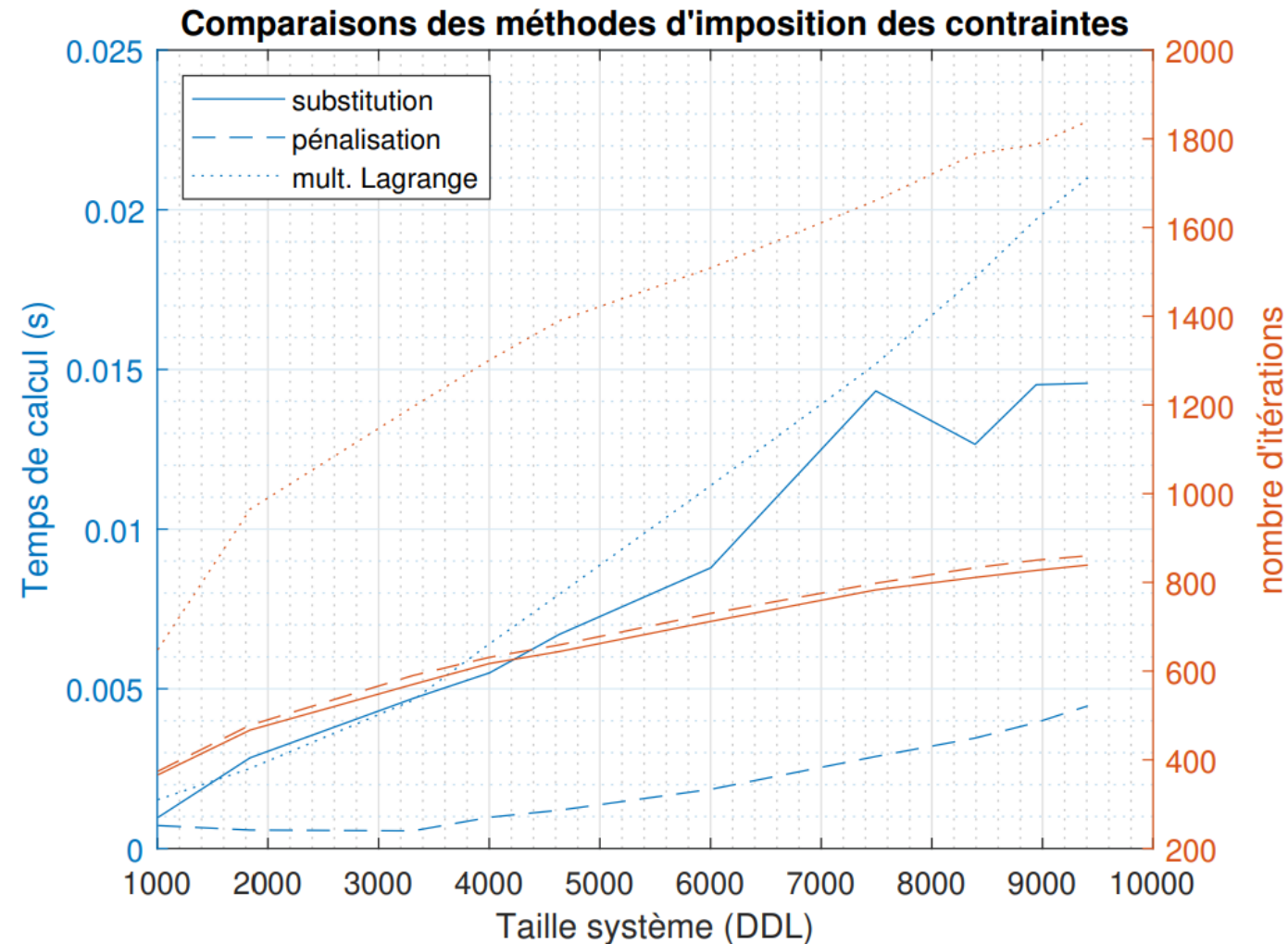
Géométriquement :



Amélioration possible : Lagrangien augmenté (mélange de Lagrange et pénalisation).

4) Imposition des contraintes

Comparaison



Pour un solveur itératif (qmr)

5) Calcul

Deux types de solveurs

Ces solveurs ne calculent **jamais** directement l'inverse de la matrice du problème EF car ce serait *trop lent* et *gourmand en mémoire*!

	Directs	Itératifs (Krylov)
Avantages	Plus stables , rapide pour les petits systèmes ; peu sensible au conditionnement	Souvent plus rapide lorsque les systèmes sont grands , pas besoin de jauge (1)
Inconvénients	Inadaptés aux gros systèmes complexité en n^3 (2) Inadapté si grande largeur de bande	Très sensible au conditionnement : nécessite un préconditionneur
Exemples	LU, Cholesky	Gradient conjugué, QMR

Règle simple : direct pour 1D /2D — itératif pour 3D (3).

Bibliothèque de solveurs gratuits (C/C++) open source : **PETSc** <https://www.mcs.anl.gov/petsc/documentation/linearsolvertable.html>

(1) Z.Ren, [Influence of the RHS on the convergence behaviour of the curl-curl equation](#)

(2) http://mms2.ensmp.fr/ef_paris/technologie/transparents/systemes_lineaires_vc.pdf

(3) <http://www.sam.math.ethz.ch/~mhg/talks/KSS05.pdf> 25/09/2023 theodore.cherriere@ens-paris-saclay.fr

5) Calcul

Préconditionnement

Objectif : Donner au solveur itératif une matrice « facile à inverser » sans changer le problème

Qu'est ce que le conditionnement ?

- D'un *problème* : $\frac{|P(x+\epsilon) - P(x)|}{|P(x)|} \leq \text{cond}(P)\epsilon + o(\epsilon)$
- D'une *matrice* : $\text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$, dépend de la norme choisie.

Les deux sont reliés !

ϵ provient des erreurs d'arrondis de tout ordinateur !

Principe du préconditionneur P :

$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb$ à condition que P soit inversible.

Il faut donc déterminer (rapidement) un P tel que $\text{cond}(PA) \ll \text{cond}(A)$.

Exemples :

Jacobi, factorisation LU incomplète, complément de Schur...

5) Calcul

Exemples Matlab

[Solveurs - préconditionnement](#)

