



**HAL**  
open science

## Écoulements tournants : de Batchelor à Stewartson

Sébastien Poncet, Marie-Pierre Chauve, Roland Schiestel

► **To cite this version:**

Sébastien Poncet, Marie-Pierre Chauve, Roland Schiestel. Écoulements tournants : de Batchelor à Stewartson. 17e Congrès Français de Mécanique, 2005, Troyes, France. hal-04213035

**HAL Id: hal-04213035**

**<https://hal.science/hal-04213035v1>**

Submitted on 21 Sep 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Écoulements tournants : de Batchelor à Stewartson

Sébastien Poncet, Marie-Pierre Chauve & Roland Schiestel

Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre  
UMR 6594 CNRS - Université Aix-Marseille I & II  
Technopôle Château-Gombert, 49 rue F. Joliot-Curie BP 146, 13384 Marseille cédex 13  
poncet@irphe.univ-mrs.fr

### Résumé :

*Cet article propose une étude expérimentale et numérique des écoulements turbulents dans une cavité annulaire de type rotor-stator avec ou sans flux centrifuge imposé.*

*On présente tout d'abord le dispositif expérimental puis le modèle de transport des tensions de Reynolds (RSM). On détermine alors la transition entre un écoulement de type Batchelor à couches limites séparées par un noyau central en rotation et un écoulement de type Stewartson avec une couche limite unique sur le rotor. On montre que, pour une position radiale donnée, cette transition est continue et caractérisée par un nombre de Rossby. Seul le champ moyen est étudié dans la présente étude.*

### Abstract :

*This experimental and numerical work considers the turbulent flow inside an annular rotor-stator cavity with and without superimposed centrifugal throughflow.*

*The paper presents first the experimental set-up and the turbulence closure. Then, a study of the flow control parameters is performed and, a better insight into the transition from Batchelor to Stewartson types of flow is gained from this study. Only the mean field is investigated in the present work.*

### Mots-clefs :

**écoulement tournant ; modèle aux tensions de Reynolds ; profil de Batchelor ; profil de Stewartson ; turbulence**

### 1 Introduction

Les écoulements au-dessus d'un disque unique ou entre deux disques ont fait l'objet d'un intérêt constant de la part de la communauté scientifique depuis les travaux de Von Kármán [1] en 1921, qui étudia l'écoulement laminaire au dessus d'un disque tournant de rayon infini dans un fluide initialement au repos. Il simplifia les équations du mouvement en un système d'équations différentielles non linéaires en supposant l'écoulement axisymétrique et montra que l'écoulement est confiné dans la fine couche limite qui s'est développée sur le disque. Bödewadt [2] étendit l'analyse de ce dernier au cas où le fluide est en rotation solide au-dessus d'un disque fixe. Batchelor [3] résolut le système d'équations différentielles relatives à l'écoulement axisymétrique et stationnaire entre deux disques de rayon infini. Il spécifia la formation d'un noyau non visqueux en rotation solide confiné entre les deux couches limites se développant sur chacun des disques. Entre 1953 et 1983, cette structuration de l'écoulement en trois zones distinctes fut l'objet d'une intense controverse : Stewartson [4] prédit, en effet, en 1953, dans le cas d'un écoulement rotor-stator, que la vitesse tangentielle du fluide est proche de zéro partout en dehors de la couche limite du rotor. Le problème de l'existence ou non de ce noyau en rotation solide justifia de nombreux travaux jusqu'à ce que Kreiss et Parter [5] prouvèrent, en 1983, l'existence d'une classe de solutions multiples, ce qui avait déjà été découvert numériquement

par Mellor et *al.* [6] en 1968. Zandbergen et Dijkstra [7] ont également montré que les équations en similitude n'admettent pas de solutions uniques (problème général de la sensibilité aux conditions initiales pour un système dynamique) et que les structurations obtenues par Batchelor et Stewartson peuvent être trouvées à partir de ces solutions en similitude. Dans le cas d'un fluide laminaire entre deux disques de rayon fini, Brady et Durlofsky [8] ont montré que les écoulements de type Batchelor se rencontrent dans le cas de géométries fermées, alors que les écoulements de type Stewartson se rencontrent pour des géométries ouvertes, ce qui avait déjà été mis en évidence par l'expérience de Picha et Eckert [9] en 1958.