5) Calcul

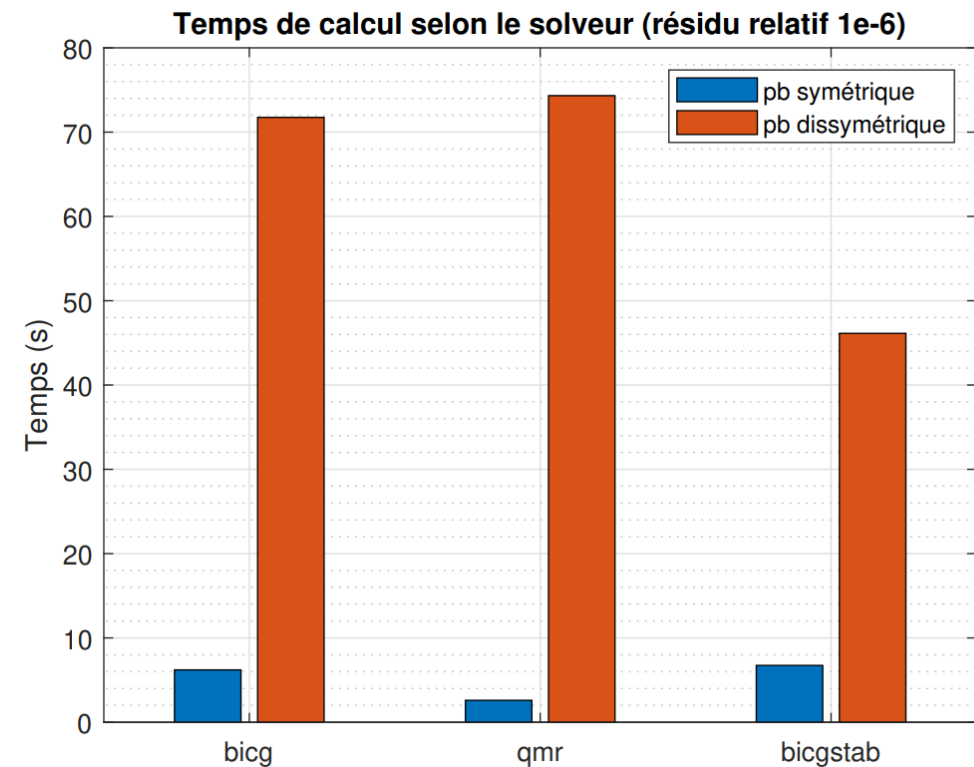
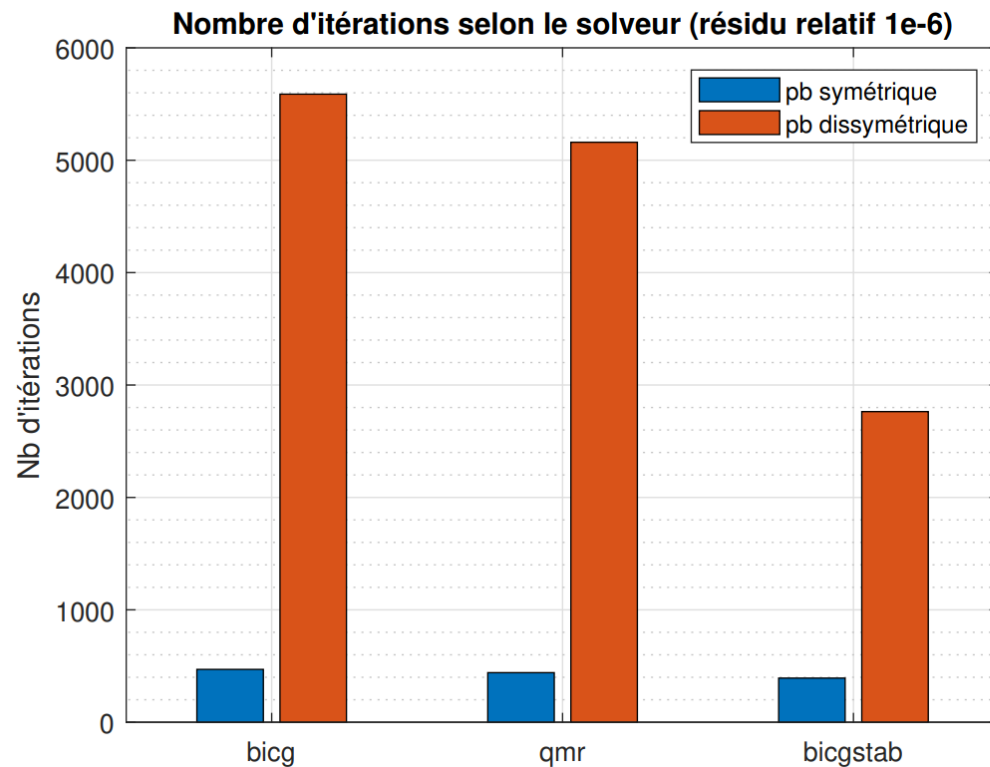
Matrices $S(DP)$ en multiphysique, ex courants de Foucault

Formulation 1 (« naïve », inconnues \vec{A} et ϕ) :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \bar{\nu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} + j\omega \bar{\sigma} \vec{A} \cdot \vec{a} + \int_{\Omega} (\bar{\sigma} \overrightarrow{\text{grad}} \phi) \cdot \vec{a} = 0 \\ j\omega \int_{\Omega} \bar{\sigma} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \phi + \int_{\Omega} (\bar{\sigma} \overrightarrow{\text{grad}} \phi) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \phi = 0 \end{cases}$$

Formulation 2 (symétrique, inconnues \vec{A} et $\Phi = \int_t \phi$) :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \bar{\nu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}^* + j\omega \bar{\sigma} \vec{A} \cdot \vec{A}^* + j\omega \int_{\Omega} (\bar{\sigma} \overrightarrow{\text{grad}} \Phi) \cdot \vec{A}^* = 0 \\ j\omega \int_{\Omega} \bar{\sigma} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \Phi + j\omega \int_{\Omega} (\bar{\sigma} \overrightarrow{\text{grad}} \Phi) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \Phi = 0 \end{cases}$$



6) Post-traitements

- **Champ électrique**

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

En pratique : V s'écrit dans chaque élément k grâce aux fonctions d'interpolation. On a vu dans l'assemblage l'expression de son gradient :

$$\vec{E}_k = -J_k^{-1} G V_k$$

Avec V_k le vecteur des degrés de liberté associés au tétraèdre k (juste 3 si on est en 2D : triangle).

- **Energie**

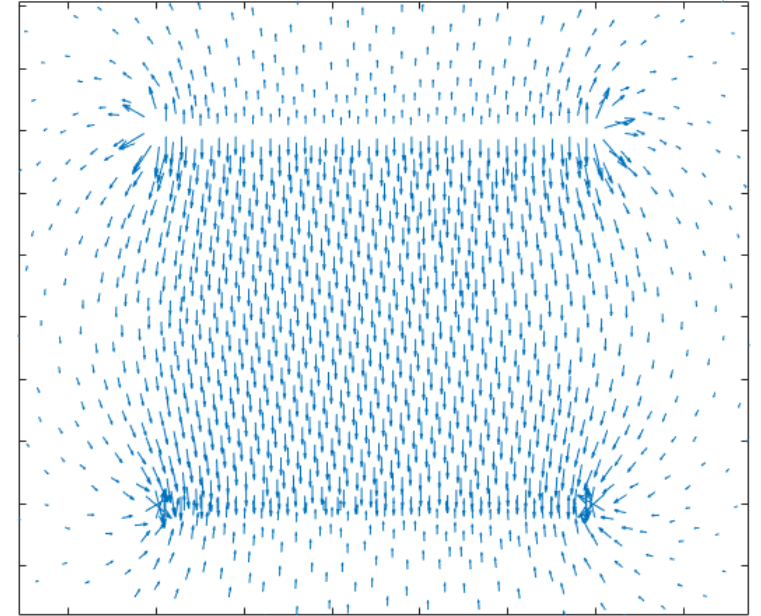
On sait que la densité d'énergie dans un matériau linéaire vaut $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$, d'où :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{|\det J_k|}{2} V_k^T G^T J_k^{-1T} \epsilon J_k^{-1} G V_k$$

On peut alors calculer la **capacité d'un condensateur** (par exemple) : $W = \frac{1}{2} C U^2 \Rightarrow C = 2 \frac{W}{U^2}$

Parallélisation possible.

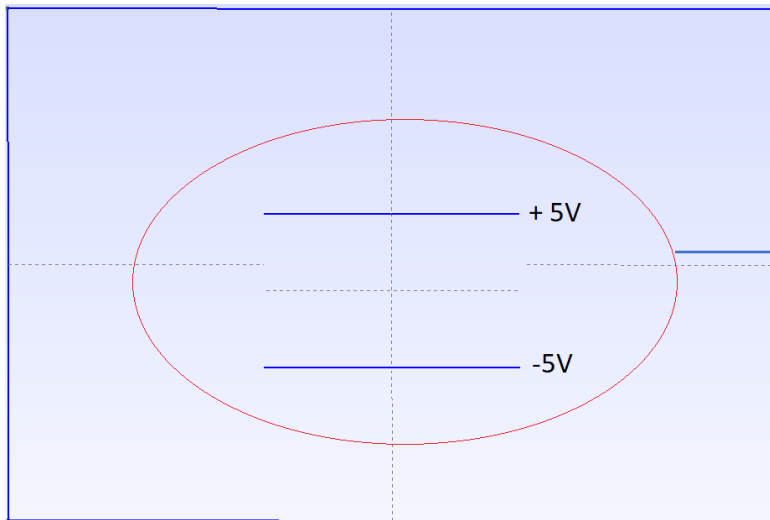
On peut réutiliser les calculs de l'assemblage (jacobiens notamment).



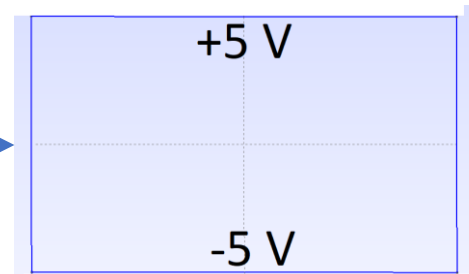
6) Post-traitement

Exemples Matlab : [Condensateur plan](#)

Objectif : calculer la capacité du condensateur ci-dessous



1) Comment tester la validité du modèle élément fini ?



Avec quelles conditions limites sur les bords droit et gauche ?

⇒ Neumann

2) Discuter l'influence des conditions limites (Dirichlet, Neumann) dans d'autres configurations.

Comment expliquer la (grosse) différence avec le calcul analytique de capacité « condensateur plan infini » $C = \frac{S\epsilon}{l}$, notamment avec des conditions de Dirichlet?

7) Traitement des non-linéarités

- Très utile en **magnétostatique**. Equation en 2D :

$$-\text{div}(\mu^{-1} \overrightarrow{\text{grad}} a) = j + \text{div}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mu^{-1} \overrightarrow{B}_r\right)$$

La perméabilité μ est variable, elle dépend du champ B .

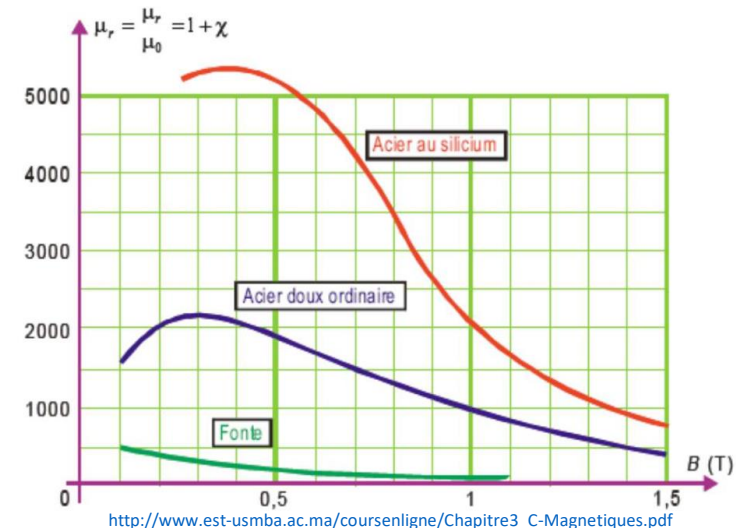
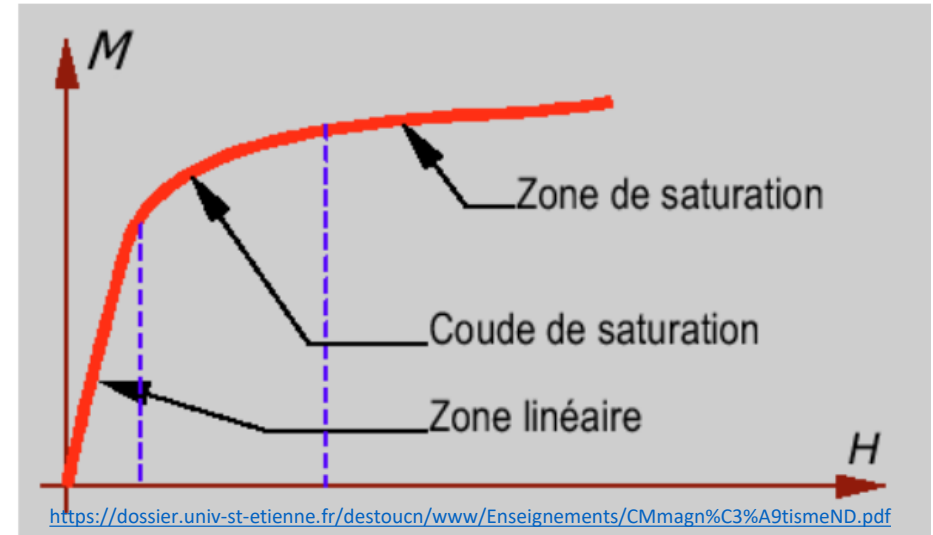
Comment alors résoudre le problème ?

- Il faut **itérer** et en résolvant une succession de problèmes linéaires Il existe plusieurs façons de faire.

On prend un exemple simple pour illustrer graphiquement les méthodes : on cherche champ B supposé uniforme dans un tore, qui vérifie d'après le théorème d'Ampère:

$$\frac{B}{\mu(B)} = \frac{Ni}{L}$$

Comme μ est globalement décroissante, $B/\mu(B)$ est croissant

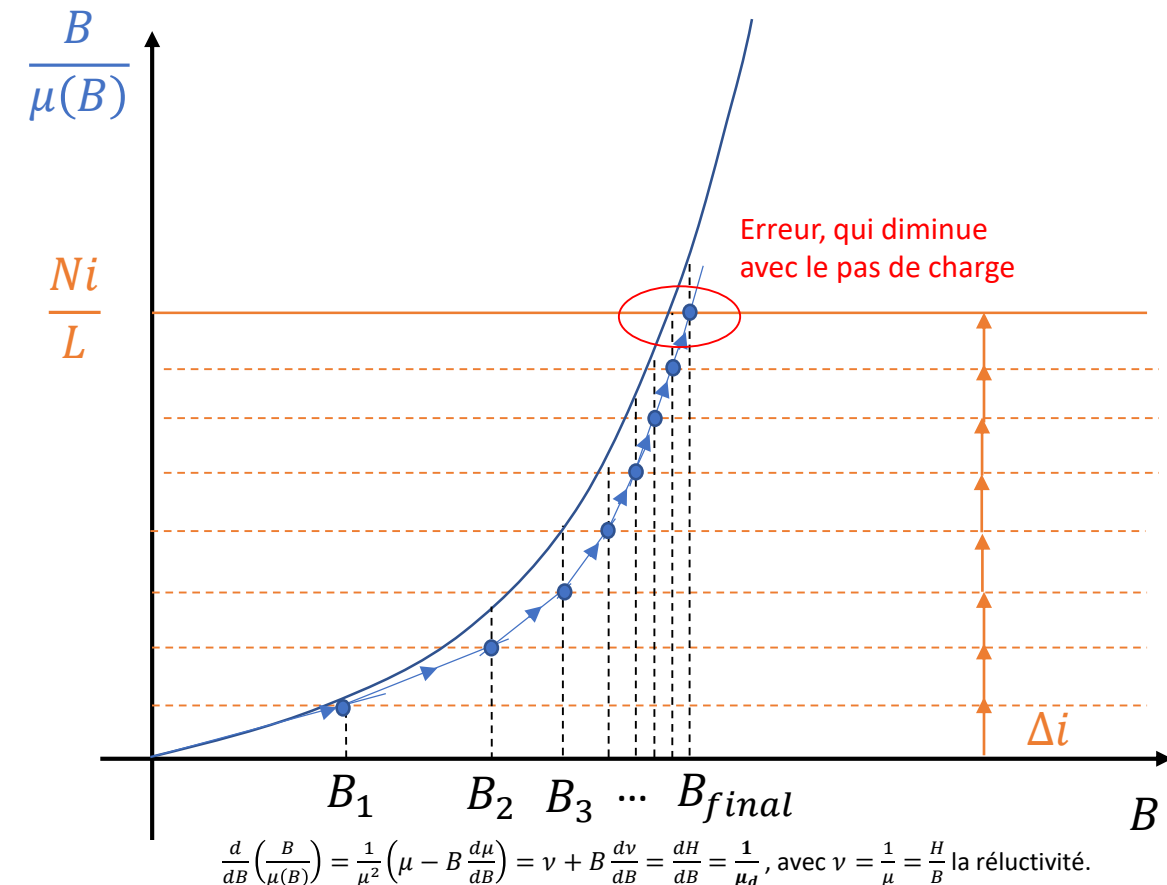


7) Traitement des non-linéarités

Load ramping (« piecewise »)

T.A. Do. Modélisation multiphysique des matériaux magnétoélectriques de seconde génération : Application aux objets nomades connectés. PhD thesis, Sorbonne Université, 2019

On part d'une charge très faible, on résout le système linéaire, puis on incrémente la charge, on remplace les **perméabilités** $\mu = B/H$ par les **perméabilités différentielles** $\mu_d = dB/dH$, on résout, on additionne au résultat précédent et on recommence jusqu'à atteindre la bonne charge...



Avantages :

- **Convergence garantie**
- Fonctionne quelle que soit la loi de comportement

Inconvénients :

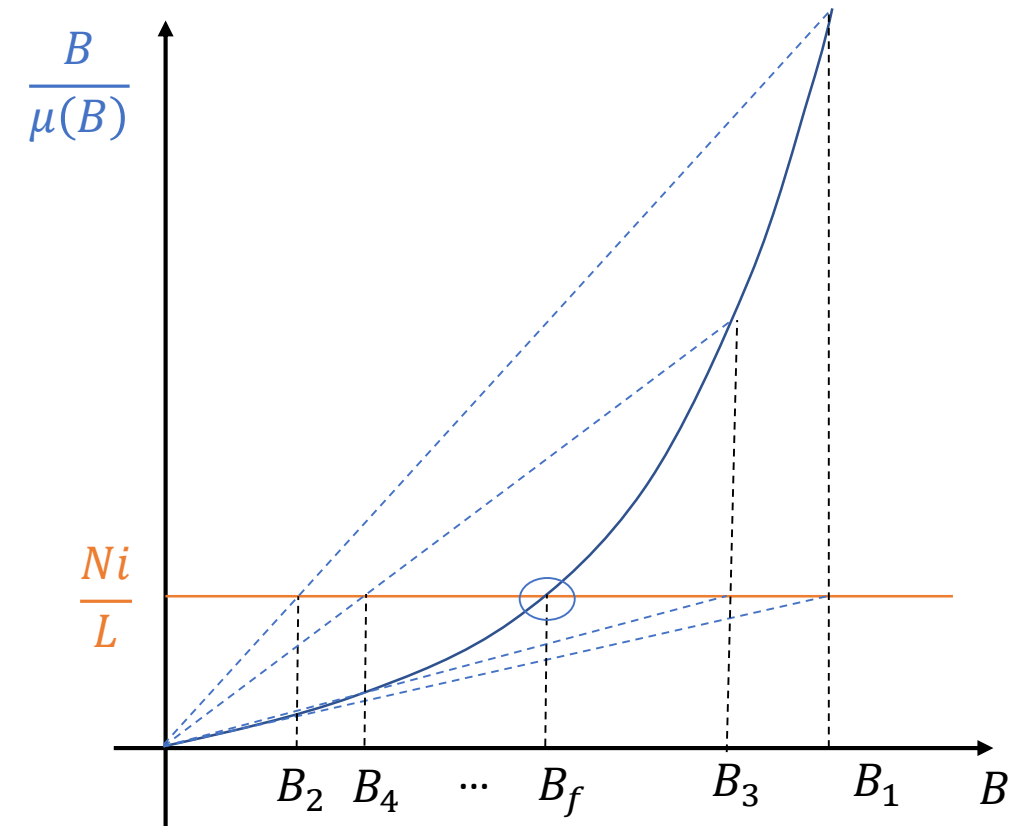
- **Très lent si on veut une bonne précision**
- **L'erreur dépend du pas (pas forcément fixe, ni connu à l'avance)**

Mais : méthode la plus rapide si on veut calculer les réponses à **toutes** les sollicitations i

7) Traitement des non-linéarités

Picard (« méthode de la sécante » = point fixe)

http://onelab.info/wiki/Nonlinear_problems_in_GetDP



On résout le système toujours avec la même charge, mais en **mettant à jour les perméabilités** μ à chaque itération en fonction du champ trouvé à l'itération précédente.

Avantage :

- Plus rapide que le load ramping pur

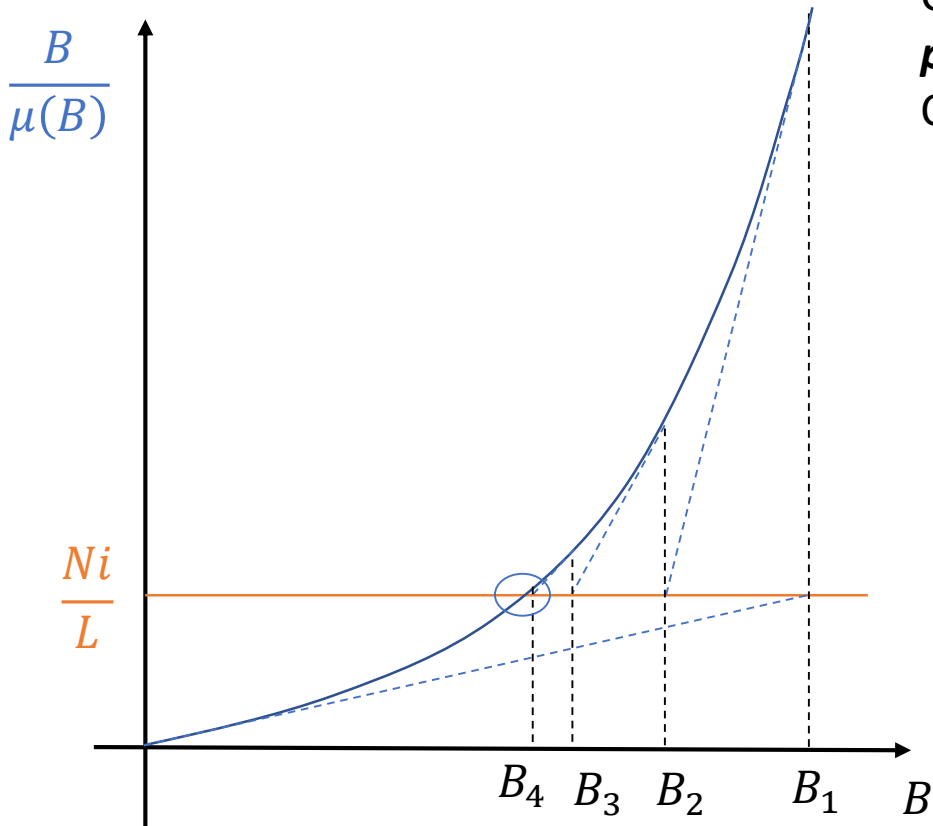
Inconvénients :

- À tendance à osciller et à **converger lentement**
- **Convergence pas garantie**(ex : caractéristique composée de 2 segments de droite).