Afin de caractériser expérimentalement et numériquement une transition possible entre les écoulements de type Batchelor et Stewartson en géométrie finie, on se propose d'étudier l'écoulement turbulent dans une cavité rotor-stator avec flux centrifuge imposé pour des espaces interdisques suffisamment grands qui correspondent selon la classification de Daily et Nece [10] à des couches limites séparées (régime IV).

## 2 Dispositif expérimental

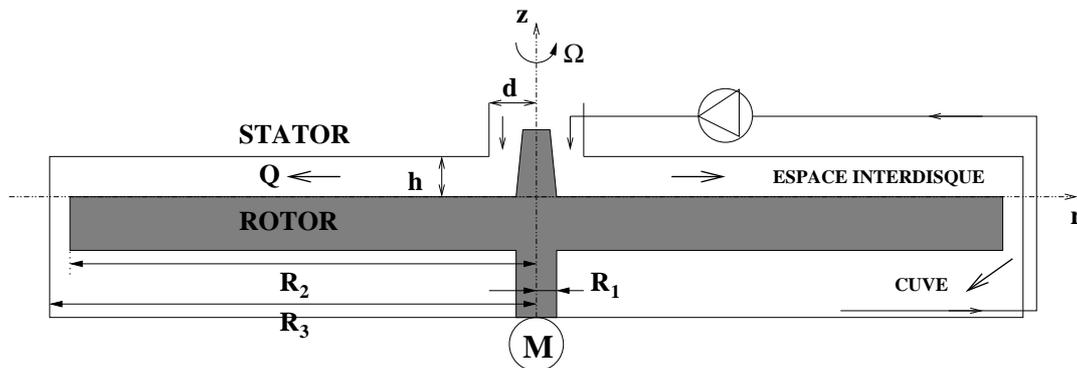


FIG. 1 – Schéma du dispositif expérimental.

La cavité est limitée par deux disques lisses (fig.1), l'un en rotation (le rotor) et l'autre fixe (le stator).  $R_1 = 38$  mm et  $R_2 = 250$  mm sont les rayons intérieur et extérieur du disque tournant et  $R_3 = 255$  mm le rayon extérieur de la cavité. L'espace interdisque  $h$  peut varier entre 0 et 12 mm. Le rotor et son moyeu central sont en rotation uniforme de vitesse angulaire  $\Omega$ . Les deux ouvertures à l'entrée et à la sortie de la cavité ( $d = 55$  mm,  $e = R_3 - R_2 = 3$  mm) permettent d'imposer un flux  $Q$ . L'écoulement dans la cavité est gouverné par les trois paramètres de contrôle suivants : un nombre de Reynolds global  $Re = \Omega R_2^2 / \nu$  ( $\nu$  la viscosité cinématique de l'eau) défini sur le rayon extérieur du rotor  $R_2$ , un coefficient de débit volumique  $Q^* = Q / (\nu R_2)$  et le rapport d'aspect  $G = h / R_2$  de la cavité.

Le rotor est entraîné par un moteur asynchrone triphasé d'une puissance de 5.5 kW. Le débit est créé par une pompe Wilo centrifuge. Les erreurs sur la mesure de la vitesse et du débit sont inférieures à 1 %. Il est à noter que le système est maintenu à une pression constante de 2 bars pour éviter les effets de la cavitation et à une température de fonctionnement constante ( $23 \pm 0.5$  °C), afin de maintenir constante la viscosité cinématique de l'eau.

Le système de mesure par anémométrie laser Doppler (LDA) à deux composantes nous donne accès aux valeurs des vitesses radiale  $V_r$  et orthoradiale  $V_\theta$  déterminées dans un plan vertical ( $r, z$ ). Il présente l'avantage d'être non intrusif mais les mesures sont rendues délicates

près des parois à cause de la taille du volume de mesure selon la direction axiale  $z$  ( $0.81 \text{ mm}$ ) comparée à l'épaisseur très faible des couches limites.