On peut accélérer en choisissant une moyenne pondérée de μ_{n-1} et $\mu(B_n)$ pour μ_n , ce qui permet souvent d'aller beaucoup plus vite en limitant les oscillations (« relaxation »).

7) Traitement des non-linéarités

Newton-Raphson



On résout à chaque itération $B_{n+1} = \frac{\partial(B_n/\mu(B_n))}{\partial B} \left(\frac{Ni}{L} - \frac{B_n}{\mu(B_n)} \right) + B_n$

Comme pour le load ramping, on remplace les **perméabilités** $\mu = B/H$ par les **perméabilités différentielles** $\mu_d = dB/dH$.

C'est la méthode sur laquelle se basent les solveurs commerciaux.

Avantage :

- Le **plus rapide**, de loin

Inconvénient :

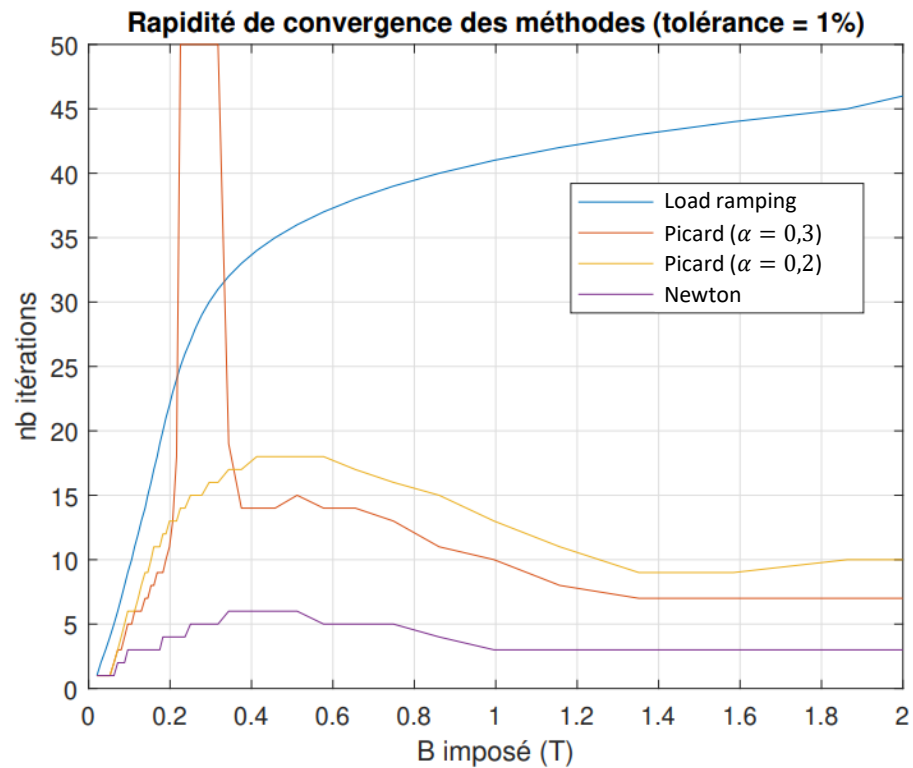
- **Convergence pas garantie.**

Note : L'opérateur tangent d'un système EF magnéto-statique est une matrice, qui s'écrit :

- dans la formulation faible $\frac{1}{\mu} + \vec{B} \otimes \frac{d(1/\mu)}{d\vec{B}}$ (qui remplace $1/\mu$ dans le calcul des matrices élémentaires) [1]
- directement sur le système linéaire : $K_{ij} + \sum_k \frac{\partial K_{ik}}{\partial a_j} a_k$

7) Traitement des non-linéarités

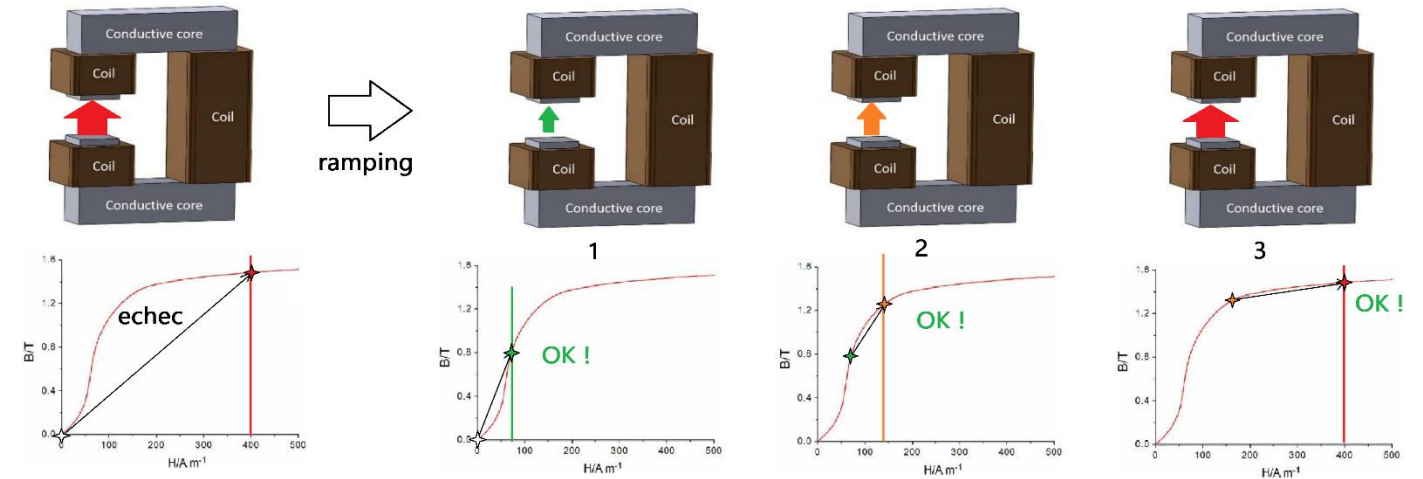
Comparaison



On peut **coupler** les méthodes précédentes :

par exemple, en cas de non convergence de Newton-Raphson, on peut **diminuer la charge**, et appliquer un macro-load ramping à l'intérieur duquel on résout par Newton-Raphson :

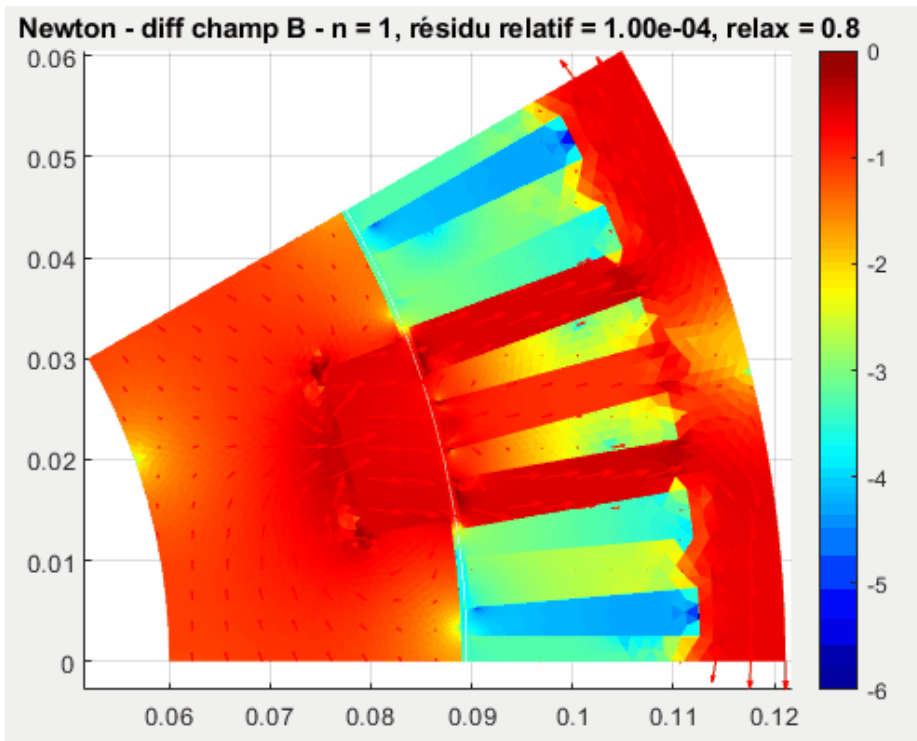
<https://www.comsol.com/blogs/load-ramping-nonlinear-problems/>



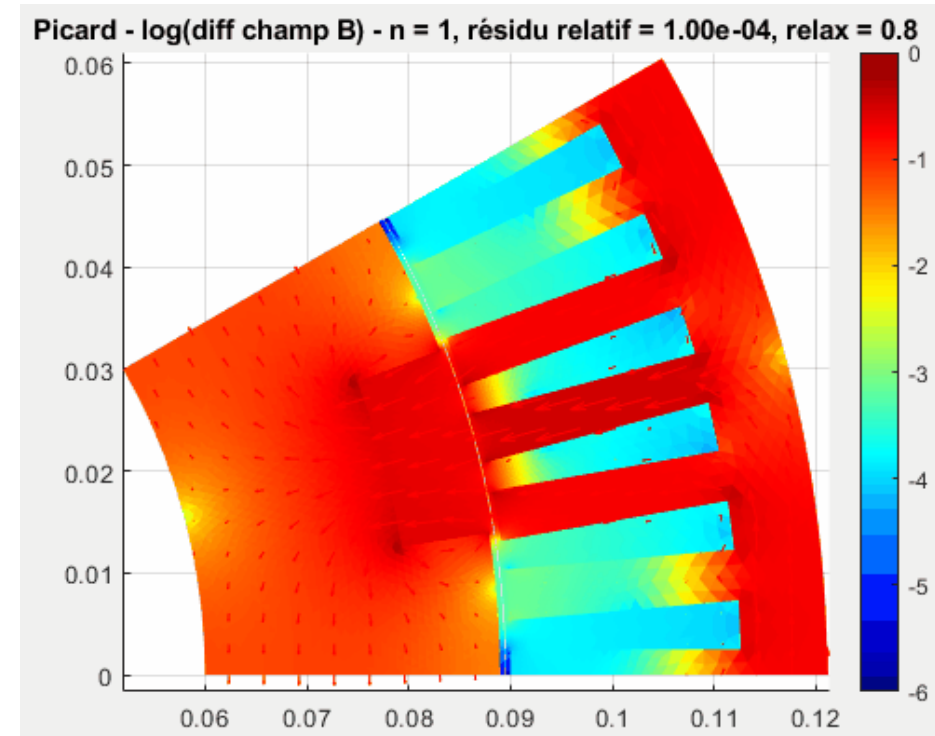
7) Traitement des non-linéarités

Comparaison en multiphysique (magnéto-thermique)

solveur monolithique : itération lente



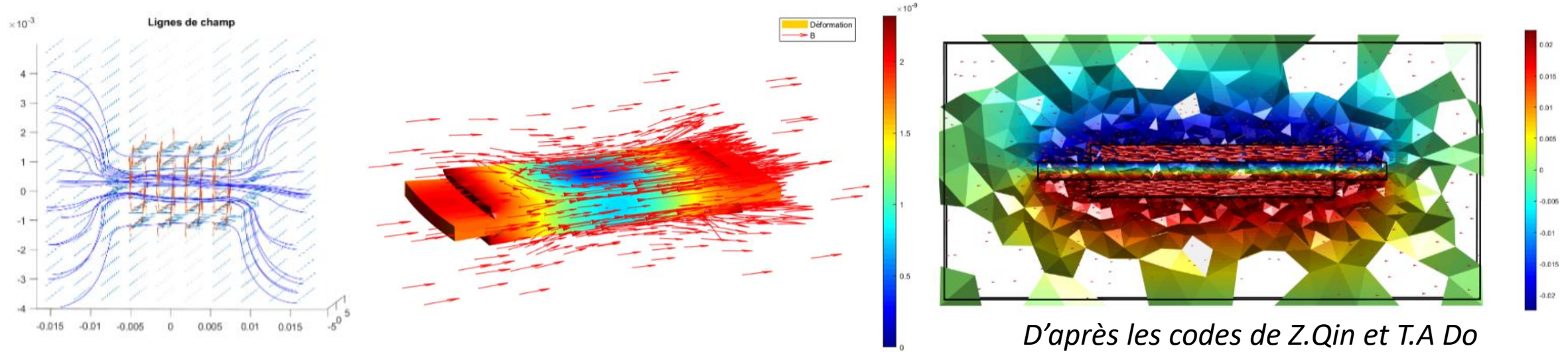
solveurs partitionnés : itération rapide



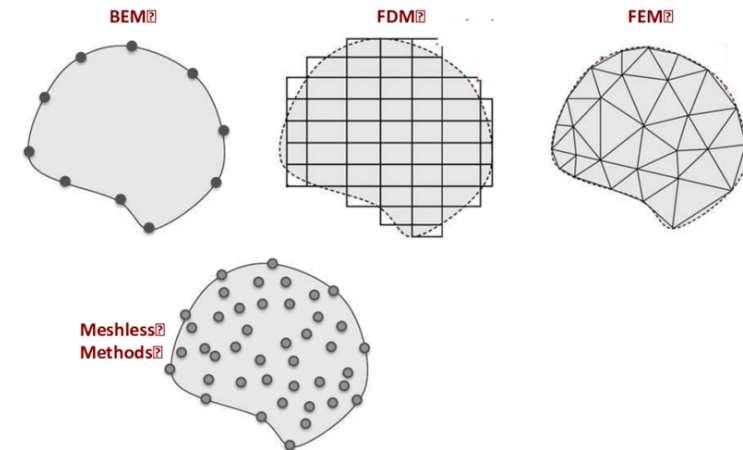
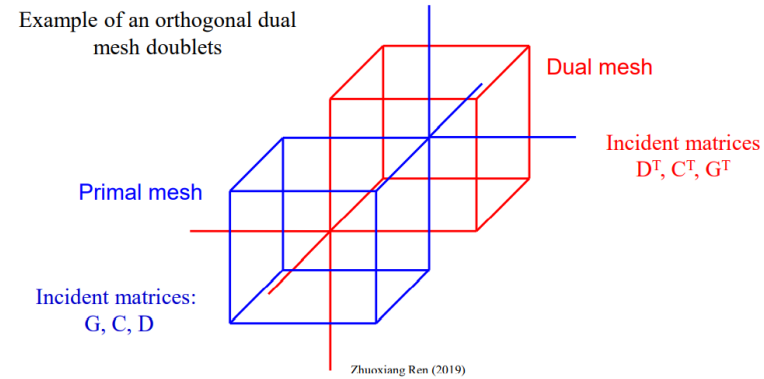
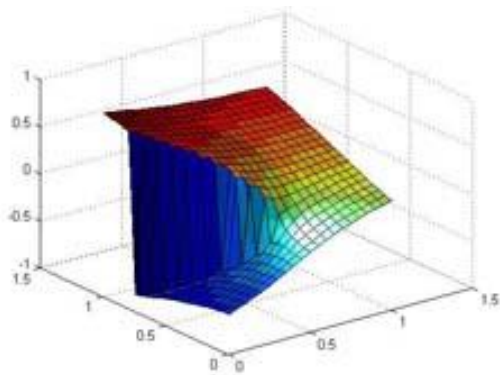
Newton-Raphson plus long sur 1 itération, **mais** le nombre d'itération est bien plus réduit !