### 3 Modélisation statistique

Notre approche est basée sur une modélisation statistique en un point utilisant une fermeture du second ordre à faible nombre de Reynolds dérivée du modèle de Launder et Tselepidakis [11] et sensible aux effets de la rotation [12]. Ce modèle de transport des tensions de Reynolds (RSM) permet une description détaillée de la turbulence près des parois et présente l'avantage de ne pas introduire d'hypothèse de viscosité turbulente. L'équation générale pour le tenseur des tensions de Reynolds  $R_{ij}$  peut s'écrire :

$$\frac{dR_{ij}}{dt} = P_{ij} + D_{ij} + \Phi_{ij} - \epsilon_{ij} + T_{ij} \quad (1)$$

où  $P_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $\Phi_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$ , et  $T_{ij}$  représentent respectivement les termes de production, diffusion, corrélation pression-déformation, dissipation et des termes supplémentaires liés à la rotation.

La procédure numérique est basée sur la méthode des volumes finis utilisée avec des grilles décalées pour les composantes moyennes de la vitesse. Un maillage  $140 \times 80$  dans le plan  $(r, z)$  est suffisant dans la plupart des cas considérés ici pour obtenir des solutions indépendantes du maillage. Pour surmonter les problèmes de stabilité et conserver les couplages, les équations de transport des tensions de Reynolds sont résolues par bloc.

### 4 Transition entre les écoulements de type Batchelor et Stewartson

Selon les différents paramètres de l'écoulement en fonction de la position radiale, le but est de décrire la transition entre les écoulements de type Batchelor et de type Stewartson.

#### 4.1 Structure des écoulements de type Batchelor et Stewartson

La figure 2 montre la structure des écoulements de type Batchelor et Stewartson. Les paramètres ont été choisis pour montrer l'influence de la position radiale, du nombre de Reynolds et du coefficient de débit sur la transition entre ces deux types d'écoulement. L'écoulement de type Batchelor se caractérise par deux couches limites : une couche limite centrifuge (couche d'Ekman ou de Von Kármán) sur le rotor et une couche limite centripète (couche de Bödewadt) sur le stator, séparées par un noyau central en rotation solide ( $V_\theta$  est constante et  $V_r \simeq 0$ ). On peut le considérer comme la connexion de deux écoulements de disque unique : celle d'un écoulement de Bödewadt (disque fixe) avec un écoulement de type Von Kármán (disque tournant). La structure de l'écoulement de Stewartson est plus simple : une couche limite unique sur le rotor et une vitesse tangentielle quasi nulle en dehors. L'écoulement est alors pleinement centrifuge ( $V_\theta \simeq 0$  et  $V_r > 0$  partout).

La transition entre un écoulement de type Batchelor et un écoulement de type Stewartson est observée lorsque l'on se rapproche du centre la cavité ( $r^*$  diminue), en diminuant le nombre de Reynolds ou en diminuant le coefficient de débit (le flux centrifuge augmente). Cette transition se fait surtout sur la vitesse radiale qui est positive quelque soit la position axiale pour un écoulement de type Stewartson et qui s'annule au moins en une position axiale donnée pour un écoulement de type Batchelor. Il est à noter que l'ensemble des résultats numériques sont en excellent accord avec les mesures LDA.

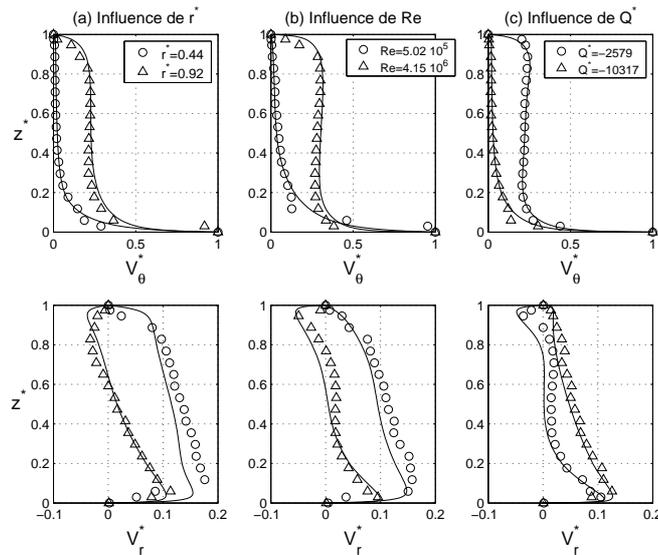


FIG. 2 – Profils moyens des vitesses radiale et tangentielle; Comparaison des mesures LDA (symboles) avec le modèle RSM (–) pour (a)  $Re = 1.04 \times 10^6$ ,  $Q^* = -5159$ ; (b)  $r^* = 0.68$ ,  $Q^* = -5159$ ; (c)  $r^* = 0.44$ ,  $Re = 4.15 \times 10^6$ .