Conclusion, ouverture

Autres physiques : Mécanique, thermique, multiphysique...

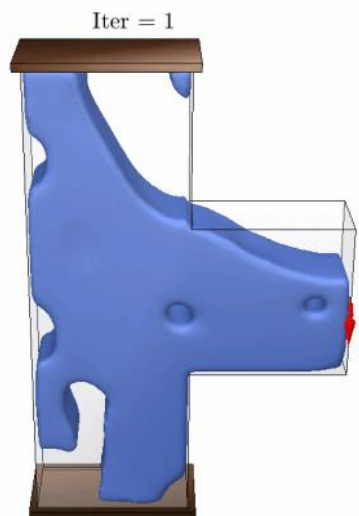
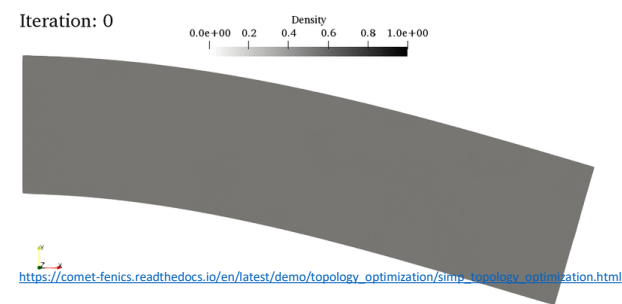


Autres méthodes : XFEM, BEM, volumes finis, méthodes sans maillage...



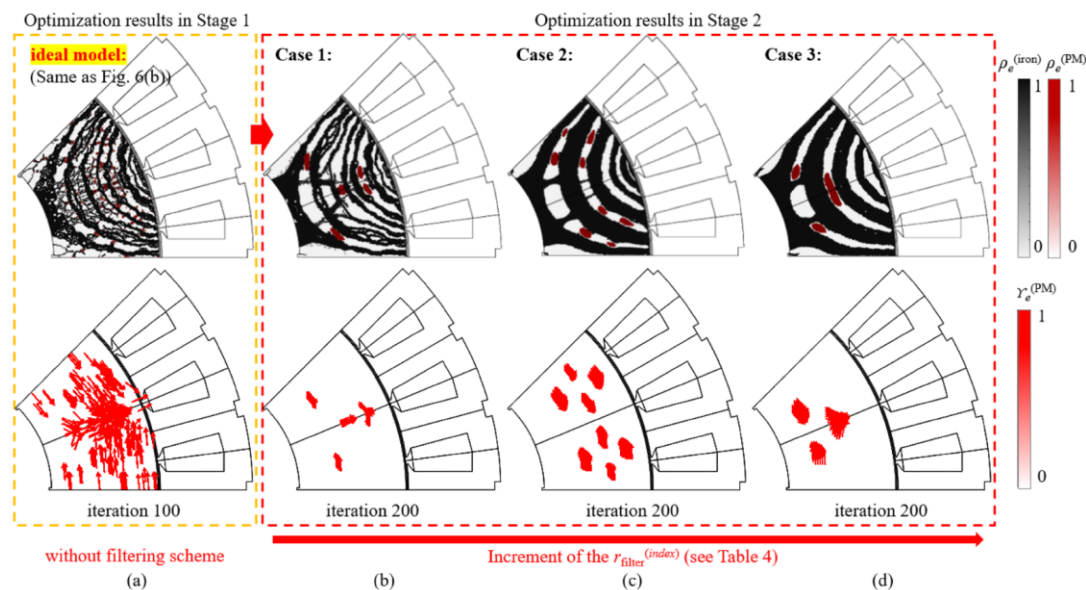
Conclusion, ouverture

Applications possibles des EF : *optimisation topologique*



<https://www.digitalengineering247.com/article/a-contemplation-on-topology-optimization/>

nique



Lee & Jang, 2022, SAMO, DOI : [10.1007/s00158-022-03367-x](https://doi.org/10.1007/s00158-022-03367-x)

Actionneurs électromagnétiques

<https://images.math.cnrs.fr/Design-et-formes-optimales-I.html>

Merci pour votre attention.

Questions?

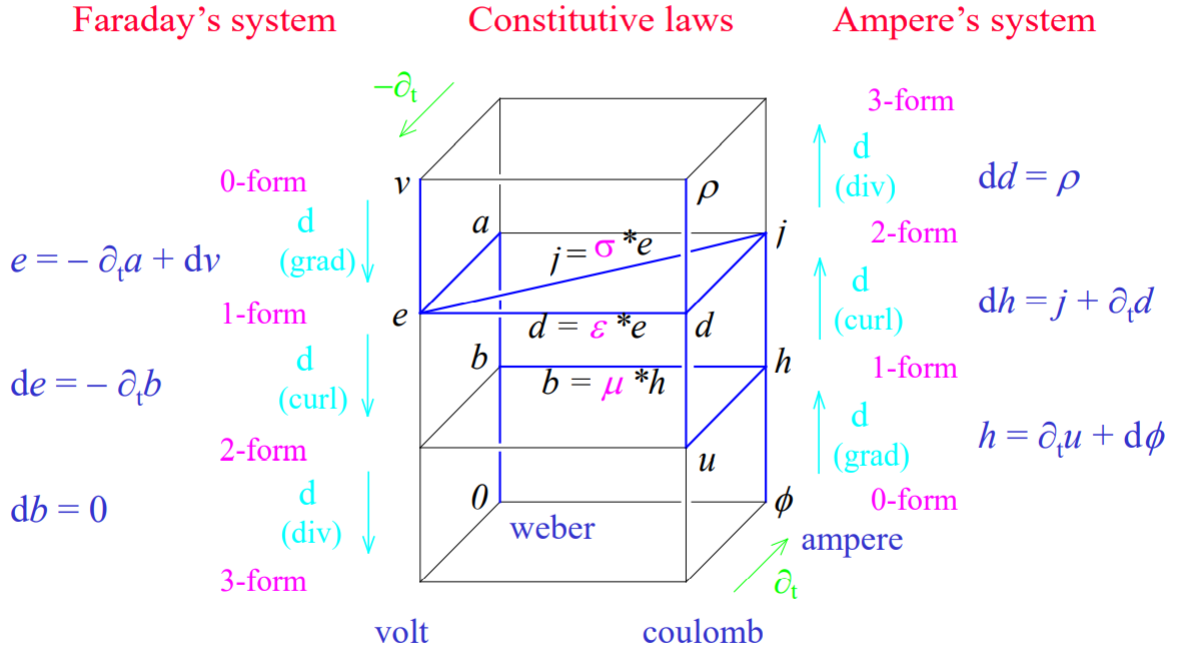
Annexes pouvant être utiles

Structure mathématique de l'électromagnétisme et fonctions de forme associées (3D)

In 3D, the Whitney elements of different order (nodal, edge, facet and volume) are given below

$$\begin{aligned}
 w^0 &= \lambda_i, \\
 w^1 &= \lambda_i d\lambda_j - \lambda_j d\lambda_i, \\
 w^2 &= 2(\lambda_i d\lambda_j \wedge d\lambda_k + \lambda_j d\lambda_k \wedge d\lambda_i + \lambda_k d\lambda_i \wedge d\lambda_j), \\
 w^3 &= 6(d\lambda_i \wedge d\lambda_j \wedge d\lambda_k)
 \end{aligned}$$