## 4.2 Diagramme de transition

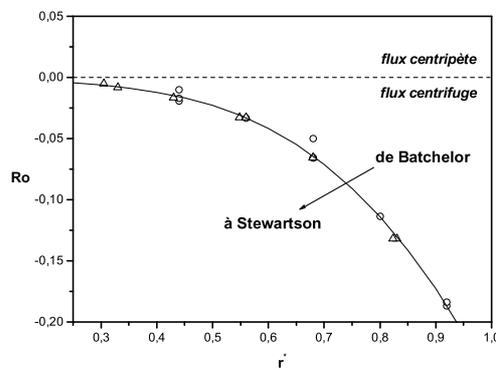


FIG. 3 – Diagramme de transition entre les écoulements de type Batchelor et Stewartson dans le plan  $(r^*, Ro)$  pour  $G = 0.036$ : ( $\Delta$ ) modèle RSM, ( $\circ$ ) mesures LDA, (–) polynôme du troisième degré.

Dans cette étude, la structuration de l'écoulement de type Stewartson n'a jamais été observée dans les cas sans flux ou avec flux centripète. Par contre dans le cas avec flux centrifuge, la transition entre un écoulement de type Batchelor et un écoulement de type Stewartson peut être caractérisée par un nombre de Rossby  $Ro = Q/(2\pi R_2^2 e \Omega)$  à une position radiale donnée (fig.3). La dépendance de  $Ro$  en  $r^*$  s'exprime ici empiriquement par un polynôme du troisième degré, qui regroupe en une seule loi les résultats expérimentaux et numériques :  $Ro = 0.0088 - 0.0998r^* + 0.3048r^{*2} - 0.4646r^{*3}$ . Ce nombre de Rossby correspond à celui

introduit par Debuchy et *al.* [13] dans le cas d'un flux radial.

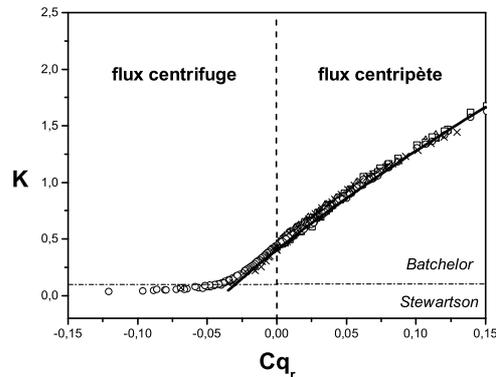


FIG. 4 – Loi expérimentale  $K - Cq_r$  pour différents rapports d'aspect : ( $\times$ )  $G = 0.012$ , ( $\Delta$ )  $G = 0.024$ , ( $\circ$ )  $G = 0.036$ , ( $\square$ )  $G = 0.048$ , (—) loi (2) [14].

Poncet et *al.* [14] ont montré analytiquement que le coefficient d'entraînement  $K$  du fluide peut être relié, dans le cas d'un flux centripète (défini alors positif), à un coefficient de débit  $Cq_r = Q(\Omega r^2/\nu)^{1/5}/(2\pi r^3\Omega)$  selon une loi de puissance en  $5/7$  :

$$K = 2 \times (5.9Cq_r + 0.61)^{5/7} - 1 \quad (2)$$

L'ensemble des résultats expérimentaux (cas centripète et centrifuge) peut être regroupé sous la forme d'une courbe donnant les variations de  $K$  en fonction de  $Cq_r$  (fig.4). La loi (2) a été validée dans le cas des écoulements avec flux centripète (écoulements de type Batchelor) pour 4 rapports d'aspect  $G$ . Lorsque l'on impose un flux centrifuge, les deux types de structuration sont observées. Tant que l'écoulement est de type Batchelor, la loi (2) est toujours valide (faible  $Cq_r$ , en valeur absolue). Pour de plus fortes valeurs négatives de  $Cq_r$ , la symétrie de l'écoulement de Batchelor se brise et l'écoulement est alors de type Stewartson. Il est confiné dans la couche de Von Kármán. La loi de variation de  $K$  change. Le coefficient  $K$  tend vers une valeur asymptotique proche de 0.02. On peut noter que la transition entre ces deux types d'écoulement s'opère de manière continue.