Tonti's diagram in electromagnetism



Whitney elements

elements		d.o.f.	conformity	continuity	inclusion	
nodal		\bar{W}^0 point value (0-form)	$W^0 \subset H(\text{grad})$	C^0	W^0 ↓ grad	\bar{W}^0 ↓ G
edge		\bar{W}^1 circulation (1-form)	$W^1 \subset H(\text{curl})$	tangential	W^1 ↓ curl	\bar{W}^1 ↓ C
facet		\bar{W}^2 flux (2-form)	$W^2 \subset H(\text{div})$	normal	W^2 ↓ div	\bar{W}^2 ↓ D
volume		\bar{W}^3 charge (3-form)	$W^3 \subset L^2$	piecewise constant	W^3	\bar{W}^3

• Formulaires

Formules de Leibniz	Formule de Gauss	IPP généralisée
$s.\text{div}(\vec{v}) = \text{div}(s.\vec{v}) - \overrightarrow{\text{grad}}(s).\vec{v}$	$\int_{\Omega} \text{div} \vec{v} = \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n}$	$\Rightarrow \int_{\Omega} s.\text{div} \vec{v} = \int_{\partial\Omega} s.\vec{v} \cdot \vec{n} - \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}}(s).\vec{v}$
$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}).\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \text{div}(\vec{v} \times \vec{u}) + \vec{v}.\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u})$		$\Rightarrow \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}).\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \int_{\Omega} (\vec{v} \times \vec{u}).\vec{n} + \int_{\Omega} \vec{v}.\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}$

Nom	Symbole	Expression 2D	Expression 3D
Jacobienne	J	$\begin{bmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{bmatrix}$
Gradient 0-forme élément de référence	G	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
Rotationnel 1-forme élément de référence	R	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dégénérescence 0-forme	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
Intégration 1-forme élément de référence	W	$-\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$-\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

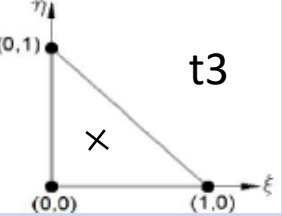
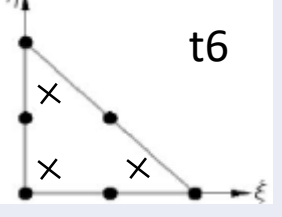
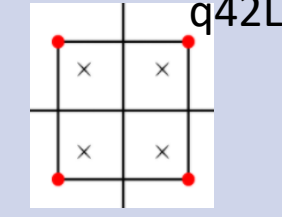
Type d'intégrande	Résultat 2D	Résultat 3D
1	1/2	1/6
$\lambda_i = x_i$	1/6	1/24
$\lambda_i^2 = x_i^2$	1/12	1/60
$\lambda_i \lambda_j = x_i x_j$	1/24	1/120

Intégrales sur l'élément de référence des coordonnées barycentriques

E Cas de la mécanique

La mécanique a la particularité de choisir comme fonction de forme un champ de vecteurs composé de trois 0-formes de Whitney orthogonales ; de plus elle fait intervenir la notation de Voigt ainsi que l'opérateur gradient symétrique. On donne dans le tableau suivant les matrices courantes en mécanique [21]. Ces matrices sont valables lorsque le vecteur des DDL local s'écrit : $U = {}^T [u_x^{\lambda_1} \ u_y^{\lambda_1} \ u_z^{\lambda_1} \ u_x^{\lambda_2} \ u_y^{\lambda_2} \ \dots \ u_y^{\lambda_4} \ u_z^{\lambda_4}]$.

Nom	Symb.	Expression 2D	Expression 3D
Gradient symétrique	D	Matrice 3×9 $\begin{bmatrix} [J^{-1}G]_{11} & 0 & \dots \\ 0 & [J^{-1}G]_{21} & \dots \\ [J^{-1}G]_{21} & [J^{-1}G]_{11} & \dots \end{bmatrix}$ répéter à droite en incrémentant l'indice de droite jusqu'à 3	Matrice 6×12 $\begin{bmatrix} [J^{-1}G]_{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & [J^{-1}G]_{21} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & [J^{-1}G]_{31} & \dots \\ 0 & [J^{-1}G]_{31} & [J^{-1}G]_{21} & \dots \\ [J^{-1}G]_{31} & 0 & [J^{-1}G]_{11} & \dots \\ [J^{-1}G]_{21} & 0 & [J^{-1}G]_{11} & \dots \end{bmatrix}$ répéter à droite en incrémentant l'indice de droite jusqu'à 4
Matrice de masse	M	$\frac{ \det J }{24}$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\underbrace{\dots}_{2\delta_{i,j} + \delta_{i+2,j} + \dots}$ $\dots \delta_{i,j+2} + \delta_{i+4,j} + \delta_{i,j+4}$	$\frac{ \det J }{120} (2\delta_{i,j} + \delta_{i,j+3} + \delta_{i+3,j} + \dots$ $\dots \delta_{i,j+6} + \delta_{i+6,j} + \delta_{i,j+9} + \delta_{i+9,j})$
Matrice de rigidité	K	$\frac{ \det J }{6} {}^T DCD$, C est le tenseur des constantes élastiques en notation de Voigt	
Matrice d'amortissement (Rayleigh)	C_R	$\alpha K + \beta M$, α et β sont les coefficients de Rayleigh	
Second membre	F	$\frac{ \det J }{6} \begin{bmatrix} \vec{f}_v \\ \vec{f}_v \\ \vec{f}_v \\ \vec{f}_v \end{bmatrix}$ avec \vec{f}_v les forces volumiques planes	$\frac{ \det J }{24} \begin{bmatrix} \vec{f}_v \\ \vec{f}_v \\ \vec{f}_v \\ \vec{f}_v \end{bmatrix}$ avec \vec{f}_v les forces volumiques 3D

Aperçu et dénomination	Coord. des nœuds de l'elt de ref $\begin{bmatrix} \lambda_{n1} \\ \lambda_{n2} \end{bmatrix}$	Pts de Gauss dans l'elt de réf. $\begin{bmatrix} \lambda_{g1} \\ \lambda_{g2} \end{bmatrix}$	Poids de Gauss w_g	Fonct. de forme N	Dérivée des fonct. de forme $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$
 <p>t3</p>	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}$	$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
 <p>t6</p>	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} (1 - \lambda_1 - \lambda_2)(1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2) \\ \lambda_1(2\lambda_1 - 1) \\ \lambda_2(2\lambda_2 - 1) \\ 4\lambda_1(1 - \lambda_1 - \lambda_2) \\ 4\lambda_1\lambda_2 \\ 4\lambda_2(1 - \lambda_1 - \lambda_2) \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} -3 + 4(\lambda_1 + \lambda_2) & -1 + 4\lambda_1 & 0 & \dots \\ -3 + 4(\lambda_1 + \lambda_2) & 0 & -1 + 4\lambda_1 & \dots \\ \dots & 4(1 - 2\lambda_1 - \lambda_2) & 4\lambda_2 & -4\lambda_2 \\ \dots & -4\lambda_1 & 4\lambda_1 & 4(1 - \lambda_1 - 2\lambda_2) \end{bmatrix}$
 <p>q42L</p>	$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \\ (1 + \lambda_1)(1 - \lambda_2) \\ (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \\ (1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2) \end{bmatrix}^T$	$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1 - \lambda_2) & 1 - \lambda_2 & 1 + \lambda_2 & -(1 + \lambda_2) \\ -(1 - \lambda_1) & -(1 + \lambda_1) & 1 + \lambda_1 & 1 - \lambda_1 \end{bmatrix}$