Nguyen et *al.* [15] ont montré numériquement qu'une cavité de grand rapport d'aspect favorise un écoulement de type Stewartson, alors qu'une cavité de faible rapport d'aspect favorise un écoulement de type Batchelor. Nos expériences pour  $G = 0.012$  et  $G = 0.036$  n'ont pas révélé de différences dans la structure de l'écoulement et la loi (2) reste valide dans les deux cas. Le rapport d'aspect  $G$  ne semble pas être un paramètre pertinent dans la présente étude et pour la gamme considérée.

## 5 Conclusion

La structure d'un écoulement de type Batchelor à deux couches limites séparées par un noyau en rotation et celle d'un écoulement de type Stewartson avec une couche limite unique sur le rotor ont été étudiées expérimentalement et numériquement dans le cas d'une cavité de type rotor-stator avec flux centrifuge imposé. Nous avons également caractérisé la transition entre

ces deux types d'écoulement selon un nombre de Rossby et avons montré que cette transition continue est indépendante du rapport d'aspect de la cavité. Les prédictions du modèle RSM sont en excellent accord avec les mesures de vitesse.

## Références

- [1] T. Von Kármán. Über laminare und turbulente Reibung. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1 :233–252, 1921.
- [2] U.T. Bödewadt. Die Drehströmung über festem Grunde. *Z. Angew. Math. Mech.*, 20 :241–253, 1940.
- [3] G.K. Batchelor. Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow. *Quat. J. Mech. and Appl. Math.*, 4(1) :29–41, 1951.
- [4] K. Stewartson. On the flow between two rotating coaxial disks. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 49 :333–341, 1953.
- [5] H.O. Kreiss and S.V. Parter. On the swirling flow between rotating coaxial disks : existence and uniqueness. *Commun. Pure Appl. Math.*, 36 :55–84, 1983.
- [6] G.L. Mellor, P.J. Chapple, and V.K. Stokes. On the flow between a rotating and a stationary disk. *J. Fluid. Mech.*, 31(1) :95–112, 1968.
- [7] P.J. Zandbergen and D. Dijkstra. Von Kármán swirling flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 19 :465–491, 1987.
- [8] J.F. Brady and L. Durlofsky. On rotating disk flow. *J. Fluid. Mech.*, 175 :363–394, 1987.
- [9] K.G. Picha and E.R.G. Eckert. Study of the air flow between coaxial disks rotating with arbitrary velocities in an open or enclosed space. proceedings of 3<sup>rd</sup> U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., 1958.
- [10] J.W. Daily and R.E. Nece. Chamber dimension effects on induced flow and frictional resistance of enclosed rotating disks. *ASME J. Basic Eng.*, 82 :217–232, 1960.
- [11] B.E. Launder and D.P. Tselepidakis. Application of a new second-moment closure to turbulent channel flow rotating in orthogonal mode. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 15(1) :2–10, 1994.
- [12] L. Elena and R. Schiestel. Turbulence modeling of rotating confined flows. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 17 :283–289, 1996.
- [13] R. Debuchy, A. Dymont, H. Muhe, and P. Micheau. Radial inflow between a rotating and a stationary disc. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 17(6) :791–810, 1998.
- [14] S. Poncet, M.-P. Chauve, and P. Le Gal. Turbulent rotating disk flow with inward through-flow. *J. Fluid. Mech.*, 522 :253–262, 2005.
- [15] N.D. Nguyen, J.P. Ribault, and P. Florent. Multiple solutions for flow between coaxial disks. *J. Fluid. Mech.*, 68(2) :369–388, 1975.